

# 센서에 측정노이즈가 있는 볼-빔 시스템의 출력 궤환 제어기

## An Output Feedback Controller for a Ball and Beam System under Measurement Noise of Feedback Sensor

김 현 도, 최 호 림\*  
(Hyun-Do Kim<sup>1</sup> and Ho-Lim Choi<sup>1</sup>)  
<sup>1</sup>Dong-A University

**Abstract:** In this paper, we assume that an output sensor of a ball and beam system is coupled with AC measurement noise. We propose an output feedback controller for a ball and beam system under measurement noise of feedback sensor. Measurement noise makes feedback signals distorted, and results in performance degradation or even system failure. Therefore, we need to design a robust controller to accommodate the possible measurement noise in the feedback information. Our controller is equipped with a gain-scaling factor to minimize the effect of measurement noise in output feedback information. We give an analysis of the controlled system and illustrate the improved control performance via simulation and experiment for a ball and beam system.

**Keywords:** a ball and beam system, input-output feedback linearization, measurement noise, gain-scaling factor, output feedback

### I. 서론

볼-빔(ball and beam) 시스템은 모터와 빔이 연결되어 모터의 제어를 통해 빔에 있는 볼의 위치를 제어하는 시스템이다. 로봇 및 비행체의 자세 제어 시스템 등에 기본이 되는 볼-빔 시스템은 비선형성이 강하기 때문에 불안정한 시스템의 안정화에 다양하게 응용이 가능하다. 볼-빔 시스템의 출력 센서에 측정노이즈(measurement noise)가 발생하면 궤환(feedback) 신호를 왜곡시키게 되고 시스템이 정상적으로 작동할 수 없게 만들기 때문에 이러한 측정노이즈의 영향을 최소화시킬 필요가 있다[2,5-8].

이와 관련된 연구는 [8]에서 측정노이즈가 발생한 상태 변수에 저역 통과 필터(low pass filter)를 적용한 상태 궤환 제어기로 측정노이즈를 최소화시켰으나 전체 상태를 측정해야 하는 경우만을 다루었고, [6]에서는 측정노이즈를 줄이기 위해 gain-scaling factor를 추가한 출력 궤환 제어기를 적용하여 Lyapunov 안정성 기법과 라플라스 변환 기법을 혼용하여 해석하였다.

본 논문에서는 볼-빔 시스템의 출력인 위치 센서에 AC 측정노이즈가 발생함을 가정한다[5]. 볼-빔 시스템에 입-출력 궤환 선형화(input-output feedback linearization) 기법을 적용한 4차 시스템을 5차 시스템으로 변환하여 gain-scaling factor가 추가된 출력 궤환 제어기를 적용하고, 측정노이즈의 영향을 받는 상태 변수들의 ultimate bound와 gain-scaling factor 관계를 Lyapunov 안정성 기법을 통해 해석하였다. 그 결과 실제로 측정노이즈의 영향을 받는 ultimate bound가 작은 값으로 감소됨을 보였으며 이를 시뮬레이션과 실험을 통해 검증하였다.

### II. 입-출력 궤환 선형화 기법이 적용된 볼-빔 시스템

그림 1은 시뮬레이션 및 실험에 사용된 QUANSER사 볼-빔 시스템이다. 볼-빔 시스템은 BB01(Ball and Beam)과 SRV02(DC Servo motor)로 구성되며 제어 목적은 모터에 전압을 인가하여 모터의 각을 변화시키고 이 움직임에 따라 빔의 각도를 변화시켜서 볼의 위치를 안정하게 하는 것이다. 볼-빔 시스템은 볼의 위치 센서와 서보 모터의 각도 센서를 통해 상태를 측정할 수 있다.

볼-빔 시스템의 동역학 방정식은 다음과 같다[9].

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= K_{bb} \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{1}{\mu} \dot{\theta} + \frac{K_{svv}}{\mu} u \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $r$  은 볼의 위치,  $\theta$  는 SRV02의 부하 각,  $K_{bb}$  는 BB01의 모델 이득,  $K_{svv}$  는 SRV02의 정상상태 이득,  $\mu$  는 SRV02의 시정수,  $u$ 는 SRV02의 입력 전압이다. 식 (1)을 상태 방정식으로 나타내기 위하여 식 (2)와 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} r &= x_1, \quad \dot{r} = \dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{r} = \dot{x}_2 \\ \theta &= x_3, \quad \dot{\theta} = \dot{x}_3 = x_4, \quad \ddot{\theta} = \dot{x}_4 \end{aligned} \quad (2)$$



그림 1. 볼-빔 시스템.  
Fig. 1. Ball and beam system.

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 5. 31., 수정: 2011. 9. 6., 채택확정: 2011. 9. 7.

김현도, 최호림: 동아대학교 전기공학과

(hyundo10@naver.com/hlchoi@dau.ac.kr)

※ 이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(2010-0007325).

식 (1)에 식 (2)를 적용하여 상태 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_{bb} \sin x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{1}{\mu}x_4 + \frac{K_{srv}}{\mu}u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{3}$$

식 (3)에  $y = x_1$  인 입-출력 궤환 선형화 기법(input-output linearization method)을 적용하면 식 (4)와 같이 선형화된 형태로 나타낼 수 있다[8].

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \underbrace{x_2}_{z_2 = \phi_2(x)} \\ \dot{z}_2 &= \underbrace{K_{bb} \sin x_3}_{z_3 = \phi_3(x)} \\ \dot{z}_3 &= \underbrace{K_{bb}x_4 \cos x_3}_{z_4 = \phi_4(x)} \\ \dot{z}_4 &= \dot{x}_4 K_{bb} \cos x_3 - x_4^2 K_{bb} \sin x_3 \\ &= -\frac{1}{\mu}K_{bb}x_4 \cos x_3 - x_4^2 K_{bb} \sin x_3 + \frac{1}{\mu}K_{srv}K_{bb} \cos x_3 u \\ &= \underbrace{\frac{1}{\mu}K_{srv}K_{bb} \cos x_3}_{a(x) \neq 0} u - \underbrace{\frac{1}{\mu}x_4 - \frac{z_4^2 \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3}}_{b(x,z)} \end{aligned} \tag{4}$$

$$y = z_1$$

식 (4)에서  $\eta = \int_0^t y d\tau$  로 두면 다음과 같이 5차 시스템으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \dot{\eta} = z_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= z_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= z_3 = \xi_4 \\ \dot{\xi}_4 &= z_4 = \xi_5 \\ \dot{\xi}_5 &= a(x)u + \delta_5(x, z) \\ \eta &= \int_0^t y d\tau = \xi_1 \\ y &= \dot{\eta} \end{aligned} \tag{5}$$

여기서  $\delta_5(x, z) = b(x, z)$  이다. 식 (5)에서  $v = a(x)u$  로 두고 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv + \delta(x, z) \tag{6}$$

$$\eta = C\xi \tag{7}$$

여기서  $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5]^T$ ,  $\delta(x, z) = [0, 0, 0, 0, \delta_5(x, z)]^T$ ,  $(A, B)$ 는 Brunovsky canonical pair,  $C = [1, 0, 0, 0, 0]$  이다.

볼-빔 시스템은 볼의 위치 센서( $x_1$ )와 모터의 각도 센서( $x_3$ )만 가지고 있으므로 정밀한 제어를 위해서는 측정할 수 없는 상태를 관측할 수 있는 관측기가 필요하다. 식 (6)에 대해서 제안된 관측기와 제어기를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + Bv - L(\varepsilon)(\eta - C\hat{\xi}) + \delta(x, \hat{z}) \tag{8}$$

$$v = K(\varepsilon)\hat{\xi} - \delta_5(x, \hat{z}) \tag{9}$$

여기서  $\hat{\xi} \in R^5$ 는 관측된 상태이고,  $L(\varepsilon) = \left[ \frac{l_1}{\varepsilon}, \frac{l_2}{\varepsilon^2}, \frac{l_3}{\varepsilon^3}, \frac{l_4}{\varepsilon^4}, \frac{l_5}{\varepsilon^5} \right]^T$ ,

$$K(\varepsilon) = \left[ \frac{k_1}{\varepsilon^5}, \frac{k_2}{\varepsilon^4}, \frac{k_3}{\varepsilon^3}, \frac{k_4}{\varepsilon^2}, \frac{k_5}{\varepsilon} \right], \delta(x, \hat{z}) = [0, 0, 0, 0, \delta_5(x, \hat{z})]^T, \varepsilon >$$

0이다.

상태관측오차  $e = \xi - \hat{\xi}$  로 정의하고, 식 (6)로부터 식 (8)을 빼면 다음과 같이  $e$ 에 관한 식으로 나타낸다.

$$\dot{e} = A_L(\varepsilon)e + \delta(x, z) - \delta(x, \hat{z}) \tag{10}$$

여기서  $A_L(\varepsilon) = A + L(\varepsilon)C$  이다.

식 (6)으로부터 식 (9)를 대입하여  $\xi$  에 관한 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\xi} = A_K(\varepsilon)\xi - BK(\varepsilon)e + \delta(x, z) - \delta(x, \hat{z}) \tag{11}$$

여기서  $A_K(\varepsilon) = A + BK(\varepsilon)$  이다.

식 (10)과 식 (11)에서 행렬  $A_L = A_L(1)$  과  $A_K = A_K(1)$  이 Hurwitz가 되도록  $L$ 과  $K$ 를 선택한다.

### III. 출력 센서에 측정 에러가 포함된 볼-빔 시스템

볼-빔 시스템에 출력 센서의 오작동으로 측정에러가 포함됨을 가정하면 궤환 신호는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{y} = y + s(t) \tag{12}$$

이 때  $s(t)$  는 출력 센서에 포함되는 측정에러이다.

**Assumption 1:**  $n$  차 시스템에서 출력 신호에 포함되는 측정에러를 다음과 같은 AC 성분으로 설정한다.

$$s(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin \omega_i t \tag{13}$$

여기서  $\alpha_i \geq 0$  는 AC 측정에러의 크기,  $\omega_i \geq 1$  는 AC 측정에러의 주파수이다.

**Remark 1:** 측정에러는 보통 고주파 성분 신호로써 [2,7]에서도 정현파 함수에 대해 사례를 가지고 있으며, [2,7]에서는 알려진 exosystem에서 발생하는 정현파 측정에러를 가정하여 에러의 크기와 주파수를 알 수 있음을 가정하였다. 반면에 우리의 경우는 알 수 없는  $\alpha_i, \omega_i$  를 가정하여 에러에 대한 조건을 더 일반화시켰다. 그리고 임의의 주기함수는 삼각함수의 합인 푸리에 급수로 표현이 가능하므로 Assumption 1에서 설정한 정현파 함수는 푸리에 급수로 확장이 가능하다.

볼-빔 시스템에 Assumption 1과 같은 측정에러가 포함됨을 가정하고 제안된 관측기와 제어기를 수식적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + Bv - L(\varepsilon)(\bar{\eta} - C\hat{\xi}) + \delta(x, \hat{z}) \tag{14}$$

$$v = K(\varepsilon)\hat{\xi} - \delta_5(x, \hat{z}) \tag{15}$$

여기서  $\bar{\eta} = \int_0^t \bar{y} d\tau = \eta + \bar{s}(t)$ ,  $\bar{s}(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau$  이다.

식 (6)으로부터 (14)를 빼고 (15)를 대입하여 augmented closed-loop dynamics로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{e} = A_L(\varepsilon)e + L(\varepsilon)\bar{s}(t) + \delta(x, z) - \delta(x, \hat{z}) \quad (16)$$

$$\dot{\xi} = A_K(\varepsilon)\xi - BK(\varepsilon)e + \delta(x, z) - \delta(x, \hat{z}) \quad (17)$$

식 (16)에 대한 Lyapunov equation은  $A_L^T P_L + P_L A_L = -I$  이다 [1].  $E(\varepsilon) = \text{diag}[1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4]$  으로 정의하면 모든  $\varepsilon > 0$  에 대해서 다음과 같은 관계식을 가진다[3].

$$\begin{aligned} \varepsilon A_L(\varepsilon) &= E(\varepsilon)^{-1} A_L E(\varepsilon) \\ A_L^T(\varepsilon) P_L(\varepsilon) + P_L(\varepsilon) A_L(\varepsilon) &= -\varepsilon^{-1} E(\varepsilon)^2 \\ P_L(\varepsilon) &= E(\varepsilon) P_L E(\varepsilon) \end{aligned} \quad (18)$$

식 (16)에 대한 Lyapunov function을  $V_o(e) = e^T P_L(\varepsilon)e$  로 두면  $e$ 의 궤적에 대한 미분 값은 식 (18)의 관계에 의해서 다음과 같이 나타난다[4].

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(e) &= -\varepsilon^{-1} e^T E(\varepsilon)^2 e + 2e^T E(\varepsilon) P_L E(\varepsilon) L(\varepsilon) \bar{s}(t) \\ &\quad + 2e^T E(\varepsilon) P_L E(\varepsilon) \{\delta(x, z) - \delta(x, \hat{z})\} \\ &\leq -\varepsilon^{-1} \|E(\varepsilon)e\|^2 + 2\varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)e\}^T P_L L \bar{s}(t) \\ &\quad + 2\|P_L\| \|E(\varepsilon)e\| \|E(\varepsilon)\{\delta(x, z) - \delta(x, \hat{z})\}\| \end{aligned} \quad (19)$$

여기서  $\|E(\varepsilon)\{\delta(x, z) - \delta(x, \hat{z})\}\|$  은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \|E(\varepsilon)\{\delta(x, z) - \delta(x, \hat{z})\}\| &= \left| \varepsilon^4 \left( \frac{1}{\mu} (\xi_5 - \hat{\xi}_5) + \frac{(\xi_5^2 - \hat{\xi}_5^2) \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \right| \\ &\leq \varepsilon^4 \frac{1}{\mu} |e_5| + \frac{\sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \varepsilon^4 (\xi_5^2 - \hat{\xi}_5^2) \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)에서  $\xi_5^2 - \hat{\xi}_5^2 \leq \varphi |e_5|$ ,  $\varphi > 0$  로 두고 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \|E(\varepsilon)\{\delta(x, z) - \delta(x, \hat{z})\}\| &\leq \varepsilon^4 \frac{1}{\mu} |e_5| + \frac{\sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \varepsilon^4 \varphi |e_5| \\ &= \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \varepsilon^4 |e_5| \\ &\leq \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \|E(\varepsilon)e\| \end{aligned} \quad (21)$$

$\dot{V}_o(e)$  를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(e) &\leq -\varepsilon^{-1} \|E(\varepsilon)e\|^2 + 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \|P_L\| \|E(\varepsilon)e\|^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)e\}^T P_L L \bar{s}(t) \\ &= - \left( \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} - 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \|P_L\| \right) \|E(\varepsilon)e\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \|E(\varepsilon)e\|^2 + 2\varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)e\}^T P_L L \bar{s}(t) \\ &\leq -N_o \|E(\varepsilon)e\|^2 - \varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)e\}^T E(\varepsilon) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\times \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \\ |e_4| \\ |e_5| \end{bmatrix} - 2\|P_L\| \|L\| \|\bar{s}(t)\| \\ \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

여기서  $N_o = \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} - 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \|P_L\|$  이다. 식 (22)에서  $N_o > 0$  일 때  $e$ 의 ultimate bound는 다음과 같다. 여기서 ultimate bound는  $UB(\cdot)$  으로 나타낸다.

$$UB \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \\ |e_4| \\ |e_5| \end{bmatrix} \end{pmatrix} \leq 4\|P_L\| \|L\| \|\bar{s}(t)\| \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{pmatrix} \quad (23)$$

식 (23)에서  $\varepsilon$ 이 큰 값을 가질 수록  $e_1$ 을 제외한  $e_2, e_3, e_4, e_5$ 의 ultimate bound가 감소하게 된다.

식 (17)에 대한 Lyapunov equation은  $A_K^T P_K + P_K A_K = -I$  이므로 식 (18)에서와 같이 유사하게  $\varepsilon$ 에 대해서 다음과 같은 관계식을 가진다.

$$\begin{aligned} \varepsilon A_K(\varepsilon) &= E(\varepsilon)^{-1} A_K E(\varepsilon) \\ A_K^T(\varepsilon) P_K(\varepsilon) + P_K(\varepsilon) A_K(\varepsilon) &= -\varepsilon^{-1} E(\varepsilon)^2 \\ P_K(\varepsilon) &= E(\varepsilon) P_K E(\varepsilon) \end{aligned} \quad (24)$$

식 (17)에 대한 Lyapunov function을  $V_c(\xi) = \xi^T P_K(\varepsilon)\xi$  로 두면  $\xi$ 의 궤적에 대한 미분 값은 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(\xi) &= -\varepsilon^{-1} \|E(\varepsilon)\xi\|^2 + 2\xi^T E(\varepsilon) P_K E(\varepsilon) \{\delta(x, z) - \delta(x, \hat{z})\} \\ &\quad - 2\varepsilon^{-1} \xi^T E(\varepsilon) P_K B K E(\varepsilon) e \\ &\leq -\varepsilon^{-1} \|E(\varepsilon)\xi\|^2 + 2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \|P_K\| \|E(\varepsilon)\xi\| \|E(\varepsilon)e\| \\ &\quad - 2\varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)\xi\}^T P_K B K E(\varepsilon) e \\ &= -\varepsilon^{-1} \|E(\varepsilon)\xi\|^2 + 2q \|E(\varepsilon)\xi\| \|E(\varepsilon)e\| \\ &\quad - 2\varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)\xi\}^T P_K B K E(\varepsilon) e \end{aligned} \quad (25)$$

여기서  $q = \left( \frac{1}{\mu} + \frac{\varphi \sin x_3}{K_{bb} \cos^2 x_3} \right) \|P_K\|$  이다.

전체 시스템의 Lyapunov function을  $V(e, \xi) = V_o(e) + dV_c(\xi)$ ,  $d > 0$  으로 설정하면  $\dot{V}(e, \xi)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \xi) &\leq -\Sigma^T M \Sigma - \frac{1}{2} \varepsilon^{-1} \{E(\varepsilon)\xi\}^T E(\varepsilon) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} |e_1| \\ |e_2| \\ |e_3| \\ |e_4| \\ |e_5| \end{bmatrix} - 4\|P_L\| \|L\| \|\bar{s}(t)\| \\ \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{-1}d\{E(\varepsilon)\xi\}^T E(\varepsilon) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} - 2\|P_k\| \|K\| \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{pmatrix} \times (|e_1| + \varepsilon|e_2| + \varepsilon^2|e_3| + \varepsilon^3|e_4| + \varepsilon^4|e_5|)$$

여기서  $\Sigma$  와  $M$  은 다음과 같다.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \|E(\varepsilon)e\| \\ \|E(\varepsilon)\xi\| \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} N_o & -dq \\ -dq & -\frac{d}{2}\varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

식 (26)에서  $d < \frac{N_o}{2\varepsilon q^2}$  일 때  $\xi$  의 ultimate bound는 다음과 같다.

$$UB \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} \leq 4\|P_k\| \|K\| \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{pmatrix} (|e_1| + \varepsilon|e_2| + \varepsilon^2|e_3| + \varepsilon^3|e_4| + \varepsilon^4|e_5|) \quad (27)$$

식 (27)에서  $|e_1|, \dots, |e_5|$  에  $e$  의 ultimate bound인 식 (23)을 대입하면 다음과 같다.

$$UB \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} \leq 80\|P_k\| \|K\| \|P_L\| \|L\| \tilde{s}(t) \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{pmatrix} \quad (28)$$

식 (28)에서  $\varepsilon$  이 큰 값을 가질 수록,  $\xi_1$  을 제외한  $\xi_2, \dots, \xi_5$  의 ultimate bound가 감소하게 된다.

볼-빔 시스템에서 입-출력 궤환 선형화 기법을 사용하여 선형화 한 상태  $z, z = \xi_{i+1}, i=1, \dots, 4$  이므로  $z$  의 ultimate bound로 다시 나타내면 다음과 같다.

$$UB \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \leq 80\|P_k\| \|K\| \|P_L\| \|L\| \tilde{s}(t) \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \\ \varepsilon^{-2} \\ \varepsilon^{-3} \\ \varepsilon^{-4} \end{pmatrix} \quad (29)$$

여기서  $|\tilde{s}(t)| = 2\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\omega_i}$  이다. 식 (29)에서  $\varepsilon$  이 큰 값을 가질 수록  $z$  의 ultimate bound가 감소하기 때문에 AC 측정에서의 영향을 최소화시킬 수 있다.

**IV. 시뮬레이션**

볼-빔 시스템에 제안된 제어기법을 이용하여 시뮬레이션을 적용한다. 초기값은  $x_1(0) = -15cm, x_3(0) = 0$  이고 AC 측정에서는  $s(t) = 0.01\sin 3t + 0.02\sin 4t$  로 설정한다. 관측기의 극점을  $-2, -3, -4, -5, -6$  로 설정하면  $L = [-20, -155, -580, -1044, -720]^T$  이고  $A_L$  은 Hurwitz가 된다. 그리고 제어

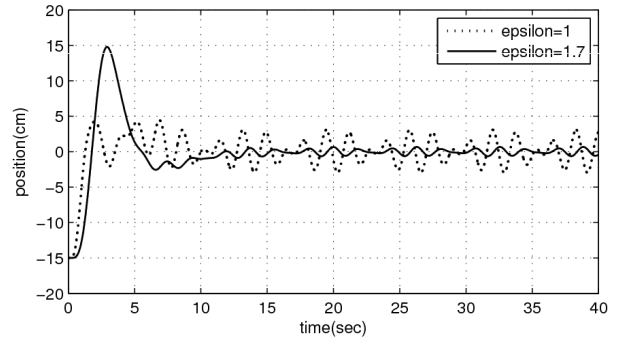
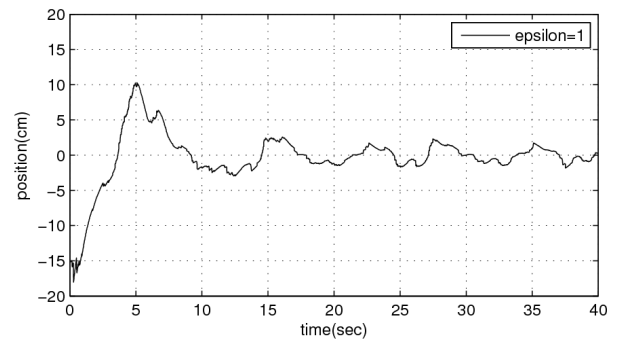


그림 2.  $\varepsilon$  의 변화에 따른 시뮬레이션 결과.  
Fig. 2. Simulation result by changing  $\varepsilon$ .

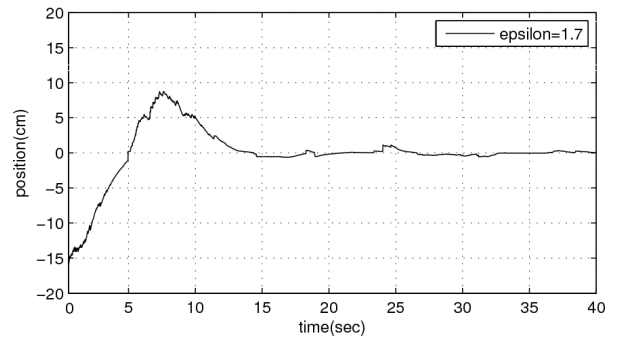
기의 극점을  $-1, -1.3, -1.7, -2, -2.3$  로 설정하면  $K = [-10.166, -33.469, -43.013, -27.010, -8.300]$  이고  $A_K$  는 Hurwitz가 된다.  $\varepsilon$  값을 변화시켰을 때 볼의 위치에 대한 시뮬레이션 결과는 그림 2와 같다. 그림 2에서  $\varepsilon$  값을 증가시켰을 때 볼의 위치( $x_1$ )의 ultimate bound가 감소하므로 AC 측정에서의 영향을 최소화시킬 수 있다.

**V. 실험**

제안된 제어기법의 검증을 위해 볼-빔 시스템에 실험을 적용한다. AC 측정에서는  $s(t) = 0.01\sin 3t + 0.02\sin 4t$  로 설정한다. 관측기의 극점을  $-2, -3, -4, -5, -6$  로 설정하면  $L = [-20, -155, -580, -1044, -720]^T$  이고  $A_L$  은 Hurwitz가 된다. 제어기의 극점을  $-1, -1.5, -2, -2.5, -3$  으로 설정하면  $K = [-22.5, -65.25, -72.5, -38.75, -10]$  이고  $A_K$  는 Hurwitz



(a)  $\varepsilon = 1$ .



(b)  $\varepsilon = 1.7$ .

그림 3.  $\varepsilon$  의 변화에 따른 시뮬레이션 결과.  
Fig. 3. Experiment result by changing  $\varepsilon$ .

가 된다.  $\epsilon$  값을 변화시켰을 때 볼의 위치에 대한 실험 결과는 그림 3과 같다. 그림 3에서  $\epsilon$  값을 증가시켰을 때 볼의 위치( $x_1$ )의 ultimate bound가 감소하므로 AC 측정에러의 영향을 최소화시킬 수 있다.

**VI. 결론**

본 논문에서는 볼-빔 시스템의 출력 센서에 오작동이 발생하여 정현파의 합인 형태인 AC 측정 에러가 포함되었음을 가정하였다. 볼-빔 시스템에 입-출력 궤환 선형화 기법을 적용하고, 4차 시스템을 5차 시스템으로 변환하여 제안된 제어 기법을 적용하였다. 각 상태변수에 대해서 측정 에러의 영향으로 나타나는 ultimate bound와 gain-scaling factor의 관계를 Lyapunov 안정성 분석을 통하여 해석하였으며 시뮬레이션과 실험을 통해 유효성을 검증하였다. 제안된 제어기법에 대해서 분석한 바와 같이 gain-scaling factor 값을 증가시켰을 때 정상상태에서의 AC 측정에러의 영향을 감소시킬 수 있음을 확인하였다.

**참고문헌**

[1] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, 3rd Ed., Oxford University Press Inc., 1999.  
 [2] Z. Chen, "A remark on sensor disturbance rejection of nonlinear systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 9, pp. 2206-2210, 2009.  
 [3] H.-L. Choi and J.-T. Lim, "Output feedback stabilization for a class of Lipschitz nonlinear systems," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E88-A, no. 2, pp. 602-605, 2005.  
 [4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice Hall Inc., 2002.

[5] H.-D. Kim, J.-S. Youn, and H.-L. Choi, "Design of an output feedback controller compensating measurement noise for a ball and beam system," *KIEE summer Conference*, pp. 1653-1654, 2010.  
 [6] H.-D. Kim and H.-L. Choi, "Design and analysis of an output feedback controller for a chain of integrators system compensating measurement noise of feedback sensor," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 17, no. 4, pp. 299-303, 2011.  
 [7] A. Serrani, A. Isidori, and L. Marconi, "Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 46, no. 8, pp. 1178-1194, 2001.  
 [8] J.-S. Youn and H.-L. Choi, "Design and analysis of a state feedback controller for a chain of integrators system under measurement noise," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 16, no. 10, pp. 969-974, 2010.  
 [9] Quanser, *Ball and beam user manuals*, 2008.



**김 현 도**

2010년 동아대학교 전기공학과 졸업.  
 2010년~현재 동아대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 제어이론, 비선형 시스템 제어.

**최 호 립**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제4호 참조.