

등분포하중을 받는 등방성 환형 섹터판의 탄성 거동에 대한 해석적 연구

Analytical Investigation on Elastic Behaviors of Isotropic Annular Sector Plates Subjected to Uniform Loading

김 경 식¹⁾
Kim, Kyung Sik

요약 : 본 논문에서는 등분포 하중을 받는 등방성 환형 섹터판의 지배방정식에 대한 새로운 해석적 해가 3차원 극좌표계에서 개발된다. 4차의 편미분방정식 형태를 가지는 지배방정식은 레비 타입 시리즈 해에 대한 가정과 그 후속적인 수학적 처리를 통해 4차의 상미분방정식으로 전환된다. 전환된 상미분방정식의 특성방정식에 대한 실수 영역 및 복소수 영역의 해를 해석적으로 구한 후 제차 및 비제차 방정식의 각 해의 조합으로 최종적인 지배방정식의 해가 완성된다. 개발된 해의 수렴성 및 정확성을 보여주기 위해 다양한 경계조건 및 내부 중심 각도를 가지는 판에 대한 예제 해석을 수행하였고 그 결과를 다른 해석적 연구결과와 비교하였다. 또한 개발된 해의 정확성을 확인하기 위하여 유한요소 프로그램인 ABAQUS를 이용한 탄성해석을 추가로 수행하여 그 결과를 비교하였다. 제안된 해로부터 결정된 환형 섹터판의 변위 및 모멘트 값은 여타의 해석적 및 수치적 접근방법으로 구한 값들과 비교해 본 결과 매우 높은 수준에서 일치하고 있음이 확인되었다.

ABSTRACT : This paper presents the development of a new analytical solution to the governing differential equation for isotropic annular sector plates subjected to uniform loading in a three-dimensional polar coordinate system. The 4th order governing partial differential equation (PDE) was converted to an ordinary differential equation (ODE) by assuming the Levy-type series solution form and the subsequent mathematical operations. Finally, a series-type solution was assembled with homogeneous and nonhomogeneous solution parts after operating real values and complex conjugates derived from the characteristic equation. To demonstrate the convergence rate and the accuracy of the featured method, several examples with various sector angles were selected and solved. The deflections and internal moments in the example annular sector plates that were obtained from the proposed solution were compared with those obtained from other analytical studies and numerical analyses using the finite element analysis package program, ABAQUS. Very good agreement with the results of other analytical and numerical methodologies was shown.

핵심용어 : 등방성 환형 섹터판, 지배 방정식, 편미분 방정식, 레비-타입 시리즈, 유한 요소 해석

KEYWORDS : isotropic annular sector plate, governing equation, partial differential equation, levy-type series, finite element analysis

1. 서론

일반적인 섹터판(sector plates)은 하나의 원주 방향 곡면을 가지는 것에 비해 환형 섹터판(annular sector plates)은 반지름 방향의 두 직선 면과 원주 방향의 두 곡선 면으로 구성되는 구조 요소이다. 이러한 환형 섹터판은 곡선 교량, 건축 구조물의 바닥슬래브 등 대형 건설 구조물의 요소뿐 아니라 기계 구조 및 항공 구조 등에서 다양하게 사용되고 있다. 그림 1에는 일반적인 형태의 환형 섹터판이 극좌표 시스템에 표현되었다. 직교좌표 시스템에서의 직사각형 모양의 플레이트에 대한 다양한 연구가 진

행되어 왔으나 환형 섹터판에 대해서는 상대적으로 그 연구가 활발하지 않았다는 사실은 판이론에 대한 대표적인 참고 도서(Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1970; Szilard, 1974; 2004) 등을 통해서 확인될 수 있다. 환형 섹터판의 처짐 및 휨 거동과 관련된 최근의 연구 동향에서는 해석적 방법을 통한 균질/비균질 또는 등방성/직교이방성 등의 특징을 가지는 다양한 하중조건을 가지는 판에 대한 새로운 엄밀 해의 유도 및 개발을 포함하고 있다. Srinivasan와 Thiruvengkatachar (1984)는 행렬법을 이용하여 환형 섹터판의 대변위 처짐 해석을 수행하였다. Aghdam 등(2007)은 에너지법의 일종인 확장된

1) 교신저자. 청주대학교 토목환경공학과 전임강사
(Tel. 043-229-8472, E-mail : kkim@cju.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2010년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

칸토로비치법 (extended Kantorovich method)을 적용하여 환형 섹터 모양의 박판 휨 거동을 표현할 수 있는 간략화된 폐쇄 형태의 해 (closed-form solution)를 제안하였다. Cheung과 Chan (1981)은 박판 및 후판 형태의 섹터판에 대하여 유한대 판법 (finite strip method)을 응용하여 정적 및 동적해석을 수행하였다. Harik(1984)은 다양한 해석적 방법을 검토한 후 수직 하중을 받는 섹터판의 처짐과 응력을 산정할 수 있는 해석적 해를 제안하였다. Salehi와 Turvey(1991)는 환형 섹터판의 탄성 대변위 처짐 문제를 해결하기 위하여 동적 리랙세이션 개념을 응용한 유한차분법을 적용하였다. 최근 Kobayashi와 Turvey (1994)는 전단변형 효과를 고려하여 후판으로 구성된 환형 섹터판의 미소 탄성 처짐을 계산하기 위한 Levy 타입의 시리즈를 가지는 해석적 해를 개발하였다. Turvey와 Salehi (1998; 2001; 2005)는 보강된 또는 미보강된 환형 섹터판의 탄소성 대변위 처짐 해석이 가능한 제안식을 개발하여 서로 다른 층을 가지는 판에 대한 항복 여부를 비교 관측하였다. Szilard (1974; 2004)는 Clebsch가 최초 제안한 해를 응용하여 섹터판의 처짐 변위 함수에 대한 시리즈 형태의 해를 소개하였다. Mizusawa와 Ushijima(1996)는 중간 정도로 두꺼운 환형 섹터판의 진동 해석을 위한 스플라인대판법(spline strip method)을 적용하였다. McGee 등(1995)은 반지름 방향으로 단순지지된 환형 섹터 모양의 후판에 대하여 자유진동을 분석할 수 있는 정해를 유도하여 제안하였다.

고전적인 박판 이론에서는 휨을 받는 판의 수직 전단변형의 영향은 고려되지 않는다. 판의 두께가 다른 치수에 비해 상대적으로 커질 때에는 전단변형의 영향은 판의 처짐 계산에 영향을 줄 수 있다. 전단변형이 고려된 두꺼운 판에 대한 이론은 Reissner(1945)과 Mindlin(1951)에 의하여 선도되었다.

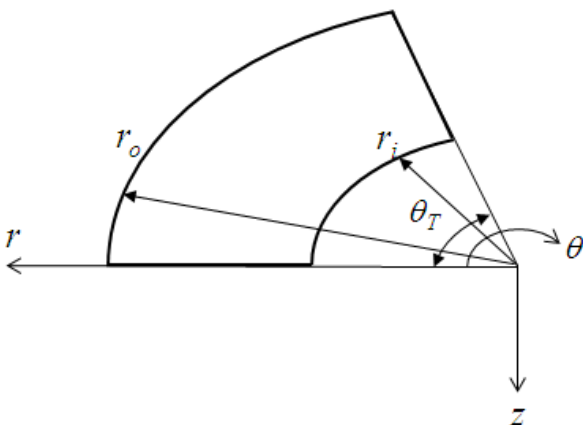


그림 1. 극좌표시스템에 표현된 환형 섹터판 (annular sector plate)

전단변형이 고려된 중간 정도의 두께를 가지는 판의 처짐 해석에 가장 널리 채택되는 방법은 Mindlin(1951)의 이론에 상당부분 근거하고 있다. 수직 분포하중을 받는 환형 섹터판의 처짐량에서 수직전단변형의 영향을 살펴보기 위해 Kobayashi와 Turvey(1994)의 연구 결과를 심층 분석하여 주목할 만한 경향을 도출하여 그림 2에 보였다. 그림 2에서 가로 축은 환형 섹터판의 폭 두께비를 나타내고, 세로축은 전단변형이 고려되지 않은 Kirchhoff의 고전이론으로 도출한 처짐량에 대한 전단변형이 고려된 Mindlin의 이론으로 도출한 처짐량의 비율을 나타낸다. 분석된 결과는 $r_i/r_o=0.5$, 섹터 각도 45° 인 판의 예제로부터 도출되었다. 그림 2에서 알 수 있듯이 환형 섹터판의 폭 두께비가 20 이상일 경우 경계조건에 상관없이 Kirchhoff의 고전이론과 Mindlin의 이론에 의한 차이는 4% 이하로 심각할 수준으로 크지 않음을 알 수 있다. 그림 2에서 보인 전단변형의 영향 분석 결과는 대부분의 박판 휨거동 해석에서 Kirchhoff의 고전이론만으로도 충분히 정확한 결과를 도출할 수 있다는 Szilard(1974; 2004)의 서술을 뒷받침한다고 볼 수 있다. 단, 앞서 서술하였듯이 판두께가 상대적으로 큰 경우, 특히 고정단 경계조건을 가지는 환형 섹터판의 경우, 전단변형이 해석에 고려되어야 될 것으로 판단된다.

본 논문에서는 고전적인 박판 이론에 근거하여 환형 섹터판의 처짐 변위에 대한 지배미분방정식의 해를 3차원 극좌표 시스템에서 Levy 타입 시리즈 형태로 새롭게 개발한다. 환형 섹터판은 반지름 방향(radial direction)으로 단순지지 되어 있고, 원주 방향(circumferential direction)으로는 단순지지 또는 고정지지 되어 있다. 등방성 환형 섹터판의 지배 미분 방정식은 반지름 및 원주 방향으로 변수인 r 과 θ 에 대한 4차의 편미분 방정식인 biharmonic equation을 포함하고 있다. 해를 유도하기 위한 첫 번째 스텝으로 지배 방정식에 나타난 편미분 방정식(PDE, partial differential equation)을 Levy

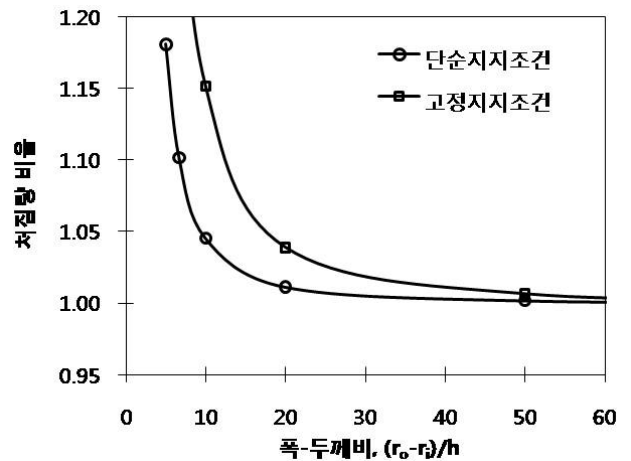


그림 2. 지지조건에 따른 판의 처짐량에서 전단변형의 영향

타입 해를 가정하고 적절한 수학적 처리를 통해 상미분 방정식 (ODE, ordinary differential equation)으로 전환하는 것이다. 다음으로 전환된 상미분 방정식에 대한 4차의 특성 방정식(characteristic equation)을 취하고 이에 대한 폐쇄 형식의 정해(closed-form solution)를 도출한다. 도출된 해의 실수 부분 및 복소수 부분을 오일러 공식 등으로 처리하여 최종적으로 제차 및 비제차 방정식(homogeneous and nonhomogeneous equations)의 해의 조합으로 환형 섹터판의 처짐 변위에 대한 시리즈 타입의 해를 완성한다.

다음 장에서는 지배 미분 방정식의 해석적 해의 개발 과정을 보이고 이어 본 연구에서 개발된 해의 수렴성과 정확성을 보여주기 위하여 다양한 경계 조건 및 섹터 중심 각도를 가지는 예제를 선정하여 해석을 수행한다. 제안식으로 결정된 처짐 변위 및 내부모멘트 값은 다른 해석적 연구결과와 비교 분석된다. 또한 제안된 해의 정확성을 입증하기 위하여 범용 유한 요소 해석 프로그램인 ABAQUS(2004)를 이용한 선형 탄성 해석의 수행 결과와도 비교된다.

2. 지배 미분 방정식의 해석적 해의 개발

본 장에서는 3차원 극좌표 시스템에서 환형 섹터판의 처짐 변위에 대한 지배 미분 방정식에 대한 해석적 해가 도출된다. 그림 1에는 내부 및 외부 반경(r_i 및 r_o)과 섹터 중심 각도(θ_r)로 구성된 전형적인 환형 섹터판이 3차원 극좌표계에 표시되어 있다. 극좌표 시스템에서 환형 섹터판의 처짐면을 규정하는 z 방향으로의 함수 w 의 지배 미분 방정식은 다음과 같이 표현된다(Timoshenko와 Woinowsky-Krieger 1970).

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad (1)$$

여기서, $q(r, \theta)$ 는 수직방향으로 재하되는 하중의 크기이고, 심볼 D 는 다음과 같이 정의되는 판요소의 휨강성(flexural rigidity)을 의미한다.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

지배 미분 방정식의 엄밀한 일반해는 다음과 같이 제차 및 비제차 방정식의 각 해의 조합으로 표현된다.

$$w = w_h + w_p \quad (3)$$

여기서 w_h 는 제차방정식의 해(solution of homogeneous equation) 그리고 w_p 는 비제차방정식의 특정해(particular

solution of nonhomogeneous equation)를 의미한다. 환형 섹터판에 작용하는 수직하중이 반지름 방향으로 독립적이라 가정하면 재하하중은 θ 의 함수로 다음과 같은 푸리에 시리즈(Fourier series) 형식으로 전개될 수 있다.

$$q(r, \theta) = q(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \lambda \theta \quad (4)$$

여기서, q_n 및 λ 는 다음과 같다.

$$\lambda = \frac{n\pi}{\theta_r} \quad (5)$$

$$q_n = \frac{2}{\theta_r} \int_0^{\theta_r} q(\theta) \sin \lambda \theta d\theta \quad (6)$$

만약 일정한 크기의 분포하중 q_o 가 전체 환형 섹터판에 작용한다면 식 (6)의 q_n 은 다음과 같이 표현된다.

$$q_n = \frac{4q_o}{n\pi} \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (7)$$

여기에 보이지는 않았지만 일정한 크기의 분포하중 이외에 다양한 하중 형태에 대해서도 식 (6)의 적용은 가능하다. 식 (3)에서의 균질 해는 다음의 시리즈로 가정될 수 있다.

$$w_p = \sum_{n=1}^{\infty} P_n r^4 \sin \lambda \theta \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (8)$$

식 (7)을 식 (4)에 대입하고 다시 식 (4)와 (8)을 지배 방정식인 식(1) 대입한 후 P_n 에 대하여 풀어서 정리하면

$$P_n = \frac{4q_o}{\pi n D (84 - 32\lambda^2 + \lambda^4)} \quad (9)$$

을 얻을 수 있다. Szilard (1974; 2004)는 식 (9)와 유사한 형태의 항을 비제차 방정식의 해에 포함시킨 적은 있으나 식 (9)와는 상이하다. 균질해로서 다음의 Levy 타입 시리즈를 고려한다.

$$w_h = \phi_n(r) \cdot \lambda_n(\theta) = \sum R_n \sin \lambda \theta \quad (10)$$

여기서 항 R_n 은 반지름 방향의 변수 r 의 함수이다. 식 (10)을 다시 지배 방정식에 대입하면 다음 식(11)을 얻는다.

$$\frac{d^4 R_n}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 R_n}{dr^3} + \frac{1-2\lambda^2}{r^2} \frac{d^2 R_n}{dr^2} - \frac{2\lambda^2}{r^3} \frac{dR_n}{dr} + \frac{\lambda^4}{r^4} R_n = 0 \quad (11)$$

식 (11)을 상수항을 가지는 선형의 상미분방정식으로 전환하기 위하여

$$r = e^s \quad (12)$$

로 두고 양 변 로그를 취하고 r에 대하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{d(\ln r)}{dr} = \frac{1}{r} \tag{13}$$

식 (13)에 보인 상관관계를 이용하면 다음의 1차에서 4차까지의 미분 상관 관계식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{dR_n}{dr} = \frac{1}{r} R'_n \tag{14a}$$

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} = \frac{1}{r^2} (R''_n - R'_n) \tag{14b}$$

$$\frac{d^3 R_n}{dr^3} = \frac{1}{r^3} (R'''_n - 3R''_n + 2R'_n) \tag{14c}$$

$$\frac{d^4 R_n}{dr^4} = \frac{1}{r^4} (R^{iv}_n - 6R'''_n + 11R''_n - 6R'_n) \tag{14d}$$

여기서,

$$R'_n = \frac{dR_n}{d\xi}, R''_n = \frac{d^2 R_n}{d\xi^2}, R'''_n = \frac{d^3 R_n}{d\xi^3}, \text{ 그리고}$$

이고, 식 (14a)~(14d)를 식 (11)에 대입하면 다음의 선형 4차 미분 방정식을 얻는다.

$$R^{iv}_n - 4R'''_n + (6 - 2\lambda^2)R''_n - 3R'_n + \lambda^4 R_n = 0 \tag{15}$$

그리고 식 (15)에 나타난 선형 미분 방정식의 특성 방정식(characteristic equation)은

$$m^4 - 4m^3 + (6 - 2\lambda^2)m^2 - 3m + \lambda^4 = 0 \tag{16}$$

와 같은 4차 방정식으로 표현된다. 본 연구에서는 식 (16)에 보인 4차 방정식의 근, m_1, m_2, m_3 , 그리고 m_4 을 해석적 방법으로 직접 유도하여 다음과 같은 결과를 얻었다.

$$m_{1,2} = \frac{2 - \sqrt{u-p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(u+p) + \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \tag{17a}$$

$$m_{3,4} = \frac{2 + \sqrt{u-p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(u+p) - \frac{2q}{\sqrt{u-p}}} \tag{17b}$$

여기서,

$$p = -2\lambda^2 \tag{17c}$$

$$q = 1 - 4\lambda^2 \tag{17d}$$

$$u = \frac{1}{6} (X + 12\sqrt{Y})^{1/3} + \frac{32\lambda^4 - 48\lambda^2}{3(X + 12\sqrt{Y})^{1/3}} - \frac{2}{3} \lambda^2 \tag{17e}$$

여기서,

$$X = 512\lambda^6 + 576\lambda^5 - 864\lambda^2 + 108 \tag{17f}$$

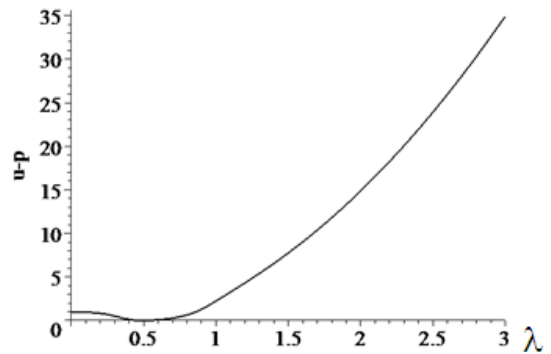
$$Y = 12288\lambda^{10} - 16128\lambda^8 + 6048\lambda^4 - 1296\lambda^2 + 81 \tag{17g}$$

식 (17a)~(17g)에 보인 근에 대한 유도 과정은 본 논문의 말미에 있는 부록에서 상세히 보였다.

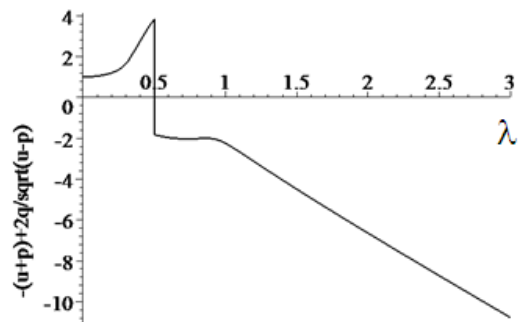
식 (15)에 보인 R_n 에 대한 상미분 방정식의 일반적인 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_n = C_1 e^{m_1 \xi} + C_2 e^{m_2 \xi} + C_3 e^{m_3 \xi} + C_4 e^{m_4 \xi} \tag{18}$$

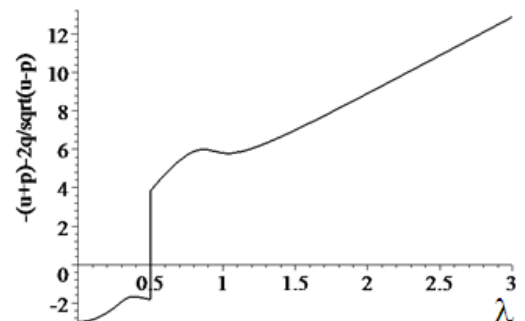
여기서 $C_1 \sim C_4$ 는 경계조건에 의해 결정되는 계수이다. 미분 방정식의 일반해에 관해서는 Boyce와 DiPrima(1997)의 저서를 포함하여 대학 수학 교과서에서 참조가 가능하다.



(a) λ 의 변화에 따른 $u-p$ 의 값



(b) λ 의 변화에 따른 $-(u+p)+2q/\sqrt{u-p}$ 의 값



(c) λ 의 변화에 따른 $-(u+p)-2q/\sqrt{u-p}$ 의 값

그림 3. λ 값의 변화에 따른 제곱근 기호안의 수식 값

식 (17a) 및 (17b)에서 포함되어 있는 제곱근 기호 안의 수

식이 구체적으로 가질 수 있는 값의 범위를 그림 3에 보였다. 그림 3에서 구현된 그래프는 해석적 연산 및 도식이 가능한 수학 프로그램인 Maple(Heck 2003)을 이용하여 얻었다. λ 값이 0.5 이상일 경우, m_1 과 m_2 는 공액복소수 형태의 근을 가지고 m_3 와 m_4 는 두 개의 서로 다른 실근을 가진다는 사실이 프로그램 Maple을 통해 확인되었다. 섹터 각도 θ_r 는 0(zero)에서 2π 의 값을 가지므로 정의에 의해 λ 값은 0.5 이상의 값을 항상 가진다.

복소수근 m_1 과 m_2 을 실수영역에서 구현하기 위해 오일러 공식(Euler formula)를 적용하면 식 (18)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$R_n = e^{\alpha\xi} [A_n \cos \omega\xi + B_n \sin \omega\xi] + C_n e^{m_3\xi} + D_n e^{m_4\xi} \quad (19)$$

여기서,

$\alpha = \frac{m_1 + m_2}{2}$, $\omega = \frac{m_1 - m_2}{2i}$ 이고, A_n, B_n, C_n , 그리고 D_n 은 계수이다. 식 (19)를 식 (10)에 대입하면

$$w_h = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda \theta [e^{\alpha\xi} (A_n \cos \omega\xi + B_n \sin \omega\xi) + C_n e^{m_3\xi} + D_n e^{m_4\xi}] \quad (20)$$

을 얻고 최종적으로 식 (3), (8), (9) 및 (12)에 의해 지배방정식에 대한 일반해는 다음과 같이 결정된다.

$$w = w_h + w_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin \lambda \theta [e^{\alpha\xi} (A_n \cos \omega\xi + B_n \sin \omega\xi) + C_n r^{m_3} + D_n r^{m_4}]}{\pi n D (84 - 32\lambda^2 + \lambda^2)} \right\} \quad (21)$$

계수 A_n, B_n, C_n , 그리고 D_n 은 경계조건에 의해 결정되며 섹터 중심 각도 θ_r 와 정수 n 을 포함하고 있는 λ 의 함수로 표현된다.

환형 섹터판내에 발생하는 내부모멘트 및 수직전단력은 처짐(deflection)에 대한 함수 w 가 결정되면 다음과 같이 표현된다 (Szilard 1974; 2004).

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (22)$$

$$m_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (23)$$

$$q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla_r^2 w \quad (24)$$

$$q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \nabla_r^2 w \quad (25)$$

여기서, m_r 와 q_r 는 환형 섹터판 내에서 반지름 방향으로 단위 길이당 내부모멘트 및 수직전단력을 나타내고, m_θ 와 q_θ 는

원주 방향으로 동일 부재력을 나타낸다. 반지름 방향 및 원주 방향의 끝단 경계면에서의 단위 길이당 평면내 수평반력, v_r 및 v_θ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$v_r = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla_r^2 w + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (26)$$

$$v_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla_r^2 w + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (27)$$

기하학적 형상 및 내부모멘트 발생 여부 등을 고려하여 단순지지 및 고정지지 경계조건으로 다음과 같이 조건이 활용된다.

-단순지지 조건: $w = 0$ (28)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (29)$$

-고정지지 조건: $w = 0$ (30)

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (31)$$

위에서 보인 경계조건 자체는 단순히 보일 수 있으나 이 조건을 만족시키는 식 (21)의 각 계수, A_n, B_n, C_n , 그리고 D_n 에 대한 폐쇄 형식의 표현식은 해 자체가 시리즈 형태를 가지므로 불가능하다. 그러나 만약 판의 치수 및 기타 재료 상수 등이 결정되면 식 (21)의 적용은 간편해진다. 식 (21)은 여타의 연구자가 제안한 식에 비해 매우 간편하게 표현되었다. 제안된 수식의 적용성과 우수성을 입증하는 수치 해석 예제가 다음 장에서 전개된다.

3. 예제 해석

본 장에서는 수직방향으로 분포하중을 받고 있는 다양한 경계조건을 가지는 환형 섹터판에 대한 해석 예제가 수행된다. 앞서 언급하였듯이 반지름 방향으로는 단순지지 상태이고, 원주 방향으로는 단순지지 (SS 경계조건), 고정지지 (FF 경계조건), 그리고 이들의 조합 (FS 경계조건) 등 세 가지 경계조건이 고려된다. FS 경계조건인 경우 내측 원주 방향으로 고정 지지이고 외측 원주 방향으로는 단순지지되었다. 해석 결과에 대한 비교 목적으로 다음과 같은 무차원 매개변수가 변위 및 내부모멘트의 계산에 사용된다.

$$\bar{w} = \frac{wD}{q_o(r_o - r_i)^4} \times 10^3 \quad (32)$$

$$\bar{m}_r = \frac{m_r}{q_o(r_o - r_i)^2} \times 10^2 \quad (33)$$

$$\bar{m}_\theta = \frac{m_\theta}{q_o(r_o - r_i)^2} \times 10^2 \quad (34)$$

여기서 w , m_r 및 m_θ 는 판의 처짐 변위, 반지름 및 원부 방향의 내부모멘트를 의미하고, q_o 는 수직 분포하중의 크기를 나타낸다.

섹터 내부 각도는 30°, 45°, 60°의 세 경우가 고려되고 환형 섹터판의 폭-두께비, $(r_o - r_i)/h$ 는 50으로 고정되었다. 여기서 심볼 h 는 판의 두께를 나타낸다. 외부 반지름에 대한 내부 반지름의 비, 즉 r_i/r_o 는 0.5로 고정되었다. 재료의 탄성 계수 및 포아송비는 200 GPa 및 0.3으로 가정되었다.

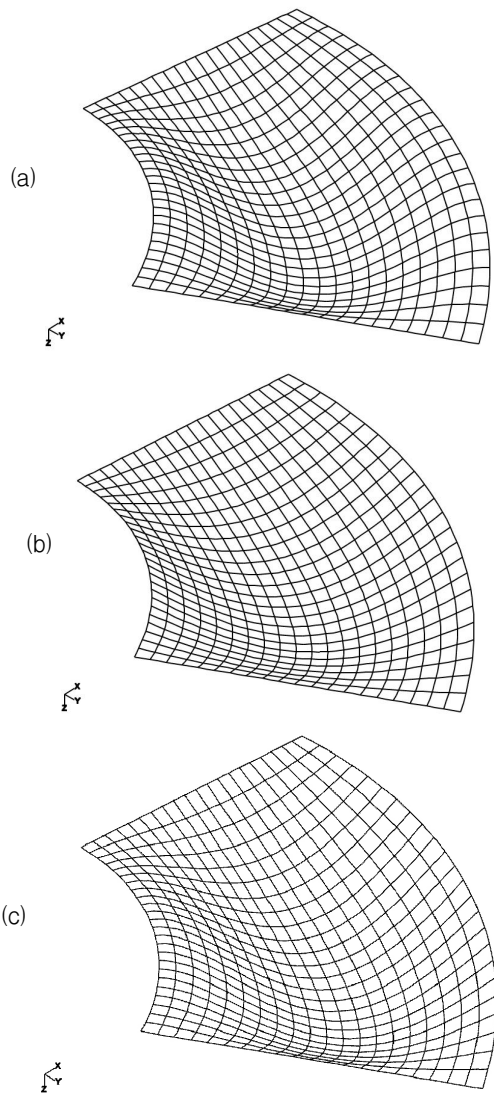


그림 4. 경계조건에 따른 환형 섹터판의 처짐 형상:
(a) FF 경계조건; (b) SS 경계조건; (c) FS 경계조건

다른 연구자들과의 결과 비교를 위해서 섹터 각도 60° 및 FF 경계조건을 가지는 예제에 대한 해석이 먼저 수행되었다. 결과의 검증은 위하여 범용 유한요소해석 프로그램인 ABAQUS (2004)를 이용하여 선형 탄성 해석이 추가적으로 수행되었다. 해석 시 4절점 쉘요소인 S4R와 8절점 쉘요소인 S8R의 두 가지 요소가 모두 적용되어 그 결과의 차이를 또한 비교하였다. 예제 모델 구성시 추가적인 요소 수의 증가가 해석 결과의 정확도에 영향을 주지 않을 정도로 충분한 요소 수가 고려되었다. 반지름 및 원주 방향으로 20개 이상의 요소가 고려되면 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있었으며 더 이상의 요소 분할은 정확도의 증가에 영향을 주지 않는 것으로 파악되었다.

또한 형상의 영향을 최소화하기 위해 가로-세로비를 가능한 1에 가깝게 유지하였다. 수직 분포하중을 받는 환형 섹터판의 처짐 형상을 경계조건에 따라 구분하여 그림 4에 나타내었다.

표 1에는 제안된 식 (21)로부터 결정된 최대 무차원 처짐량을 ABAQUS 해석 결과 및 다른 연구자들 (Aghdam 등 2007; Cheung과 Chan 1981; Harik 1984; Salehi와 Turvey 1991; Kobayashi와 Turvey 1994)의 해석적 및 수치적 연구 결과와 비교하여 보여준다. 본 연구에서 제안한 식으로부터 구한 처짐량이 ABAQUS 8절점 해석결과와 가장 근접하다는 것을 표 1에서 확인할 수 있다. 표 2에는 식 (21)~(23)로부터 구한 반지름 및 원주 방향 내부모멘트를 역시 다른 연구자 및 ABAQUS해석 결과와 비교하여 보여주고 있다. 표 2로부터 본 연구 및 Kobayashi와 Turvey (1994)의 연구에서 얻은 값이 유한 요소 해석 결과 값에 가장 근접하다는 것을 알 수 있다.

표 1. 예제 판의 최대 무차원 처짐량의 비교

연구자 구분	무차원 처짐량 \bar{w} 의 최대값 (오차 [*])
Aghdam et al. (2007)	2.272 (-10.7%)
Cheung and Chan (1981)	2.464 (-3.1%)
Harik (1984)	2.480 (-2.5%)
Salehi and Turvey (1991)	2.784 (9.5%)
Kobayashi & Turvey (1994)	2.538 (-2.0%)
본 연구 제안 식 (21)	2.569 (1.0%)
본 연구 ABAQUS S4R 요소	2.539 (-1.6%)
본 연구 ABAQUS S8R 요소	2.543 (-)

*본 연구 ABAQUS S8R 요소로부터의 값을 기준으로 계산

표 2. 예제 판의 최대 무차원 내부모멘트 값의 비교

연구자 구분	무차원 내부 모멘트 m_r 의 최대값 (오차 [*])	무차원 내부 모멘트 m_θ 의 최대값 (오차 [*])
Aghdam et al. (2007)	3.734 (-8.9%)	1.998 (13.1%)
Cheung and Chan (1981)	4.069 (-0.8%)	2.481 (40.4%)
Harik (1984)	3.815 (-7.0%)	2.100 (18.8%)
Salehi and Turvey (1991)	3.875 (-5.5%)	2.037 (15.3%)
Kobayashi & Turvey (1994)	4.088 (-0.3%)	1.753 (-0.8%)
본 연구 제안 식 (21)	4.145 (1.1%)	1.767 (0.0%)
본 연구 ABAQUS S4R 요소	4.106 (0.1%)	1.715 (-2.9%)
본 연구 ABAQUS S8R 요소	4.100 (-)	1.767 (-)

* 본 연구 ABAQUS S8R 요소로부터의 값을 기준으로 계산

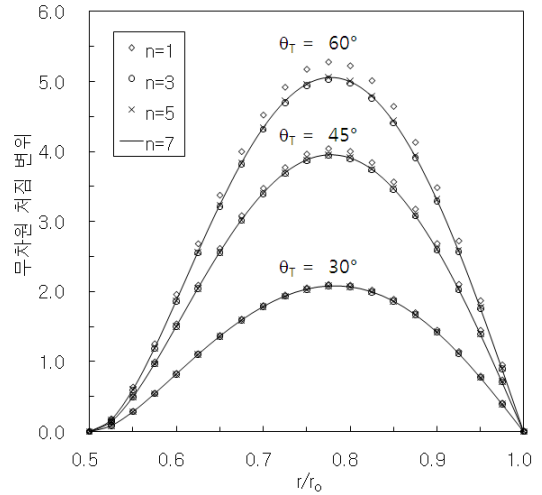


그림 7. FS 경계조건을 가지는 판의 무차원 처짐 범위 분포

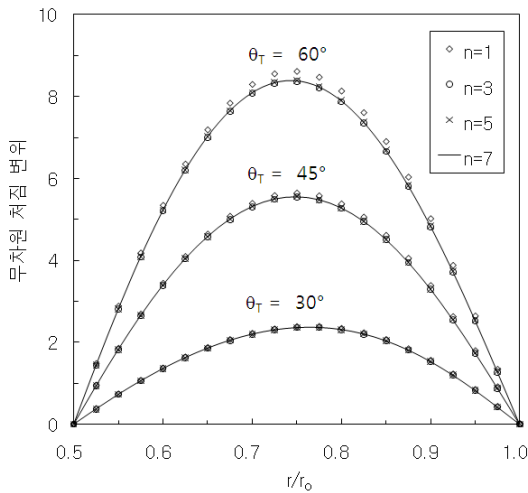


그림 5. SS 경계조건을 가지는 판의 무차원 처짐 범위 분포

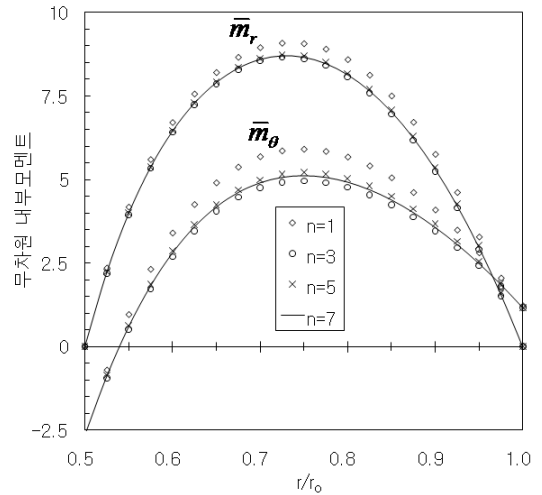


그림 8. SS 경계조건을 가지는 판의 무차원 내부모멘트 분포

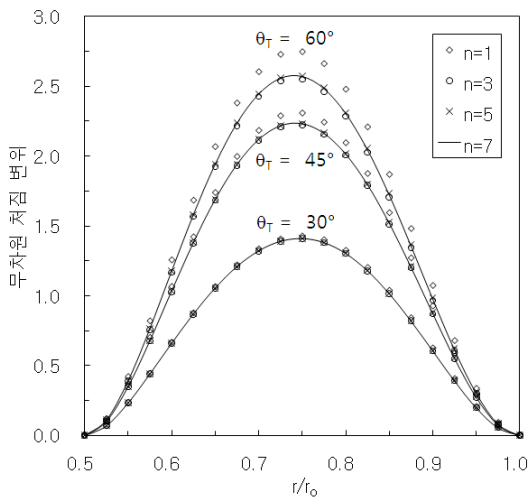


그림 6. FF 경계조건을 가지는 판의 무차원 처짐 범위 분포

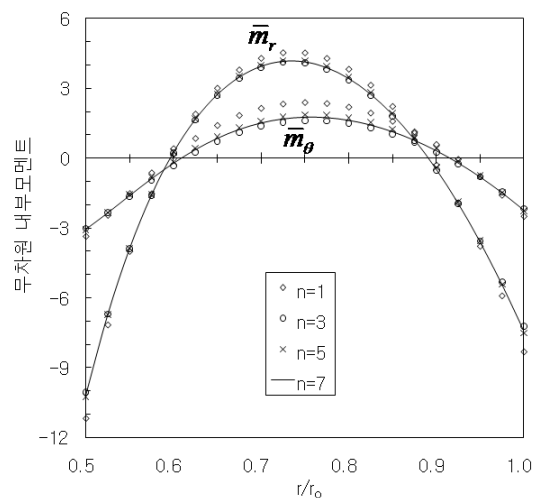


그림 9. FF 경계조건을 가지는 판의 무차원 내부모멘트 분포

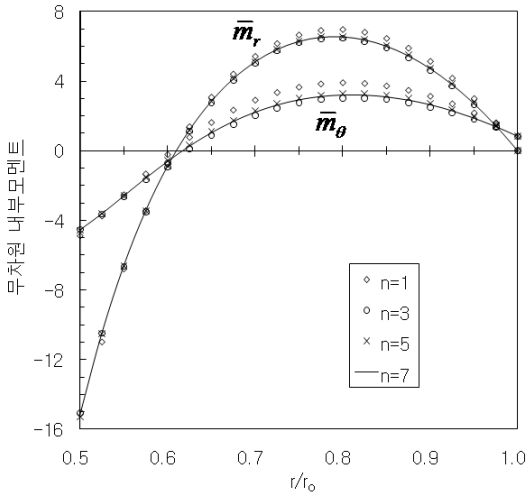


그림 10. FS 경계조건을 가지는 판의 무차원 내부모멘트 분포

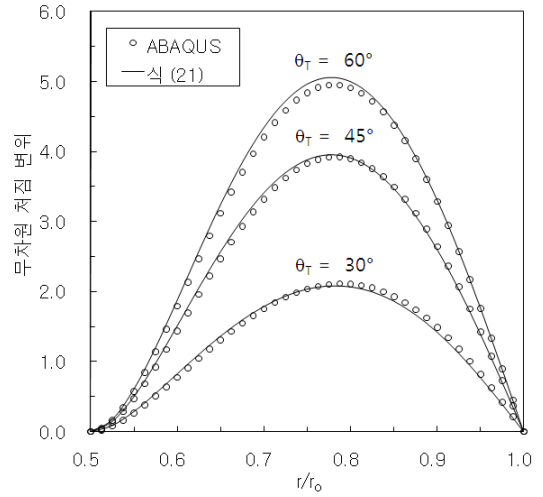


그림 13. FS 경계조건을 가지는 판의 무차원 처짐 변위 분포 비교

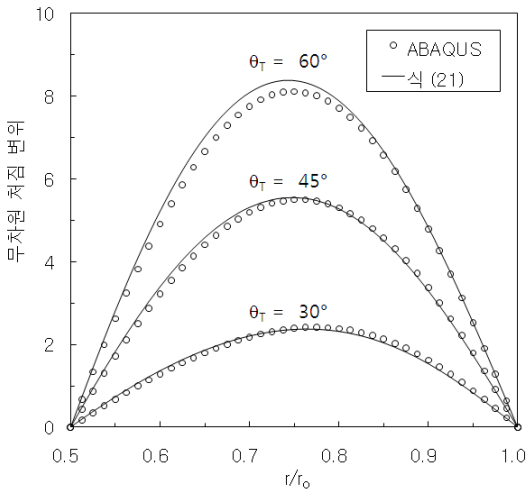


그림 11. SS 경계조건을 가지는 판의 무차원 처짐 변위 분포 비교

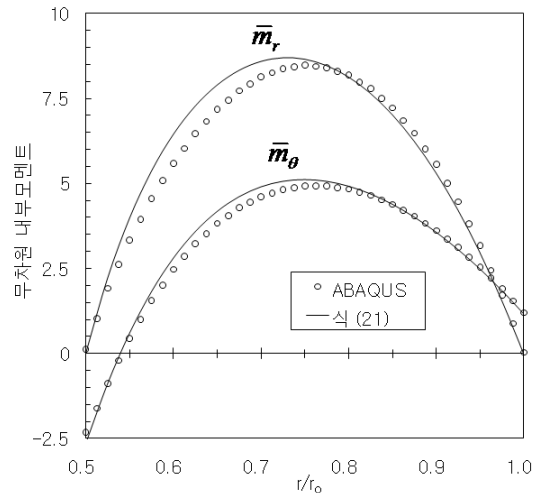


그림 14. SS 경계조건을 가지는 판의 무차원 내부모멘트 분포 비교

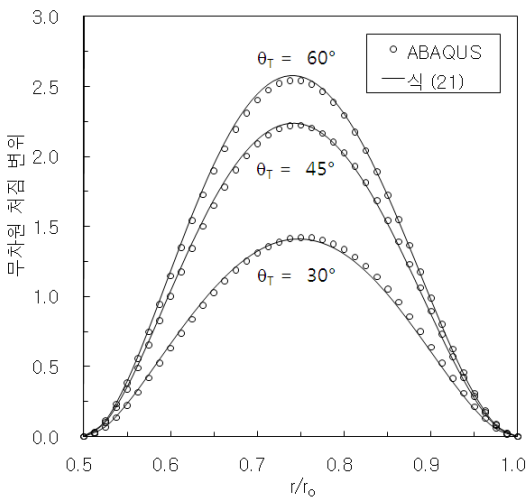


그림 12. FF 경계조건을 가지는 판의 무차원 처짐 변위 분포 비교

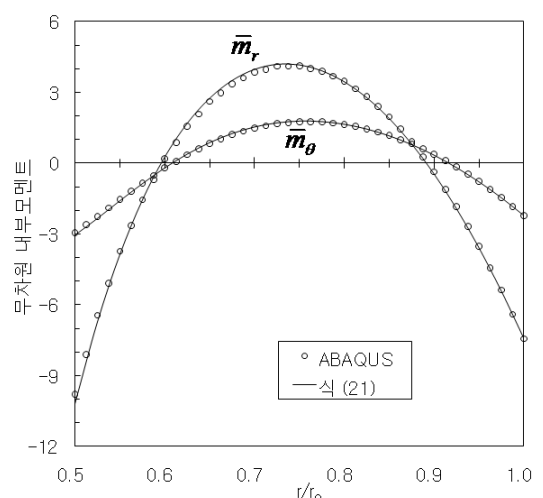


그림 15. FF 경계조건을 가지는 판의 무차원 내부모멘트 분포 비교

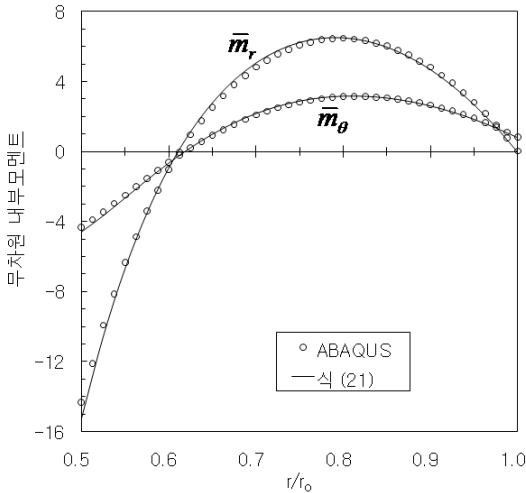


그림 16. FS 경계조건을 가지는 판의 무차원 내부모멘트 분포 비교

시리즈 타입의 해가 공학적으로 수용할 만한 정확도를 구현하기 위해서는 취합 항의 개수가 적절히 결정되어야 한다. 특히 판의 처짐 함수가 결정되더라도 식 (22) 및 (23)에 보인 바와 같이 내부모멘트를 결정하는 식이 고차의 미분을 포함하고 있어 이런 경우 더욱 많은 시리즈 항의 취합이 요구된다. Kobayashi와 Turvey(1994)의 경우에 의하면 수백 개까지 항이 취합되는 해도 있다. 표 1 및 2에 보인 본 연구 제안식의 결과는 최초 4개 항($n = 1, 3, 5, 7$)의 취합으로 얻어졌다. 더 이상의 시리즈 항을 취하더라도 의미 있는 정확도의 증가를 보이지는 않았다. 이러한 사실은 본 연구에서 제안된 식 (21)이 매우 우수한 수렴성 및 정확성을 제공한다는 증거가 될 수 있다. 그림 5~7에서 경계조건에 따른 판의 중심선 ($\theta = \theta_T/2$)에서의 무차원 처짐 변위의 크기를 시리즈 항의 취합 개수 별로 보였다. 또한 그림 8~10에서는 경계조건에 따른 판 중심선($\theta = \theta_T/2, \theta_T = 60^\circ$)에서의 무차원 내부모멘트 크기를 시리즈 항의 취합 개수 별로 보였다. 식 (21)에서 최초 4개 항만을 취하면 충분한 정확도를 구현할 수 있음을 그림 5~10을 통해 확인할 수 있다. 그림 11~16에서는 본 제안식의 적용 결과를 ABAQUS를 이용한 선형 탄성 해석 결과와 비교하여 보여주고 있다. 그림 14에서 보인 무차원내부모멘트 m_r 의 값의 분포를 살펴보면 본 연구 및 ABAQUS의 결과의 최대값 발생 위치가 다소 차이를 보인다. 이는 ABAQUS가 8요소에서 채택하고 있는 형상함수에서 근거한 값과, 본 연구의 변위함수에서 2차이상의 편미분의 조합 (식(22))으로 구한 값이 미소하나마 차이를 가질 수 있다는 것으로 설명될 수 있다. 그림 11~16으로부터 판의 처짐 변위 뿐 아니라 내부모멘트의 분포 등에도 본 연구 및 ABAQUS로부터의 두 결과가 높은 수준에서 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

4. 결 론

3차원 극좌표 시스템에서 탄성 휨거동을 하는 환형 섹터판에 대한 Levy 타입의 시리즈를 포함하는 해석적 해가 개발되었다. 본 해의 개발과정에서 4차의 편미분 지배 방정식에 대한 폐쇄 형식의 해석적 해를 성공적으로 유도하였다. 수학 이론의 적용 뿐 아니라 해석적 수학 처리 프로그램을 활용하여 구체적이고 체계적인 수식을 수립하고 전개하였다. 개발된 해석적 해는 여타의 연구에서 찾아 볼 수 없는 단순한 형태를 가지면서도 수렴성 및 정확성에서는 매우 우수함을 보였다. 수직 분포하중을 받는 환형 섹터판은 반지름 방향으로 단순지지되어 있고, 원주 방향으로는 단순지지, 고정지지, 또는 이들의 조합 등으로 경계조건이 설정되었다. 본 연구에서 제안된 시리즈 형식의 해에 대한 수렴성 및 정확성을 검증하기 위하여 다양한 섹터 중심 각도 및 경계 조건을 가지는 예제 판을 선택하여 해석을 수행하였다. 본 연구에서 제안된 식의 결과를 여타의 다른 해석적 및 수치적 방식으로 수행된 연구결과와 비교하였다. 또한 범용 유한 요소 해석 프로그램인 ABAQUS에서 제공하는 4절점 및 8절점 판요소를 이용한 선형 탄성 해석도 수행하여 그 결과를 비교하였다. 제안식으로 얻어진 판의 수직 처짐 변위 및 내부모멘트 값은 8절점 판요소를 이용한 유한 요소 해석의 결과가 높은 수준으로 일치함이 확인되면서 제안식의 정확성이 검증되었다. 또한 제안식은 수렴성 측면에서도 최초 4개의 시리즈 항만으로 충분한 정확도를 확보할 수 있을 정도의 우수함을 보였다. 본 연구의 성과는 추후 진행될 환형 섹터판의 다양한 거동 연구를 위한 기초 자료로 활용될 수 있을 것으로 예상된다.

부록. 4차 특성방정식의 해석적 해의 유도

본 부록에서는 식 (16)에 보인 4차 특성방정식에 대한 폐쇄 형식의 정해가 해석적 방법으로 유도된다.

$$m^4 - 4m^3 + (6 - 2\lambda^2)m^2 - 3m + \lambda^4 = 0 \tag{A1}$$

먼저 3차 항을 소거하기 위해 다음과 같은 치환을 수행한다.

$$y = m - 1 \tag{A2}$$

식 (A2)를 식 (A1)에 대입하면 3차 항이 소거된 y 의 4차 방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{A3a}$$

여기서,
 $p = -2\lambda^2$ (A3b)

$q = 1 - 4\lambda^2$ (A3c)

$r = -2\lambda^2 + \lambda^4$ (A3d)

대수적 정의에 의해 식 (A3a)의 3차 분해 방정식 (cubic resolvent equation)은 다음과 같이 표현된다 (Zwillinger 1996).

$t^3 - pt^2 - 4rt + (4pr - q^2) = 0$ (A4)

만약 u 가 식 (A4)에 나타난 3차 분해 방정식의 한 근이라면 식 (A3a)에 나타난 4차 방정식의 근은 다음 2차 방정식들의 근과 일치한다.

$y^2 \pm \sqrt{u-p} \left(y - \frac{q}{2(u-p)} \right) + \frac{u}{2} = 0$ (A5)

식 (A5)에 보인 2차 방정식들의 근은 다음과 같다.

$y_{1,2} = -\frac{\sqrt{u-p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(u+p) \pm \frac{2q}{\sqrt{u-p}}}$ (A6a)

$y_{3,4} = \frac{\sqrt{u-p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(u+p) \pm \frac{2q}{\sqrt{u-p}}}$ (A6b)

식 (A2)를 식 (A6a) 및 (A6b)에 대입하면 m 에 대한 4차 방정식의 근을 다음과 같이 얻는다.

$m_{1,2} = \frac{2 - \sqrt{u-p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(u+p) + \frac{2q}{\sqrt{u-p}}}$ (A7)

$m_{3,4} = \frac{2 + \sqrt{u-p}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(u+p) - \frac{2q}{\sqrt{u-p}}}$ (A8)

다음으로 식 (A4)에 나타난 t 에 대한 3차 방정식의 한 근인 u 를 구하기 위하여 다음과 같은 치환을 수행한다.

$z = t - \frac{p}{3}$ (A9)

식 (A9)를 식 (A4)에 대입하면 다음과 같이 2차 항이 소거된 3차 방정식을 얻는다.

$z^3 + 3\bar{p}z + \bar{q} = 0$ (A10a)

여기서,

$\bar{p} = \frac{-12r - p^2}{9}$ (A10b)

$\bar{q} = \frac{-2p^3 + 72pr - 27q^2}{27}$ (A10c)

중간값의 정리 (intermediate value theorem)에 의하면 실수를 계수로 가지는 모든 3차 방정식은 최소한 하나의 실근을 가진다. 식 (A10a)에 보인 3차 방정식의 실근의 하나는 해석적 방법에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$z_1 = \left(\frac{-\bar{q} + \sqrt{4\bar{p}^3 + \bar{q}^2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-\bar{q} - \sqrt{4\bar{p}^3 + \bar{q}^2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$ (A11)

식 (A11)을 식 (A9)에 대입하면 식 (A4)에 나타난 3차 분해 방정식에 대한 하나의 근 u 를 다음과 같이 얻는다.

$u = \left(\frac{-\bar{q} + \sqrt{4\bar{p}^3 + \bar{q}^2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-\bar{q} - \sqrt{4\bar{p}^3 + \bar{q}^2}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{p}{3}$ (A12)

식 (A3b)~(A3d)를 식 (A10b)와 (A10c)에 대입하고, 다시 식 (A3b), (A10b) 및 (A10c)를 식 (A12)에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$u = \frac{1}{6} (X + 12\sqrt{Y})^{1/3} + \frac{32\lambda^4 - 48\lambda^2}{3(X + 12\sqrt{Y})^{1/3}} - \frac{2}{3}\lambda^2$ (A13a)

여기서,

$X = 512\lambda^6 + 576\lambda^5 - 864\lambda^2 + 108$ (A13b)

$Y = 12288\lambda^{10} - 16128\lambda^8 + 6048\lambda^4 - 1296\lambda^2 + 81$ (A13c)

3차방정식인 식 (A10a)의 판별식은 $4\bar{p}^3 + \bar{q}^2$ 이 된다. 만약 이 판별식이 양이면 하나의 실근과 두 개의 공액복소수 근을 가진다. 판별식이 0(zero)이면 3개의 실근을 가지며 이중 최소 2개는 일치한다. 판별식이 음이면 세 개의 서로 다른 실근을 가진다.

참 고 문 헌

ABAQUS, Inc. (2004) *ABAQUS analysis user's manual version 6.5*, Pawtucket, RI.
 Aghdam, M. M., Mohammadi, M., and Erfanian, V. (2007) Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, No. 12, pp. 983-990.
 Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. (1997) *Elementary differential equations and boundary value problems, 6th edition*, John Wiley & Sons, Inc.,

- New York, NY.
- Cheung, M.S. and Chan, M.Y.T. (1981) Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method, *Computers and Structures*, Vol. 14, No. 1-2, pp.79-88.
- Harik, I.E. (1984) Analytical solution to orthotropic sector, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, No. 4, pp.554-568.
- Heck, A. (2003) *Introduction to Maple*, Springer, Inc., New York, NY.
- Kobayashi, H. and Turvey, G.J. (1994) Elastic small deflection analysis of annular sector Mindlin plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 36, No. 9, pp.811-827.
- McGee, O.G., Huang, C.S., and Leissa, A.W. (1995) Comprehensive exact solutions for free vibrations of thick annular sectorial plates with simply supported radial edges, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 37, No. 5, pp.537-566.
- Mindlin, R.D. (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 18, No. 1, pp.31-38.
- Mizusawa T. and Ushijima, H. (1996) Variation of annular sector Mindlin plates with intermediate arc supports by the spline strip method, *Computers and Structures*, Vol. 61 No. 5, pp.819-829.
- Reissner, E. (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 12, No. 2, pp.A67-77.
- Salehi, M. and Turvey, G.J. (1991) Elastic large deflection response of annular sector plates-A comparison of DR finite-difference, finite element and other numerical solutions, *Computers and Structures*, Vol. 40, No. 5, pp.1267-1291.
- Srinivasan, R.S. and Thiruvenkatachari V. (1984) Non-linear bending of annular sector plates using a matrix method, *Computers and Structures*, Vol. 18, No. 5, pp.803-812.
- Szilard, R. (1974) *Theories and Analysis of Plate Analysis*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ.
- Szilard, R. (2004) *Theories and Applications of Plate Analysis*, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, NJ.
- Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. (1970) *Theory of plates and shells, 2nd edition*, McGraw Hill, Inc., New York, NY.
- Turvey, G.J. and Salehi, M. (1998) Large deflection analysis of eccentrically stiffened sector plates, *Computers and Structures*, Vol. 68, No. 1-3, pp. 191-205.
- Turvey, G.J. and Salehi, M. (2001) Elasto-plastic response of uniformly loaded sector plates: full section yield model predictions and spread of plasticity, *Computers and Structures*, Vol. 79, No. 22-25, pp.2335-2348.
- Turvey, G.J. and Salehi, M. (2005) Annular sector plates: Comparison of full-section and layer yield predictions, *Computers and Structures*, Vol. 83, No. 28-30, pp.2431-2441.
- Zwillinger, D. (1996) *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae, 30th edition*, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL.
- (접수일자 : 2010. 3. 2 / 심사일 2010. 3. 8 / 게재확정일 2010. 5. 10)