

# 혼합계산을 포함한 분수와 소수의 계산에서 피드백 프로그램의 개발·적용에 대한 효과 분석

이혜경<sup>1)</sup> · 김선유<sup>2)</sup> · 노은환<sup>3)</sup> · 정상태<sup>4)</sup>

본 연구에서는 분수와 소수의 혼합계산 부분에서 나타나는 오류 유형을 진단하고 오류에 대한 피드백 프로그램을 처방하여, 그에 대한 학생들의 반응을 분석하고자 하였다. 우선 연구할 내용을 7가지 영역으로 총화시키고, 각각의 영역을 오류 진단, 진단에 따른 처방 그리고 분석의 3단계로 결과를 정리하였다.

[주제어] 분수, 소수, 자연수, 혼합계산, 오류, 피드백 프로그램

## I. 서 론

분수와 소수의 계산은 수학교부를 하는데 있어 아주 필수적인 요소이다. 특히 초등학교 고학년의 경우 분수와 소수의 계산이 자유롭게 되든지 그렇지 않은지가 수학 과목의 학업 성취도를 알아볼 수 있는 간단한 지표가 되기도 한다.

분수와 소수의 계산에 있어 많은 연구가 이루어졌지만 여전히 학생들은 계산하는 방법에 대해 혼란을 겪고 있었고 심지어는 문제를 푸는 것을 포기하는 것을 볼 수 있었다. 예를 들어 학생들은  $4 - 1.5 \div \frac{3}{4} \times 1\frac{1}{2} + \frac{4}{5}$ 와 같은 초등학교 6-나 단계 5단원 분수와 소수의 혼합계산 문제를 어떻게 풀어야 할지 모르거나 틀린 방법으로 풀었는데, 연구자가 학생들의 계산과정을 살펴보니 학생들은 두 가지 오류를 범하고 있었다.

첫 번째 유형은 풀이 방법상의 오류였다. 분수의 곱셈을 해야 함에도 불구하고  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{6}$ 처럼 분수의 덧셈을 계산하는 방법으로 분모를 통분을 한 후 분자만을 곱하는 학생들이 있었다. 또한 소수와 분수의 덧셈이나 뺄셈에서 소수를 분수로 통일시켜 주는 과정은 잘 수행하였지만, 통분이나 약분하는 방법에서 정확한 계산을 수행하지 못하는 모습도 있었다. 두 번째 유형은 사칙연산 계산 순서상의 오류였다. 분수와 소수의 곱셈과 나눗셈 연산에 대해 배웠지만, 분수와 소수의 사칙연산이 혼합되었을 경우에 여러 가지 오류가 발생하였다. 혼합계산에서 계산 순서를 따지지 않고 무조건 앞에서부터 계산을 하거나, 곱셈과 나눗셈보다 덧셈과 뺄셈을 먼저 계산하는 경우도 있었다.

수업 내용을 일시적으로 이해를 못했거나 혹은 잠깐의 혼란으로 인해 차후 수학을 공부

1) [제1저자] 산청 산청초등학교

2) 진주교육대학교 수학교육과 & 수학교육연구소

3) [교신저자] 진주교육대학교 수학교육과 & 수학교육연구소

4) 사천 문선초등학교

하는데 계속 어려움을 겪는 것은 학생의 입장에서 보면 대단히 불합리하다고 생각된다. 이러한 어려움을 가지고 있는 학생들에게는 그들이 가진 문제점에 대한 정확한 진단과 그에 따른 적절한 처방이 필요할 것이다. 이에 본 연구에서는 진단평가를 통해 학생들이 갖는 오류를 진단한 후 피드백 프로그램을 개발하여 학생들이 분수와 소수의 혼합계산에 대한 내용을 충분히 습득할 수 있도록 적용한 후 학생들의 반응을 분석하였다.

## II. 이론적 배경

### 1. 분수의 지도

분수 연산은 확고한 분수 개념을 바탕으로 해야 한다.  $\frac{2}{5}$ 의 개념을 알지 못한다면  $\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$ 과 같은 분수의 사칙연산 의미도 개념화 할 수 없다. 학생들은 분수의 개념을 잘 모르기 때문에 무조건 규칙과 절차에 의존하려고 하며, 결국 분수 연산에 대해 분명히 이해하지 못한 채 기계적으로 계산을 하게 된다. 이러한 분수에 관한 선행연구로 홍은숙, 강완(2008)은 분수의 개념에 대한 확고한 이해를 위해 학생들의 다양한 비형식적 지식을 분수 개념 지도에 활용해야 한다고 하였고, 방정숙, 이지영(2009)은 분수의 지필 알고리즘보다 개념, 계산, 절차를 중시해야 한다고 주장했다. 하지만 대부분의 학생들은 진분수로 곱하면 계산 결과가 곱해지는 두 분수보다 더 작아진다가나 진분수로 나누면 계산결과가 피제수보다 더 커진다는 등의 연산의 기본적인 사실에 대해 이해하지 못하며, 의미를 도외시한 채 기호를 다룰 수밖에 없다. 개념을 적절히 적용하기도 하지만 경우에 따라서는 그 규칙을 사용할 수 없는 상황에 적용하기도 하며, 그 규칙을 사용하는 타당성에 대해 거의 고려하지 않고 이를 입증하지도 못한다. 간단한 문제를 잘 하지 못하는 것은 연산이 어떻게 작용하는지 이해하지 못하기 때문이며, 또한 기본적인 연산에 대한 개념적인 기초가 부족하기 때문이다.

NCTM(1991)의 Professional Standards for Teaching Mathematics는 수학의 내용과 강조점에 대한 변화를 요약하면서, 연산 영역에서는 특히 연산의 의미와 연산 감각 등을 강조한다. 그리고 복잡한 지필계산이나 이해에 기초하지 않은 절차의 암기 등을 지양하고 있다. 의미를 모르면서 절차를 반복하는 것은 이해라고 할 수 없고, 초등 수학에서 이해는 수학의 추상화 및 일반화를 실생활의 경험과 관련지으며 이를 직접 구성하고 사용하는 적극적 활동을 통해 이루어져야 한다. 단지 알고리즘에 따라 기호를 다루기만 한다고 분수 연산을 할 수 있다고 보기는 어렵다. 보다 효과적으로 연산을 가르치기 위해서는 개념 개발을 위해 충분한 시간을 가지고, 조작물을 통해 의미 이해를 도모하고 기술을 효과적으로 활용해야 한다. 기술은 간단하고 규칙적·체계적이며 이해를 바탕으로 해야 한다. 또한 관련 개념, 의미, 기본 지식이 적절히 조화를 이루어 알고리즘의 타당성을 뒷받침 해 주어야 한다. 학생들이 분수 계산을 잘 하지 못하는 것은 기초적인 분수의 개념에 대한 이해보다는 계산 규칙을 성급히 강조하기 때문이다. 분수 연산 수업은 분수의 개념, 연산의 의미를 더 잘 이해하도록 하는데 중점을 두어야 한다.

## 2. 소수의 지도

소수 교육의 문제점을 Hiebert와 Behr는 다음과 같이 분석한다. 초등학교에서는 0과 자연수, 분수와 소수가 분리되어서 다루어지고 있다. 또한 이와 같은 개념들을 각각 전혀 다른 문제 상황으로 가르치고 있고 다른 규칙과 다른 기호체계로 가르치고 있어 거의 모든 학생이 세 종류의 체계를 연결하는 개념 고리를 형성하지 못하고 있다. 또한 분수와 소수를 다루는 학생의 능력이 떨어지는 이유는 개념을 거의 알지 못한 채로 여러 가지 기호 조작법을 기억하도록 강요받는데 있다. 그래서 절차적 기능이 개념적 능력을 제압하여 현실세계에 0과 자연수, 분수, 소수를 의미 있게 적용하지 못하게 된다(김재화, 2006 재인용).

강력한 지식은 연결이 잘된 지식이므로 소수 개념의 이해를 증대시키기 위해서는 이미 학생이 이해한 다른 관련된 지식과의 연결성이 관건이다. 소수의 이해력 증진을 위해서 소수는 자릿값이나 분수와 연결되어야 하며 절차와 알고리즘은 기호와 개념 및 원리에 연결되어야 한다. 그리고 개념이나 연산을 실생활과 연결지어야 하며, 학생은 계산 결과를 실생활에서 일어나는 문제에 대응시켜서 검증할 수 있어야 한다(Hiebert & Carpenter, 1992).

Hiebert(1992)는 이 세 가지 입장을 각각 표기 체계의 지식, 기호 규칙의 지식, 양의 지식이라 명명하고 0과 자연수, 분수, 소수 개념 사이에 연결이 이루어져야 한다고 하면서 표기의 지식, 조작 규칙의 지식, 양의 지식의 세 가지 체계를 비교하고 있다. 표기 체계에 있어서는 0과 자연수와 소수는 거의 동일하고 분수와 소수는 표기법에서 거의 유사성이 없어서 형태의 결정적인 차이 때문에 동일시 될 수 있는 유사성이 숨겨져 있게 된다. 0과 자연수, 분수, 소수간의 표면적인 유사점과 상이점, 내면적인 유사점과 상이점을 구체적으로 밝혀서 분수의 관점에서 본 소수의 표기체계를 <표 1>, <표 2>와 같이 분석하였다.

소수 체계는 분수와 유사한 양을 표현하기 위해서 0과 자연수와 유사한 표기체계를 사용한다. 결국 소수의 이해를 위해서는 실제로는 분수량을 나타내면서 0과 자연수와 같이 보이는 기호 사이의 연결이 반드시 이루어져야 한다. 그러나 전통적인 교실 수업에서는 오히려 분수와 소수의 차이점을 부각시키려 한다는데 문제점이 있다.

<표 1> 세 수 체계의 표기체계 비교

0과 자연수	분수	소수	분수관점에서 본 소수
1. 수의 형태: abc	1. 수의 형태: $\frac{a}{b}$	1. 수의 형태: abc	1. 수의 형태: abc
2. 자릿값은 10을 밑으로 단위 위치는 오른쪽 마지막 자리	2. 분모는 단위의 등분개수이고 단위는 암묵적이다.	2. 자릿값은 10을 밑으로 단위 위치는 소수점 바로 왼쪽	2. 소수점 오른쪽 자리는 단위가 등분된 개수에 대응된 값 0.1 등
3. 각수의 값은 자릿수와 자릿값의 곱	3. 분자는 등분된 부분의 개수	3. 각수의 값은 자릿수와 자릿값의 곱	3. 소수점 오른쪽 수는 등분된 소단위의 갯수
4. 수의 값은 각수의 값의 합		4. 수의 값은 각수의 값의 합	4. 수의 값은 각수의 값의 합

&lt;표 2&gt; 세수 체계의 기호 조작 비교

0과 자연수	같은 자릿값의 수끼리 덧셈, 뺄셈하고 이때 필요하면 받아 올림과 받아 내림을 한다.	가장 큰 자릿값의 수부터 차례로 비교하면서 가장 큰 수에서 가장 작은 수까지 순서를 준다.
분수	통분하여 덧셈과 뺄셈을 한다. 즉 동치인 분수를 만들어 수를 묶는다.	동치 분수를 찾아 통분한 뒤 분자를 0과 자연수처럼 비교하여 가장 큰 수에서 가장 작은 수까지 순서를 준다.
소수	공통분모를 찾아서 수의 덧셈, 뺄셈을 한다. 동치 분수로 대치하여 분자를 묶고 분모는 밝히지 않는다.	가장 큰 자릿값의 수부터 차례로 비교하면서 가장 큰 수에서 가장 작은 수까지 순서를 준다.
분수관점에서 본 소수	공통분모를 찾아서 수의 덧셈, 뺄셈을 한다. 동치분수로 대치하여 분자를 묶고 분모는 밝히지 않는다.	공통분모를 찾고 수를 비교하여 가장 큰 수부터 가장 작은 수까지 순서를 정한다. 분모는 밝히지 않는다.

### Ⅲ. 연구 방법 및 절차

#### 1. 연구대상

본 연구는 서부경남에 위치하고 있는 S군의 S초등학교 6학년 25명의 학생을 대상으로 진단평가 및 관찰을 실시하여 수학적 계산이 아예 불가능한 학생과 단순 실수로 인해 문제를 틀리는 학생들을 제외하고, 혼합계산을 함에 있어 계산 순서상의 오류나 과정상의 오류를 자주 보이는 4명의 학생을 연구대상으로 하였다. 연구대상 학생 4명의 특성은 면담을 통해 아래와 같이 분석되었다.

4명의 학생들의 부모들은 모두 맞벌이를 하고 있어 학생들의 학업성취도에 대해 정확하게 인지하지 못하는 것으로 판단되었다. 하지만 학생들에게 공부를 열심히 해야 한다는 말을 평소에 자주 하는 편이라고 학생들은 생각하고 있었던 것으로 보아 학생들의 부모들이 열심히 공부해야 한다는 말에 어느 정도는 부담을 느끼고 있었던 것으로 분석된다. 연구대상으로 선정된 네 명의 학생들은 스스로 공부하는 시간이 부족하였고, 특히 수학의 경우 학교나 학원에서 배우기만 할 뿐 복습은 거의 하지 않는다는 것을 면담 과정에서 알게 되었다. 학생 A는 남학생이고 학생 B, C, D는 여학생이다.

#### 2. 연구기간

본 연구를 수행하는 연구 기간은 2008년 9월부터 2009년 12월까지 16개월이며, 2009년 9월부터 11월까지 연구를 실행하였다.

### 3. 프로그램의 개발을 위한 진단평가

#### 가. 자연수의 혼합계산 프로그램 적용

분수와 소수의 혼합계산 프로그램 적용에 앞서 간단한 자연수의 혼합계산에서 발생하는 오류를 줄이고자 정기근(2007)이 개발한 자연수 혼합계산 프로그램을 먼저 적용하였다. 9월 한 달 동안 아침시간 20분을 활용하여 총 27차시의 프로그램을 적용하였으며, 학생들은 자연수의 혼합계산 문제를 비교적 능숙하게 해결하였다.

#### 나. 진단평가지 개발

연구대상을 선발하기 위해 진단평가를 실시하였으며, 진단평가지는 평소 6학년 학생들을 지도하면서 관찰한 결과와 초등학교 수학 교과서의 위계를 분석하여 50개의 문항을 추출하였다. 추출된 50개 문항을 연구대상이 소속되어 있지 않은 다른 반에서 9월 8일(화) 2교시에 40분 동안 풀게 하였다. 투입한 후 확인해 본 결과 문항이 너무 많아 대다수의 학생이 문제를 다 풀지 못하는 경향을 보였다. 이 문제를 해결하기 위해 연구자는 내용을 소수의 덧셈과 뺄셈, 소수의 곱셈, 소수의 나눗셈, 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈, 분수의 나눗셈, 분수와 소수의 혼합계산 순서 문제라는 7가지 영역으로 총화시킨 다음 각 영역에 적합한 20개의 문항을 추출하여 교과 전문가의 자문을 거쳤으며, 별다른 문제점이 발견되지 않아 최종 진단평가지로 선정하였다.

#### 다. 진단평가 실시

진단평가는 자연수 혼합계산 프로그램을 적용한 직후인 2009년 10월 8일(목) 6학년 한 학급의 25명을 대상으로 1교시 40분 동안 실시하였다. 진단평가를 실시하는 동안 평가지를 받자마자 문제를 열심히 푸는 학생, 평가지를 보고 한숨부터 내쉬는 학생, 문제를 푸는 과정에서 꼼꼼하게 기록하는 학생, 머릿속으로 간단히 암산하는 학생, 풀기 싫어 과정을 생략하는 학생 등의 반응을 관찰할 수 있었다. 이 진단평가를 통해 4명의 학생을 연구대상으로 선발하였으며 평가 결과 및 선행연구에 대한 조사를 통해 학생의 오류 유형에 대한 구체적 자료를 수집할 수 있었다.

#### 라. 진단평가 결과 분석

진단 평가 결과 7가지 각 영역에서 보이는 학생들의 오류 유형을 정리하면 다음과 같다.

<표 3> 영역별 오류 유형

영역	오류 유형
소수의 덧셈과 뺄셈	• 소수를 자연수로 인식하며 소수점 자릿수를 맞추지 못하는 오류
	• 덧셈과 뺄셈 연산의 의미를 모르는 오류
소수의 곱셈	• 자연수의 곱셈을 정확히 하지 못하는 오류
	• 소수점의 의미를 정확히 알지 못하는 오류
소수의 나눗셈	• 몫의 소수점을 정확히 알지 못하는 오류
	• 나머지의 소수점 위치를 잘 모르는 오류

분수의 덧셈과 뺄셈	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 분수의 통분 개념과 원리를 모르는 오류</li> <li>• 분수 계산의 표준 알고리즘을 정확히 이해하지 못하는 오류</li> </ul>
분수의 곱셈	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 분수의 덧셈과 곱셈의 알고리즘의 차이를 이해하지 못하는 오류</li> </ul>
분수의 나눗셈	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 계산 과정이 틀리는 오류</li> </ul>
분수와 소수의 혼합 계산	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 괄호가 포함된 사칙연산의 순서를 임의로 계산하는 오류</li> </ul>

4. 피드백 프로그램 개발

가. 개발 방향

진단평가 결과를 바탕으로 연구대상들의 분수와 소수의 혼합계산 오류 유형에 맞추어 학습을 도와줄 수 있는 피드백 프로그램을 개발하였다.

피드백 프로그램은 연구자가 총화시킨 7개 영역을 9차시 과정으로 제작하였다. 피드백 프로그램은 교과서와 지도서, 분수와 소수의 연산에 관련된 선행연구(금문수, 2007; 김정미, 2007; 신현미, 2005; 이순정, 2008; 이옥선, 2006; 최진숙, 2005; 심소영, 배종수, 2004)를 참고하여 각 주제에 맞추어 스스로의 힘으로 문제를 풀 수 있도록 제작하는 데 중점을 두었다. 선행연구를 분석한 결과 분수와 소수의 연산에 있어 학생들은 분수의 통분, 소수의 자릿수 등 이전 단계에서 배웠던 연산과 관련된 정보를 적절히 사용하지 못하기 때문에 문제해결에 실패하는 것임을 알 수 있었다. 따라서 연구자는 이러한 점을 충분히 고려하여 학생을 지도하는 데 주력하였고, 피드백 프로그램의 구성에 있어서는 학생의 수준을 고려하여 기초적인 문제를 풀 수 있도록 쉬운 문제를 제시하고, 풀이 과정을 설명하였으며, 문제에 포함된 개념을 알고, 심화된 문제를 풀 수 있도록 제작하였다.

나. 피드백 프로그램의 예시

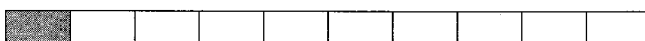
피드백 프로그램에 대한 한 차시의 예는 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 피드백 프로그램의 예시

<소수의 덧셈과 뺄셈>	
<p>(문제 1) <math>0.8 + 0.3 =</math></p> <p>0.8 → 0.1이 8  <math>+ 0.3</math> → 0.1이 3                      0.1이 11                      따라서 결과는 1.1</p>	<p>{개념 1} 소수의 합을 구하는 방법</p> <p>① 소수점의 자리를 맞추어 세로로 씁니다.                      ② 자연수의 덧셈과 같은 방법으로 계산합니다.                      ⇒ 오른쪽부터 차례로 같은 자리 숫자끼리 더하고, 계산한 값이 10이거나 10보다 크면 바로 윗자리로 받아올림 합니다.                      ③ 소수점을 그대로 내려찍습니다.</p>

{개념 2}

전체를 10으로 나눈 한 칸은 전체의  $\frac{1}{10}$  입니다.



분수  $\frac{1}{10}$ 을 소수로 0.1이라 쓰고, 영점 일이라고 읽습니다.

(문제 2) 다음 문제를 풀어봅시다.

$$0.25 + 0.31 =$$

★ 힌트!

가로셈은 세로셈으로  
고쳐서 계산해요.

{개념 3}

전체를 100으로 나눈 한 칸은 전체의  $\frac{1}{100}$ 입니다.

분수  $\frac{1}{100}$ 을 소수로 0.01이라 쓰고, 영점 영일 이라고 읽습니다.

따라서, 0.25는 0.01이 25개가 모인 것이라는 것을 기억하세요!

⇒ 소수의 덧셈과 뺄셈은 자연수의 덧셈과 뺄셈과 같은 원리예요!

#### 다. 피드백 프로그램의 내용

한 차시 프로그램은 쉬운 문제, 개념, 도움말, 심화문제가 반복되는 형식의 2장 분량으로 제작하였다. 프로그램 순서는 학생들이 오류를 상대적으로 덜 범하는 소수의 덧셈과 뺄셈을 먼저 적용하였다. 소수의 곱셈과 나눗셈의 경우 학생들이 오류를 많이 범하며 분수의 사칙연산과 같이 연계하여 지도하는 것이 오류를 줄여주는 효과가 크다고 예상하여 분수의 사칙연산 프로그램을 적용 후 프로그램을 투입하였다. 피드백 프로그램의 내용은 <표 5>와 같다.

<표 5> 피드백 프로그램 내용

프로그램 번호	영역	내용	차시	분량
1	소수의 덧셈과 뺄셈	· 소수의 의미, 소수점 자리 찍는 방법, 소수점 자리 아래 0 생각하기	1	2매
2	분수의 덧셈과 뺄셈	· 공통분모 만들기, 최소공배수 구하는 방법, 통분하는 것의 의미	2	4매
3	분수의 곱셈	· 약분하기, 곱셈하는 방법 알기	1	2매
4	분수의 나눗셈	· 나눗셈을 곱셈으로 고쳐 계산하는 방법	1	2매
5	소수의 곱셈	· 소수의 곱셈을 분수로 생각하기, 곱셈의 소수점 위치 찍는 방법	1	2매
6	소수의 나눗셈	· 소수 자릿수 맞추는 법, · 소수점 이동하는 방법	1	2매
7	혼합계산	· ( ), 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 순서에 맞추어 계산하기	2	4매

피드백 프로그램은 주요 학습 요소를 선정하여 구성하였다. 소수의 덧셈과 뺄셈 영역을 예로 들어 <표 5>를 살펴보면 소수의 의미, 소수점 자리 찍는 방법, 소수점 자리 아래 0 생각하기를 주된 내용으로 프로그램을 구성하였음을 알 수 있다.

#### 라. 프로그램 적용방법

피드백 프로그램은 10월 12일부터 10월 30일까지 3주 동안 매주 화요일부터 금요일까지 1주당 3차시의 프로그램을 적용하였다. 아침시간과 방과후 시간을 활용하여 4명의 학생들을 오전과 오후 시간에 각각 20분, 40분을 단위로 한 차시 프로그램을 학습하였다.

학생들의 수준을 고려하여 쉬운 문제를 풀 때에는 '개념' 과 '도움말'을 보지 않고 풀 수 있도록 하기 위해서, 종이를 이용하여 가린 후 문제를 풀게 하였다. '개념'과 '도움말'을 가리고도 문제를 해결하지 못하는 경우에는 '개념'과 '도움말'을 볼 수 있도록 하였다. 문제를 해결한 학생들은 조금 더 응용된 문제를 풀도록 하였으며, 응용된 문제에서도 마찬가지로 종이를 이용하여 '개념'과 '도움말'을 보지 않고 문제를 해결하려고 노력하게 하고, 그래도 해결이 되지 않는 경우에만 '개념'과 '도움말'을 참고하도록 하였다. 이 과정에서 학생들의 학습활동 중 '개념'과 '도움말'을 통해서도 학습 내용을 이해하지 못하는 경우는 보충 설명을 해 주는 방법으로 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

### IV. 연구 결과

#### 1. 소수의 덧셈과 뺄셈 영역

소수의 덧셈과 뺄셈 문제를 해결하기 위해서는 자연수의 덧셈, 뺄셈을 정확하게 할 수 있어야 하고, 소수의 자릿수를 정확히 맞추어 계산할 줄 알아야 한다. 오류를 보이는 학생들은 자연수의 덧셈과 뺄셈 계산이 미숙하였으며, 소수의 자릿수를 맞추는 것 또한 어려워 하였다.

#### 가. 오류 진단

학생 A의 경우,  $8.2 - 1.43$ 을 계산할 때 소수점을 생각하지 않고 82와 143과 같이 자연수로 인식하고 문제를 해결하고자 했으나 해결하지 못하자 당황하는 모습을 보였다. 학생 B의 경우엔  $8.62 + 15.493$ 을 계산할 때 더하기와 빼기 두 가지 방법의 연산을 모두 해 본 후, 어느 것을 선택해야 할지 잠시 고민한 후 답을 쓰는 모습을 보이는 것으로 보아 더하기와 빼기 연산의 의미를 잘 알지 못하는 것으로 추정되었다. 또한 학생 A와 마찬가지로 소수점 자릿수 맞추기를 잘 해 내지 못하였다.

#### 나. 진단에 따른 처방

오류 유형 분석을 통해 연구자는 계산시 소수의 자릿수를 정확히 맞추지 못하는 오류와 덧셈과 뺄셈 연산 의미를 이해하지 못하는 오류 두 가지를 수정할 수 있도록 피드백 자료를 제작하였다.

먼저 소수의 자릿수를 모르고 계산하는 오류를 줄이기 위해 다음과 같은 피드백 자료들을 적용하였는데 그 내용은 아래와 같다.

먼저 (문제1)  $0.8 + 0.3$ 을 제시하여 보았다. 소수의 자릿수를 자연수로 인식하여 덧셈이나 뺄셈을 하는 학생의 오류를 줄이기 위해 (문제1)에서는 다음과 같은 힌트를 주었다.



$$\begin{array}{r} 0.8 \quad \rightarrow 0.1이 8 \\ + 0.3 \quad \rightarrow 0.1이 3 \\ \hline \quad \quad \quad 0.1이 11 \end{array}$$

따라서, 결과는 1.1

그리고 그에 따른 피드백으로 {개념1}에서 소수의 합을 구하는 방법을 순서대로 제시하여 주었다. {개념1}의 내용은 다음과 같다.

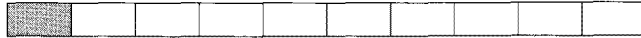
{개념1} 소수의 합을 구하는 방법

- ① 소수점의 자리를 맞추어 세로로 씁니다.
- ② 자연수의 덧셈과 같은 방법으로 계산합니다.  
⇒ 오른쪽부터 차례로 같은 자리 숫자끼리 더하고, 계산한 값이 10이거나 10보다 크면 바로 윗자리로 받아 올림 합니다.
- ③ 소수점을 그대로 내려찍습니다.

소수의 의미를 잘 알지 못해 문제를 잘 풀지 못하는 학생은 0.1과 분수  $\frac{1}{10}$ 의 의미에 대해 피드백 프로그램의 {개념2}를 보게 하여 전체를 10으로 나눈 한 칸이 전체의  $\frac{1}{10}$ 이고, 그것이 0.1과 같다는 것을 인식시켰다.

{개념2}

전체를 10으로 나눈 한 칸은 전체의  $\frac{1}{10}$ 입니다.



분수  $\frac{1}{10}$ 을 소수로 0.1이라 쓰고, 영점 일이라고 읽습니다.

그 다음 소수점 아래 두 자리 수인 소수의 덧셈 (문제2)  $0.25 + 0.31$ 을 풀도록 제시하였고, {개념2}와 마찬가지로 {개념3}을 통해 0.01과  $\frac{1}{100}$ 의 의미에 대해 다시 되짚고 문제를 풀 수 있도록 유도하였다.

{개념3}

전체를 100으로 나눈 한 칸은 전체의  $\frac{1}{100}$ 입니다.

분수  $\frac{1}{100}$ 을 소수로 0.01이라 쓰고, 영점 영일이라고 읽습니다.

따라서, 0.25는 0.01이 25개가 모인 것이라는 것을 기억하세요!

⇒ 소수의 덧셈과 뺄셈은 자연수의 덧셈과 뺄셈과 같은 원리예요!

소수의 자릿수의 의미에 대해 알고 난 뒤 연구대상들에게 자릿수가 다른 덧셈 문제  $6.47 + 14.961$ 을 제시하여 보았다. 그랬더니 가로셈으로 제시된 자릿수 구분을 잘 하지 못하여, 계산 과정을 틀리는 것을 관찰할 수 있었다. 따라서 연구자는 소수점을 기준으로 세로 자리셈을 맞추어 주는 과정과 힌트를 제시하여 주었다.

$$\begin{array}{r} 6.470 \\ + 14.961 \\ \hline \end{array}$$

- ★ 소수점 아래 자릿수가 다른 경우에는 맨 끝자리 뒤에 0이 있는 것으로 생각합니다.

연구대상들은 이러한 힌트 하나만으로도 문제를 해결하기 위해 이전보다 애쓰는 모습이 보였다.

빨셈에서는 자연수 1과 소수의 관계를 {개념5}에서 다루어 받아내림이 있는 소수의 계산을 할 수 있도록 피드백 자료를 제시해 주었다. 그 내용은 다음과 같다.

{개념5}

1은 0.1이 10 입니다.

0.01이 100 입니다.

0.001이 1000입니다.

⇒ 소수 첫째 자리 숫자끼리 빨 수 없을 때는 일의 자리에서 받아 내림하여 계산합니다.

#### 다. 분석

이러한 일련의 과정을 통해 학생들은 소수점의 위치를 맞춰주고 세로셈을 쓰는 방법을 터득하는 듯했다. 하지만 여전히 8.2-1.43과 같은 소수아래 자릿수가 다른 소수의 덧셈과 빨셈 문제에서 오류를 많이 범하였다. 문제를 풀이하는 과정에서 나온 학생 C의 반응은 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 8.2 \\ -1.43 \\ \hline 6.83 \end{array}$$

이 학생의 경우 8.2의 소수 둘째 자리의 계산에서 8.2 뒤에 생략된 0을 생각하지 않고 1.43의 소수 둘째 자리인 3을 빼줄 수 없으니 1.43의 소수 둘째 자리인 3을 그대로 내려주는 오류를 범하였다. 따라서 피드백 프로그램의 (문제3)에 있는 도움말을 다시 제시하여 소수 둘째 자리에 보이지 않는 0이 있음을 알게 하였다. 그런 다음 문제를 다시 풀어보게 하고, 다른 심화된 문제를 제시하여 빨셈식을 계산하게 하였더니 자릿수가 다른 식에서 보이지 않는 0을 넣어 올바른 답을 찾아내는 과정을 자신감 있게 잘 수행하였다. 이를 통해 비슷한 유형의 문제 몇 개를 더 제시하자 문제 푸는 것에 흥미를 조금씩 보였다.

다음으로 소수의 덧셈과 빨셈의 연산 의미를 몰라 문제를 해결하지 못하는 부분에 대한 분석이다. 이 피드백 프로그램에서는 연산의 의미를 정확히 파악하지 못하는 오류를 수정하고자 소수의 차를 구하는 방법에서 소수점을 맞춘 후 '자연수의 빨셈과 같은 방법으로 계산한다'는 것을 몇 가지 문제를 예시로 들어 설명하고, 강조하였다. 하지만 이러한 노력에도 불구하고 분수와 소수의 혼합계산에서 덧셈과 빨셈의 연산을 혼동하여 사용하는 오류가 계속 발생하였다. 아주 간단한 오류이면서 쉽게 고쳐지지 않는 것으로 보아 이러한 성향을 지닌 학생들의 오류를 줄일 수 있도록 학생들의 심리나 성향을 고려한 연구가 필요할 것으로 보인다.

## 2. 분수의 덧셈과 뺄셈 영역

분수의 덧셈과 뺄셈을 성공적으로 수행하기 위해서는 분수의 통분을 정확히 할 수 있어야 하고, 분수의 덧셈과 뺄셈 계산 규칙을 정확히 적용할 수 있어야 한다. 학생들은 통분 과정에서 종종 오류를 범하였고 덧셈과 뺄셈 계산 과정에서도 종종 오류를 범하는 모습을 보였다.

### 가. 오류 진단

분수의 덧셈과 뺄셈 영역에서는 분모를 통분하는 과정에서 분모의 최소공배수를 찾는 것과, 최소공배수로 분모를 통분할 수 있으나 공통분모로 만드는 과정에서 분자를 정확히 처리하지 못하는 오류를 발견할 수 있었다.

다음과 같은 학생 D의 계산과정을 보자.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{3}{12} = \frac{9}{12}$$

학생 D는 이 계산 과정에서 6이라는 수를 썼다 지웠다 반복하는 모습을 보였으며 답을 쓰는데 많은 시간이 걸렸다. 이는 학생 D가 분수를 통분하는 과정을 정확히 알지 못해 계산하는 것을 두려워하고 답을 쓰는데 자신이 없다는 걸 나타내는 것으로 보였다.

또한 학생 B의 경우  $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$ 의 답을  $\frac{3}{9}$ 으로 계산하는 것과 같이 분수의 덧셈 뺄셈 알고리즘을 정확히 이해하지 못하는 오류도 발견할 수 있었다.

### 나. 진단에 따른 처방

분수의 통분 개념의 오류를 처방하기 위해 먼저 피드백 프로그램의 (문제1)  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$ 이라는 분모가 같은 분수의 덧셈을 제시하였다. 연구 대상자들이 문제를 잘 해결하였으나 피드백 프로그램 {개념1}을 보여주어 전체 한 등분을 다섯 등분하여 등분의 크기가 같을 때는 분자끼리만 더해준다는 개념을 다지게 하였다.

그런 다음 분모가 다른 피드백 프로그램 (문제2)인  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ 을 제시하였다. 진단평가에 앞서 나온 문제였다. 하지만 여전히 학생 D는 또 다시 문제를 잘 풀지 못하는 모습을 보였다. 학생 D의 계산과정은 다음과 같다.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

학생 D의 경우 분모를 12로 통분해야 한다는 사실은 알고 있었다. 하지만  $\frac{2}{3}$ 를  $\frac{4}{12}$ 로,  $\frac{1}{4}$ 을  $\frac{3}{12}$ 으로 통분한 것으로 보아 분모에 곱한 수가 단순히 분자에 오는 것이라고 판단한 것으로 추정되었다. 따라서 연구자는 다음과 같은 피드백 프로그램 {개념2}를 제공하였다.

{개념2}

$\frac{1}{2}$ 은 전체를 2등분 한 것 중 1등분       $\frac{2}{5}$ 는 전체를 5등분 한 것 중 2등분

기준이 달라 더할 수 없으므로      분모를 같게 만든다.

$\frac{5}{10}$        $\frac{4}{10}$

(1조각이 5조각으로)      (2조각이 4조각으로)

⇒ 분수의 분모를 같게 하는 것을 '통분한다'라고 한다.

위의 예에서는  $\frac{1}{2}$ 은 분모가 10인  $\frac{5}{10}$ 로 고쳐주었고,  $\frac{2}{5}$ 는 분모가 10인  $\frac{4}{10}$ 로 고쳐주었다. 여기에는 2와 5의 최소공배수인 10을 구하는 것이 그 핵심이다. 그럼으로 충분히 설명한 후에는 학생 D에게 분수를 통분하는 간단한 문제들을 추가로 내어주었다. 처음에는 자신 없어 하다가 문제를 몇 개 풀고 나니 자신감이 붙었는지, 문제를 해결하는 속도도 빨라지고 문제를 두려워하는 모습이 조금씩 없어지는 듯 보였다.

통분하는 방법을 알게 된 후, 다음과 같은 피드백 프로그램 {개념3}의 최소공배수를 구하는 알고리즘을 제시해 주었다.

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 10, 15} \\ \underline{2 \quad 3} \\ \rightarrow 5 \times 2 \times 3 = 30 \end{array}$$

이러한 알고리즘을 제시한 후 심화된 (문제4)  $\frac{5}{8} + 3\frac{7}{12}$ 라는 문제를 풀게 하였더니, 통분하는 방법을 알고 올바른 계산을 하는 모습을 발견할 수 있었다. 그런 다음 {개념 4}를 통해 분수의 덧셈과 뺄셈을 구하는 방법을 다져주었다.

다. 분석

학생들이 문제 푸는 과정을 살펴본 결과 분수의 통분 과정을 상당히 어려워 한다는 것을 알 수 있었다. 두 수의 공배수와 공약수, 최소공배수와 최대공약수의 개념에 대해 정확히 이해하지 못하고 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때에 필요한 통분과정만을 학습한 학생들은 분수의 통분 과정에 있어 익숙하지 못한 모습을 보였다. 그 모습은 학습 결손이 누적된 것에 요인이 있다고 판단되었고, 따라서 분수의 지도에서 필요하다고 생각되는 경우에는 분수의 통분부터 중점을 두고 지도해야 할 필요성이 있다고 생각된다.

3. 분수의 곱셈 영역

분수의 곱셈에서는 분수의 덧셈과 뺄셈에 비해 통분과정이 크게 중요하지 않기 때문에 비교적 학생들이 이해하기 쉬울 것이라고 판단되었다. 하지만 실제 오류 유형을 분석한 결과 대분수를 가분수로 고치는 과정에서 종종 오류가 발생되었고, 나눗셈을 역수의 곱셈으로 고치는 과정에서도 오류가 발생되었다. 또한 분수의 곱셈과 나눗셈 문제를 제시했는데

도 분수의 덧셈과 뺄셈의 방법으로 문제를 해결하는 오류도 관찰할 수 있었다.

가. 오류 진단

$1\frac{2}{5} \times 1\frac{2}{3}$ 의 계산에서  $1\frac{2}{5}$ 와  $1\frac{2}{3}$ 를 각각  $\frac{21}{15}$ 과  $\frac{25}{15}$ 로 분모가 15인 분수로 정확하게 통분을 하더라도 곱셈을 하는 과정에서  $\frac{21}{15} \times \frac{25}{15}$ 을  $\frac{525}{15}$ 로 계산하는 학생을 발견하였는데, 이는 분모는 그대로 두고 분자끼리 곱하여 계산한 것이다. 분수의 곱셈과 덧셈의 방법을 혼동한 것으로 생각된다.

다음 [그림 1]의 내용을 보자. 이것은 세 수의 곱셈 계산 과정에서 등호의 의미와 계산의 편리성 사이에서 일어날 수 있는 한 오류를 보여준다.

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \times 2\frac{1}{5} \times 3 &= \frac{5}{6} \times \frac{11}{5} \\ &= \frac{11}{6} \times 3 \\ &= \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2} \end{aligned}$$

[그림 1] 분수의 곱셈 영역에서 나타난 학생 A의 계산

나. 진단에 따른 처방

곱셈을 덧셈계산 방법과 혼동하는 오류를 바로잡기 위해 (문제1)  $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10}$ 을 제시하였으나 덧셈의 방법과 여전히 혼동을 일으켰다. 따라서  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 의 계산인 간단한 상황을 연구자가 아래와 같이 임의로 제시하고 그림으로 설명하여 분수의 곱셈 계산과정을 도울 수 있도록 하였다.

간단한 문제를 제시한 다음 머릿속으로 생각을 해 보도록 하였다. 그런 다음 전체 밭의  $\frac{1}{2}$ 에 농사를 지으려고 하고, 농사를 짓고자 하는 땅의  $\frac{1}{3}$ 만큼에 배추를 심고자 한다는 것을 그림으로 설명하고  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ 의 계산 과정을 설명하였다. 이 과정에서 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하는 분수의 곱셈 계산 알고리즘도 확인하였다.

이러한 알고리즘을 이해시키고 난 뒤, {개념1}과 {개념2}를 통해 분수의 곱셈 계산 방법에서 기억해야 할 방법들을 기억하도록 유도하였다. {개념1}에서는 분수의 곱셈 계산 알고리즘에 관해서 설명하였고, {개념2}에서는  $\frac{24}{30}$ 를 기약분수로 나타내는 과정을 24와 30의 최대공약수를 구하고, 최대공약수로 나누는 과정을 통해 약분하는 방법을 설명하였다.

등호의 의미를 정확히 이해하지 못하는 학생에 대해서는 다음과 같이 피드백을 제공하였다. 연구자는 등호가 좌변과 우변이 같다는 것을 나타낸다는 것을 다양한 예를 들어 설명하였다. 또한 풀이 과정에서 오류를 일으킬 것을 대비하여 곱셈 영역의 학습이 끝나고 난 후 풀이 과정에서 등호를 사용하는 방법에 대해 여러 차례 반복 지도했다. 그 후에는

같은 수를 반복해 쓰는 부담 때문에 계산과정을 다 쓰지 않아 문제를 잘못 푸는 경우가 줄어들었다.

#### 다. 분석

분수의 곱셈의 경우에는 분수의 덧셈과 뺄셈보다 오류가 적은 것을 확인할 수 있었다. 하지만 학생들이 분수의 곱셈하는 방법의 기본적인 방법을 정확히 숙지하는 것이 필요하다고 생각되었다. 연산의 의미를 이해하는 것 못지않게 연산을 하는 방법을 깨닫게 해 줄 수 있도록 충분한 연습을 시키는 것도 필요하다고 생각되었다.

#### 4. 분수의 나눗셈 영역

자연수끼리의 나눗셈 계산에서  $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$ 과 같은 분수의 나눗셈으로 발전하는 것은 그리 쉬운 일은 아니다. 자연수의 나눗셈에서는 나눗셈 계산 후에 몫이 작아지지만 분수의 나눗셈에서는 몫이 커지는 경우가 생기기 때문에 학생들이 이해하기가 쉽지가 않다. 그래서 분수의 나눗셈 부분은 이해하기도, 이해시키기도 힘든 부분이다.

#### 가. 오류 진단

분수의 나눗셈 영역에서 학생들은 나눗셈을 역수인 분수로 곱하여 계산하는 것을 잘 이해하지 못했고 분수의 곱셈으로 고친 후에도 사소한 계산오류가 종종 발생하였다. 또한, 분수의 나눗셈을 곱셈이라고 생각하여, 분모는 분모끼리 분자를 분자끼리 곱해 버림으로서 문제를 잘못 푸는 경우의 오류가 발생하였다.

#### 나. 진단에 따른 처방

나눗셈  $\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$ 을  $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5}$ 으로 계산 했다고 해서 나눗셈의 의미를 모른다고 이야기 하기는 어렵다. 나눗셈은 여러 가지 계산 방법이 있을 수 있는데 학습능력이 떨어지는 학생일 경우 해결방법의 단순화가 필요하다고 보고 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 통해 오류를 줄이고 정확하고 바른 계산을 하게 지도했다. 그 과정의 예는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{2}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{21} \quad (3 \div 4 = \frac{3}{4} \text{과 같은 몫의 의미}) \\ & \cdot \frac{2}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{5}{3}}{\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2}{7} \times \frac{5}{3}}{1} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

이러한 과정을 잘 이해하지 못하는 경우, 피드백 프로그램 {개념1}의 1÷4의 나눗셈을 그림으로 제시하여 분수  $\frac{1}{4}$ 과 의미가 같다는 것을 나타낸 다음  $1 \times \frac{1}{4}$  의미가 같다는 것을 알게 한 후 나눗셈을 곱하기와 역수의 의미로 나타내는 방법을 제시하여 주었다. 다음으로,

분수의 나눗셈 (문제2)  $\frac{5}{4} \div \frac{11}{8}$  과 {개념2}를 통해 나눗셈 기호를 곱하기로 고친 다음, 나누는 수의 분모 분자를 역수로 바꾸어 주는 방법을 인지하고 문제를 풀 수 있도록 하였다.

또한 (문제3)에서 대분수의 나눗셈 문제를 제시하였는데, 학생 C의 경우 대분수의 나눗셈의 경우, 나누는 수를 역수로 고칠 때 대분수를 가분수로 고쳐 역수를 취하지 않고 자연수를 그대로 두고 진분수만 역수를 취하는 모습을 발견할 수 있었다. 따라서 피드백 자료 {개념3}을 제시하여 대분수를 가분수로 고치는 방법을 연구자가 추가로 제시한 다음 분수의 나눗셈을 곱셈으로 고치는 과정에서 역수를 취하지 않아 잘못 계산된 예를 제시하여 알고리즘의 정확한 습득을 강조하였다. {개념3}의 잘못된 예시는 다음과 같다.

{개념 3} <잘못된 예시>

$$2\frac{2}{3} \div 1\frac{5}{6} \Rightarrow 2\frac{2}{3} \times 1\frac{6}{5}$$

이러한 알고리즘을 학습하고 난 이후에는 분수의 나눗셈 계산도 분수의 곱셈 계산처럼 별 오류 없이 풀어내는 모습을 볼 수 있었다.

#### 다. 분석

분수의 나눗셈은 그 의미를 이해하기가 쉽지 않다. 따라서 학습과정을 단순화 시키고 분수의 곱셈처럼 알고리즘을 익히는 과정이 필요하였다. 해결방법의 단순화와 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 통해 학생들은 오류를 줄이고 정확하고 바른 계산을 하게 되었다. 추가로 새로운 문제를 내어주었을 때 문제를 풀려고 자세를 고쳐 앉는 모습을 관찰하면서 이러한 과정이 단순한 알고리즘만 익히는 것이 아니라 학생들에게 문제에 대한 자신감 또한 생기게 하는 것임을 알 수 있었다.

### 5. 소수의 곱셈 영역

소수의 곱셈을 성공적으로 수행하기 위해서 전제되어야 하는 것은 곱셈을 정확하게 하는 것이다. 그와 더불어 계산 결과에 소수점을 잘못 찍는 오류를 바르게 교정하게 한다면 소수의 곱셈 연산을 충분히 잘 수행할 수 있을 것이다.

#### 가. 오류 진단

[그림 2]에서 보듯이 이 학생은  $7.6 \times 2.3$ 을 정확히 계산하지 못했다. 그 이유는  $76 \times 23$ 이 1748이 되는 계산을 정확하게 해 내지 못한 데에 있다. 이 학생은  $76 \times 23$ 에서 76과 23의 일의 자리와의 곱인  $76 \times 3$ 을 228로, 76과 23의 십의 자리와의 곱인  $76 \times 20$ 을 1520으로 정확하게 계산했다. 그러나 228과 1520과의 합을 구하지 않고 답을 제시하였다.

[그림 2] 소수의 곱셈 영역에서 발생하는 오류 유형

또 다른 소수의 곱셈 영역에서 발생하는 오류 유형을 살펴보면 곱셈에서 소수점 자리를 잘못 찍는 경우이다. 학생 C의 경우를 예를 들어  $6.2 \times 0.7 \times 0.5$ 를 계산하는 과정은 다음과 같다.

$$6.2 \times 0.7 \times 0.5 = 43.4 \times 0.5 = 21.7$$

학생 C는 소수점 부분을 제외한  $62 \times 7 \times 5$ 가 2170이 나온다는 계산은 정확했으나  $6.2 \times 0.7$ 을 계산하는 과정에서 4.34를 43.4로 잘못 계산하였고, 그 후  $43.4 \times 0.5$ 를 계산하여 21.7의 오답을 구하게 되었다. 이 학생의 경우 오답을 구해내기는 했으나  $43.4 \times 0.5$ 에서 소수점 두 자리를 앞으로 옮겨서 찍어주어야 한다는 사실에 대해 확신을 갖고 있지 않았던 것으로 보아 소수점의 의미를 정확히 알고 소수점을 옮기는 과정에 대한 이해가 필요한 것으로 보였다.

#### 나. 진단에 따른 처방

이와 같은 오류를 수정하기 위해 피드백 프로그램 (문제1)로 소수점이 한 자리인 소수와 자연수의 곱셈인  $1.6 \times 3$ 이라는 문제를 제시하였다. 소수의 자릿수를 잘 맞추기 위해 {개념1}에서 소수의 곱셈을 세로셈으로 계산하는 방법을 먼저 제시하였고, 소수의 자릿수를 잘 찍지 못하는 경우 {개념2}에서 소수 한자리의 수는 분모가 10인 분수( $0.1 = \frac{1}{10}$ )로 고칠 수 있으므로 소수 1.6을 분수  $\frac{16}{10}$ 로 바꾸어 계산하면  $\frac{48}{10}$ 이 4.8이 되어지는 과정을 통해 소수점 자릿수가 계산 전과 계산 후가 어떻게 바뀌어 찍히는지를 알 수 있게 하였다.

그런 다음 (문제2)에서  $0.6 \times 0.4$ 의 소수 첫째자리 수끼리의 곱셈 문제를 풀게 하였다. 그런데 소수 한자리 수끼리의 곱셈 계산에서 여전히 소수점의 위치를 2.4로 계산하여 푸는 학생을 발견하고 소수의 곱셈을 바르게 계산할 수 있는 도움 자료로 피드백 프로그램을 제시하였다.

피드백 프로그램을 통해 소수점을 찍는 방법을 알고 난 후, 소수의 곱셈 계산을 연습할 수 있도록 심화된 (문제3)을 제시하였다. 심화된 (문제3)을 푸는 과정에서 3명의 학생은 심화 문제를 이해하고 소수의 자릿수에 맞추어 답을 정확하게 푸는 모습을 보였으나, 학생 B의 경우는 문제의 수가 커지고 복잡해지자, 푸는 과정을 쉽게 포기해 버렸다. 문제 푸는 과정을 처음부터 끝까지 꼭 지켜 본 결과 심화된 문제와 같이 길고 어려운 문제를 대할 때 이 학생에게서 문제를 대충 읽고 문제가 잘 풀리지 않을 경우 그냥 포기해 버리는 모습을 발견할 수 있었다.

(문제3)을 틀리지 않고 잘 푸는 것을 확인한 후, {개념4}, {개념5}를 통해 0.25에 10, 100, 1000을 곱했을 때 자릿수가 변하는 것, 250에 소수 0.1, 0.01, 0.001을 곱하는 것을 통해 자릿수의 변화를 관찰하여 알고 계산할 수 있도록 하였다.

#### 다. 분석

자릿수 변화에 따른 곱셈 결과값이 변한다는 사실을 인식한 학생들은 소수 자릿수에 대한 개념을 좀 더 정확하게 알고 소수점 위치를 신중하게 생각하는 모습을 보였으며, 소수 곱셈 계산을 좀 더 정확하게 하였다. 소수점 자릿수 개념을 먼저 선행하는 것이 좋을 것 같았다.

또한 심화된 (문제3)을 푸는 과정에서 학생 B의 경우 문제의 수가 커지고 복잡해지자,



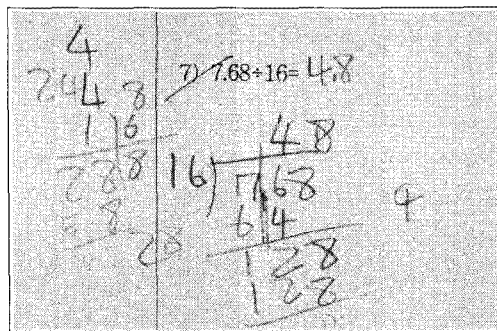
푸는 과정을 쉽게 포기해 버렸다고 하였는데, 복잡한 혼합계산을 잘 풀지 못하는 이유 중 하나가 여기에 있다고 생각된다. 연구를 통해 개선시키고자 하였으나, 이와 같은 행동은 단지 이 피드백 프로그램뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 장기간의 처방이 동시에 이루어져야 할 것으로 생각된다.

### 6. 소수의 나눗셈 영역

소수의 나눗셈 영역은 4명의 학생 모두 가장 어려움을 크게 느꼈던 영역이었다. 학생들은 몫의 소수점 위치 맞추기에 능숙하지 못하였고, 나머지가 있는 나눗셈의 나머지 소수점 처리를 어려워하였다.

#### 가. 오류 진단

몫의 소수점을 잘못 찍는 오류는 [그림 3]의 예와 같다.  $7.68 \div 16$ 의 몫을 구함에 있어 자연수 나눗셈  $768 \div 16$ 은 정확하게 수행하였으나 몫의 자릿수를 나타낼 때 0.48이 아닌 4.8로 표현한 것이다.



[그림 3] 소수의 나눗셈 영역에서 발생하는 오류 유형

또 다른 오류는 나머지가 있는 소수의 나눗셈을 계산할 때 몫의 소수 자릿수는 바르게 찍어주는 반면 나머지의 자릿수를 잘못 찍어주는 오류이다.  $7.72 \div 16$ 의 경우 몫은 0.48로 정확하게 계산하였으나 나머지를 0.04가 아니라 4라고 적었다.

#### 나. 진단에 따른 처방

몫에서 소수의 자릿수를 잘못 찍는 오류를 범하지 않도록 하기 위해 피드백 프로그램(문제1)에서 소수와 자연수의 나눗셈인  $9.34 \div 4$ 라는 문제를 제시하였다. 문제 푸는 과정의 이해를 돕기 위해 {개념1}에서 소수의 나눗셈을 자연수와 분모가 100인 단위 분수의 곱셈으로 고쳐 개념을 알 수 있도록 제시하였으며, 그 내용은 다음과 같다.

{개념1}

$$9.34 \div 4 = 934 \times 0.01 \div 4 \quad (0.01 \text{은 } \frac{1}{100} \text{로 나타낼 수 있으므로})$$

$$\begin{aligned}
 &= 934 \times \frac{1}{100} \div 4 \\
 &= 34 \div 4 \times \frac{1}{100} \\
 &= 234 \times \frac{1}{100} \\
 &= 234 \times 0.01 = 2.34
 \end{aligned}$$

{개념1}에서 소수÷자연수를 자연수÷자연수×소수의 계산 방법으로 학습한 후, (문제2)에서 소수와 소수의 나눗셈을 제시하였다.

소수÷자연수의 계산은 비교적 성공적으로 수행했으나 소수÷소수의 계산은 학생들이 어려움을 많이 느끼는 것을 볼 수 있었다. 따라서 이러한 어려움을 해결해 주기 위하여 피드백 프로그램 {개념2}의 내용을 제시하였다. 26.25÷7.5의 계산에서 26.25는 0.1이 262.5이고 7.5는 0.1이 75라는 것을 {개념2}에서 다루었다. 26.25÷7.5의 계산에서 26.25를 0.01이 2625이고 7.5는 0.01이 750이라고 나타낼 수 있으나 {개념1}과의 연계성 차원에서 소수÷자연수의 단위로 나타내 주었다. 또한 0.01이 2625이고 7.5는 0.01이 750이라는 것은 (문제2)을 풀이하는 과정에서 연구자가 추가로 설명하였다. 이를 통해 소수의 나눗셈 계산시 소수점 자리는 제수가 자연수가 되도록 피제수와 제수 모두 똑같이 오른쪽으로 옮겨준다는 사실을 알게 하였다. 그런 다음 심화된 (문제3)을 풀게 하여 소수의 나눗셈을 더 정확히 계산하도록 도와주었다.

나머지가 있는 소수의 나눗셈 계산을 돕기 위해 (문제4) 72.96÷9.8을 제시하였다. 나머지가 있는 소수 나눗셈의 경우 나머지의 소수 자릿수를 많이 틀리는 오류가 발생하였다. 소수의 나눗셈에서 몫과 나머지의 계산은 학생들이 많이 어려워하고 실수를 많이 하는 부분이다. 따라서 연구자는 {개념3}에서 몫과 나머지를 구하는 순서를 자세히 제시하여 소수점 찍는 방법에서 실수하지 않도록 처방하였다. 또한 몫과 나머지로 검산하는 과정을 제시하여 나머지의 자릿수를 정확하게 찍을 수 있도록 하는 과정을 강조하였다.

하나의 문제로 오류를 줄여주는 것이 부족하다고 판단하여 추가로 3개의 문제를 제시하여 풀이 과정을 잊지 않도록 해주었다.

#### 다. 분석

혼합계산에 있어 소수의 나눗셈은 분수로 고쳐서 계산하는 경우가 많다. 하지만 이 영역의 오류 진단 및 처방을 통해 학생들이 소수의 나눗셈의 몫과 나머지의 소수점 자릿수 찍는 것을 많이 어려워 한다는 것을 알 수 있었다. 본 연구자는 이것을 단순히 답을 구하는 처방 방법으로만 제시하였지만, 소수점을 정확하게 찍을 수 있도록 돕는 좀 더 구체적이고 체계적인 프로그램이 필요할 것으로 보인다.

#### 7. 분수와 소수의 혼합계산 영역

혼합계산의 순서 오류는 수 체계나 학년을 막론하고 어려워한다. 분수와 소수의 혼합계산에서는 숫자가 복잡해짐에 따라 학생들은 괄호와 사칙연산 계산 순서를 더 어려운 것처럼 느끼게 된다.

가. 오류 진단

자연수의 혼합 계산은 능숙하게 해 내는 학생 A가 분수와 소수의 혼합계산에서는 순서상의 오류를 범하는 다음과 같은 경우가 있었다.

$$\begin{aligned} & (0.8 + \frac{1}{5}) \times 3\frac{7}{10} - 1\frac{1}{5} \div 0.4 \\ & = 1 \times \frac{37}{10} = \frac{37}{10} - \frac{12}{10} = \frac{25}{10} \times \frac{10}{4} = 6\frac{1}{4} \end{aligned}$$

위의 예는 등호의 의미를 잘 알지 못하고 계산해 준다는데 오류가 있기는 하지만, 가장 큰 오류는 계산 순서를 지키지 못한데 있다.

나. 진단에 따른 처방

위와 같은 오류는 분수와 소수가 혼합되어 제시됨으로 인해 혼합계산의 순서를 혼동하여 발생하는 오류라고 판단하였다. 따라서 피드백 자료에서 혼합계산의 순서를 인지할 수 있도록 {개념1}를 제시하였다.

{개념 1} 혼합계산 계산 방법

- ① 곱셈, 나눗셈, 덧셈, 뺄셈이 섞여 있는 식에서는 곱셈, 나눗셈을 먼저 계산합니다.
- ② 곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식에서는 앞에서부터 차례로 계산합니다.
- ③ 괄호가 있으면 괄호 안부터 먼저 계산합니다.

혼합계산의 순서는 약속으로서 규칙을 습득하는 것이 중요하므로 연구자는 괄호, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 혼합된 여러 문제를 풀어보는 것이 좋을 것이라고 판단하였다. 따라서 피드백 자료에서 다양한 문제를 푸는 것을 통해 혼합 계산 순서를 혼동하지 않도록 반복 연습하도록 하였다. 또한 계산하는 과정에서 학생들 스스로가 순서상 무엇이 잘못되고 계산을 정확하게 하였는지 검증하기 위해 순서를 계획하고 검증하는 단계를 설정하도록 하였다. 각 문제에 계산 순서를 번호를 붙여 계산하도록 계획하게 하였고, 계산이 끝났을 경우 스스로가 순서 번호에 따라 계산 과정이 맞는지 확인할 수 있도록 하였다.

다. 분석

분수와 소수의 혼합계산에서 순서를 혼동하는 것은 제시되는 수가 분수와 소수, 자연수의 혼합이러는데 있었다. 혼합계산의 순서 약속을 상기시키고, 자연수 혼합계산 문제를 풀었음에도 학생들은 막상 문제를 선뜻 풀지 못하는 모습을 보였다. 자신이 가장 자신 없었던 계산을 다시 한 번 풀어보고 문제를 풀게 하여 자신감을 북돋우는 것이 중요한 단계 중 하나였다. 또한 문제를 푸는 과정을 계획, 검증하게 하는 과정이 혼합계산을 정확하게 풀 수 있는 해결방안 중 하나라고 생각되었다.

## V. 결론 및 제언

초등학교 6나 단계의 5단원 혼합계산에 대한 수업을 하다 보면, 학생들이 혼합계산 문제를 해결하는 과정에서 어떤 것을 먼저 풀어야 하는지에 대해 고민하는 것을 보게 된다. 비록 맞게 풀었다고 하더라도 다른 문제를 제시하면 또 다시 어려움을 느끼는 것을 또한 종종 보게 된다.

일반적으로 수학에서 가장 기본이 되는 것은 수와 연산이며, 그 중에서도 가장 기본은 사칙연산이라 할 수 있다. 사칙연산을 따로따로 계산을 할 때에는 학생들이 어려움을 덜 느낀다 하더라도 이와 같은 내용이 혼합계산의 형태로 제시가 되면 학생들은 어려움을 느끼기 마련이다. 특히 소수와 분수의 영역에서는 자연수의 혼합계산일 때보다 더 크게 어려움을 느끼게 된다. 그러나 이를 해결하기 위한 구체적인 지도 방안이나 처방 프로그램이 제시되어 있지 않은 것이 사실이다. 이러한 어려움을 줄일 수 있는 처방 프로그램을 만드는 것은 후속 학습을 보다 잘 하기 위한 하나의 방법이다.

본 연구에서는 분수와 소수의 혼합계산 진단평가를 통해 학생들의 오류 유형을 분석하고 이를 통해 혼합계산을 하는 데 도움이 되는 피드백 프로그램을 개발하여 이 프로그램이 학생들의 문제해결에 어떤 변화를 일으키는지 알아보려고 하였다.

본 연구의 결과물 분석을 토대로 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 분수와 소수의 혼합계산에 대한 피드백 프로그램을 통해 학생들은 혼합계산에 있어 문제해결능력 향상이 이루어졌다. 6나 단계 '분수와 소수의 혼합계산' 단원 이전의 교육과정을 분석하고 진단평가를 통해 나타난 오류 유형을 중심으로 9차시 분량의 피드백 프로그램을 만들어 학생들에게 적용하였을 때, 학생들이 문제를 해결하면서 보이는 오류의 횟수도 줄어들었으며 오류를 교정해 나가는 속도도 빨라졌다. 학생 D의 경우 분수의 덧셈과 곱셈의 계산을 혼돈하고 혼합계산을 두려워하는 모습을 보이던 것이 연구의 후반에서는 분수의 계산에 대한 오류가 줄어들고 혼합계산을 정확하게 하는 모습을 보인 것을 통해 알 수 있다.

둘째, 분수와 소수의 혼합계산에 대한 피드백 프로그램 적용을 통해 학생들이 보다 자신감 있게 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 본 연구는 우수하지 않은 학생 4명을 대상으로 하고 있다. 처음에 피드백 프로그램을 적용했을 때만 해도 문제를 보고 어떤 방법으로 풀어야 하나 혼돈스러워 문제를 해결하는 시간이 매우 길었다. 그러나 피드백 프로그램 적용을 통해 문제해결 성취도가 높아지자 문제 해결에 적극성을 띠는 모습을 보였다. 이를 통해 문제 해결에 자신감을 가지게 되었음을 알 수 있다.

한편, 본 연구에서는 수학적 문제를 해결하는 것에 관심을 가졌다. 그러나 연구 과정에서 아주 간단한 오류를 고칠 수 있도록 피드백 프로그램을 적용했는데도 불구하고 오류를 쉽게 고치지 못하는 모습을 발견할 수 있었다. 또한 일부 학생의 경우 잠시 고민을 해도 문제를 해결하지 못하자 포기하고 더 이상 문제를 해결하지 않으려는 모습도 보였다. 학생의 성향과 관계된 연구로 심소영(2004)은 학생의 성격 유형과 학업 성취도의 관계를 살펴볼 때 외부로부터의 정보를 현실적이며 자세히 관찰하고 구체적인 사실을 정확하게 이해하며 기억하는 감각형은 수와 연산에서 매우 우수한 결과를 보였다고 하였다. 따라서 차후에 실행될 연구에서는 학생들의 심리나 성향을 고려하여 연산과 관련된 프로그램을 계획하고 실행하는 시도가 필요한 것으로 보인다.

참 고 문 헌

- 교육인적자원부 (2005). 수학 4가, 4나, 5가, 5나, 6가, 6나. 서울: 교육과학기술부.
- 교육인적자원부 (2005). 수학 익힘책 4가, 4나, 5가, 5나, 6가, 6나. 서울: 교육과학기술부.
- 교육인적자원부 (2005). 초등학교 교사용 지도서 수학 4가, 4나, 5가, 5나, 6가, 6나. 서울: 교육과학기술부.
- 강완 외 (2003). 초등 수학 학습지도의 이해. 서울: 양서원.
- 금문수 (2007). 수학 교육과정 내용의 '수와 연산' 학습과제 분석. 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김옥경 (1997). 초등학교 6학년 학생들의 분수개념 이해 및 분수 수업방안에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 김재화 (2006). 소수 계산에서 나타나는 오류와 선행 지식과의 연결 관계 분석(초등학교 6학년 학생들을 대상으로). 한국교원대 교육대학원 석사학위논문.
- 김정미 (2007). 초등학생들이 분수의 나눗셈에서 보이는 반복적 오류 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김형조 (2006). 분수 개념 이해 프로그램이 초등학교 수학 학습 부진아의 분수 개념 이해에 미치는 효과. 여수대 교육대학원 석사학위논문.
- 방정숙, 이지영 (2009). 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. 한국초등수학교육학회지, 13(2), 285-304.
- 신현미 (2005). 분수 오류 유형에 대한 교수·학습 방법 분석. 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 심소영, 배종수 (2004). 초등학생의 성격 유형과 수학 영역별 학업 성취도의 관계. 한국초등수학교육학회지, 8(2), 127-146.
- 이순정 (2008). 초등학교 학생의 분수 단원에서 오류 유형 분석. 부경대 교육대학원 석사학위논문.
- 이옥선 (2006). 수학학습부진아를 위한 놀이학습자료의 개발 : 4가 단계의 '혼합 계산'과 '분수'를 중심으로. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 정기근 (2007). 자연수 혼합계산에서 처방 프로그램이 개발·적용에 대한 효과 분석. 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 최진숙 (2005). 덧셈·뺄셈의 오류유형 분석 및 지도방안에 대한 연구: 초등학교 3학년을 중심으로. 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 홍은숙, 강완 (2008). 분수 개념에 관한 초등학생의 비형식적 지식 분수 개념에 관한 초등학생의 비형식적 지식. 한국초등수학교육학회지, 12(1), 59-78.
- Amstrong, B. E. & Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of Fractions for

- 
- meaning, In J. T. Sowder & B. P. Schappelle(Eds.), *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle grades*. 85-119, New York, NY:State University of New York Press.
- Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fraction. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. S. Hatrup (Eds.), *Analyses of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouwa(ED.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 68-97). New York: Macmillan.
- National Council of Teachers Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

<Abstract>

## An Analysis of the Effectiveness of the Development and Application of a Feedback Program for Mixed Calculations Involving Fractions and Decimals

Lee, Hye Kyung<sup>5)</sup>; & Kim, Seon Yu<sup>6)</sup>; & Roh, Eun Hwan<sup>7)</sup>; & Jung, Sang Tae<sup>8)</sup>

Mixed calculations involving fractions and decimals covered in the unit 6-Na in elementary school math class cause students difficulties, leading them make lots of errors. If students fail to understand temporarily or partly what the teacher taught or lose confidence and continue to have difficulty due to a lack of understanding and skills of algorithm, though they properly understand the concept and principle of the learning content, it should be resolved through intensive teaching. For students suffering from this problem, a correct diagnosis and appropriate treatment are required.

Therefore, this study developed a feedback program after diagnosing students' errors through evaluating them in order to continuously assist them to fully understand contents regarding mixed calculations involving fractions and decimals.

Keywords: fraction number, decimal number, natural number, mixed calculation, error, feedback program

논문접수: 2010. 07. 08

논문심사: 2010. 07. 22

게재확정: 2010. 08. 04

---

5) snoopy-lhk@hanmail.net

6) sykim@cue.ac.kr

7) ehroh@cue.ac.kr; idealmath@gmail.com

8) hwarang0103@naver.com