한국초등수학교육학회지 14(2) 287-314. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 14(2) 287-314.

알고리즘의 다양성을 활용한 두 자리 수 곱셈의 지도 방안과 그에 따른 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘 이해 과정 분석

강흥규[1) ・ 심선영[2)

알고리즘을 지도하는 전통적인 방법은 우선 '표준 알고리즘'을 완성된 형태로 제시하고 이어서 간단한 사례를 통하여 이해한 다음, 보다 일반적인 문제에 적용함으로써 표준 알고리즘을 연습하는 형태이다. 그러나 이 방법은 표준 알고리즘에 지나치게 집중되어 있다는 문제점과 함께, 학생 스스로 문제에 적합한 알고리즘을 선택하거나 알고리즘 자체를 개발하는 경험을 제공하지 못한다는 제한점을 갖고 있다. 이 논문에서는 자연수 곱셈 알고리즘의 다양성을 활용하여 학생 스스로 알고리즘을 개발하고 발명할 수 있도록 지도하는 방안을 상세하게 구안하였고, 그에 따른 교수 실험을 통하여 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘에 대한 이해 과정을 분석하였다. 그 결과는 첫째, 실험적인 지도안으로 학습한 실험반은 자리값의 원리와 분배법칙의 이해에 있어서 비교반보다 높은 성취를 보였으나, 계산 능력에 있어서는 그렇지 못했다. 둘째, 비교반은 물론 실험반에서도 표준 알고리즘의 선호도가 가장 높았으며, 실험반에서는 표준 알고리즘 다음으로 격자곱셈의 선호도가 높은 것으로 나타났다. 격자 곱셈을 교육 소재로 활용하는 것을 적극 고려할 필요가 있다. 셋째, 비례표는 그것이 가지는 이론적인 장점에도 불구하고 우리나라 초등학교 3학년 학생이 배우기에는 다소 무리가 따르는 것으로 나타났다.

[주제어] 수학화, 곱셈 알고리즘, 표준 알고리즘, 격자 방법, 비례표

Ⅰ. 서 론

현대 수학교육의 일반적 추세는 기능보다는 수학적 추론이나 문제 해결, 나아가 수학적 창의성을 추구하는 방향을 취하고 있으며, 이러한 흐름은 초등 수학교육에서 기능 영역의 내용, 특히 산술 알고리즘의 지도 방식을 바꿀 것을 요구하고 있다. 다시 말하면 Skemp (1987)가 말한 훈련과 연습을 통한 도구적 이해가 아닌 수학적 사고가 개재된 창의적인 경험을 통한 지도가 필요하다.

그러나 알고리즘을 가르치는 현재의 방식은 의미의 풍부한 이해보다는 암기와 기계적인 연습이라는 전통적인 모습에 머물러 있는 것처럼 보인다. 전통적인 모습이란, 다시 말하면, 우선 표준 알고리즘을 완성된 형태로 제시하고 이어서 간단한 사례에의 적용을 통하여 이해한 다음, 보다 일반적인 문제에 적용함으로써 표준 알고리즘을 연습하는 형태이다. 이

1) 공주교육대학교 수학교육과
2) 대전 자운초등학교

방법은 '표준 알고리즘'에 지나치게 집중되어 있다는 문제점과 함께, 학생 스스로 문제에 적합한 알고리즘을 선택하거나 알고리즘 자체를 개발하는 경험을 제공하지 못한다는 제한점을 갖고 있다. 그것은 학생 스스로 문제를 해결하는데 가장 적절한 알고리즘을 선택하거나 창안하는 경험을 통한 수학적 사고를 성취하기 보다는 기계적인 절차를 통해서 답을 정확하고 빠르게 산출하는 기능에 치우쳐 있다(백선수, 2002; 석경희, 백석윤, 2004).

알고리즘 지도에 대한 이러한 일반적인 문제의식은 초등수학의 자연수 곱셈 알고리즘 영역에서 구체적으로 확인된다. 단순성과 보편성이 알고리즘의 본질적 속성임에도 불구하고, 곱셈 알고리즘에는 표준 알고리즘 이외의 다양한 형태가 있다. 수학적인 측면에서 볼 때는 모든 곱셈 알고리즘은 표준 알고리즘과 동형이므로 알고리즘의 다양성이 중요하지 않을 수 있지만, 교수학적인 측면에서는 그렇지 않다. 알고리즘마다 추상화와 형식화의 정도가 다르기 때문에, 점진적인 형식화라는 학습의 여정에 있는 학생들에게는 그들이 서로 다른 별개의 알고리즘으로 인식될 수도 있으며 하나가 다른 하나를 위한 준비가 될 수도 있을 것이다(박현미, 강완, 2006). 박혜영(2000)은 곱셈 문제 해결과정에서 학생들은 각자에게 알맞은 전략을 구사하였으며 그것이 비록 표준 알고리즘보다 세련되고 완벽하지는 못했지만 그 과정이 수학의 구조와 학습자의 구조를 의미 있게 연결시켜 주는 것이라고 주장하면서, 교과서는 이러한 다양한 방법을 다루어야할 것을 제안하였다(p.60-61). 전형옥과 이경화(2008) 또한 두 자리 수 곱셈에 대한 표준 알고리즘을 이해하는 과정에서 학생들의 비형식적 지식이 매우 중요한 역할을 하며, 비형식적 지식을 이용하여 표준 알고리즘을 발견 또는 발명하여 적절하게 적용하는 것이 중요하다고 주장하였다(p.495).

이 논문에서는 이와 같은 문제의식을 바탕으로 현재 초등 수학 교과서 3학년 2학기 곱셈 단원의 총 4차시에 해당하는 만큼의 내용에 대한 실험적인 학습·지도안을 구안하고자 한다. 새 지도안에서 학생은 교사의 안내를 따라 다양한 알고리즘을 접함으로써 알고리즘에 내재된 수학의 구조를 이해하고 발견하게 되고, 이를 통해 표준 알고리즘에 점진적으로 접근하는 방식으로 학습하게 될 것이다. 학생들은 곱셈 알고리즘의 다양성을 바탕으로 학생들 자신이 적절한 알고리즘을 선택하여 문제를 해결할 것이다. 비록 다양한 알고리즘을 다룰지라도 실험적 지도안의 종국적인 목표는 표준 알고리즘으로 설정될 것이며, 거기에 도달하는 과정에서 다양한 알고리즘을 사용함으로써 비형식적인 방법에서부터 형식적 방법으로의 연속적인 이행을 성취하고자 하였다. 이러한 의도는 Freudenthal(1973)이 말한 수학화, 즉 조직되어야만 할 현상에서 출발하여 점진적인 형식화를 통하여 추상적인 수학적 구조에 도달하는 방식과 상통한다. 이렇게 구안된 학습·지도안은 교수실험을 통하여 초등학교 3학년 학생에게 적용되었고, 그들의 곱셈 알고리즘에 대한 이해 과정을 분석하였다.

Ⅱ. 곱셈 알고리즘에 대한 교수학적 분석

알고리즘이란 일련의 문제를 해결하기 위한 정확하고 체계적인 방법이며, 수를 입력하고, 정해진 규칙을 따르며, 제한된 단계를 거치면서, 최종적인 답을 제공하는 것이다(안희진, 2006). (두 자리 수)×(두 자리 수) 알고리즘의 예를 들면 [그림 1]과 같다.

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 3 & 8 \\
\times & & 2 & 4 \\
\hline
 & & 3 & 2 \\
 & 1 & 2 & \\
 & 1 & 6 & \\
 & 6 & & \\
\hline
 & 9 & 1 & 2
\end{array}
$$

[그림 1] 곱셈 알고리즘의 예

여기에는 38과 24에 나오는 모든 숫자의 곱셈, 즉 8×4, 30×4, 8×20, 30×20이 단계적으로 모두 나타난다. 곱셈 알고리즘의 핵심 절차는 첫째, 십진 기수법의 원리에 따라 수를 분할하고, 둘째 그렇게 분할된 여러 항에 대하여 분배법칙을 적용하여 부분 곱셈을 수행하고, 셋째 여러 부분 곱셈 결과의 종합이다. 곱셈 알고리즘의 핵심은 어떤 큰 수의 곱셈이라 할지라도 위와 같이 한 자리 숫자의 여러 곱셈으로 분할해서 수행할 수 있다는 사실에 있다. 즉 아무리 큰 수의 곱셈이라도 곱셈 구구라는 기초적인 곱셈으로 환원된다. 이를 가능케 하는 첫째 원천은 십진 기수법의 원리이다.

> 모든 수학적인 발견 중에서 십진법 보다 지성의 일반적 발달에 더 기여한 것은 없다. 낡은 기수법들은 단지 산술적인 계산의 결과를 기록하는 일만 담당했는데 반해, 힌두-아라비아 기수법은 놀라운 힘으로 계산의 실행 그 자체를 도와준다. 723×364를 수행하기 위해서 로마의 기수법으로 DCCXXIII 곱하기 CCCLXIV로 나타내어 보자. 이 기수법은 거의 도움이 안 된다. 이 때문에 로마인들은 계산할 때 주판에 의지할 수밖에 없었다(Cajori, 1950).

모든 곱셈을 구구단으로 환원시킬 수 있게 만드는 둘째 원천은 분배법칙이다. (30+8)×(20+4)=(30×20)+(30×4)+(8×20)+(8×4)에 잘 나타나있듯이 승수뿐만 아니라 피승수에도 분배법칙이 적용된다. 분배법칙은 고등수학에서는 공리에 해당하지만, 초등수학에서는 암묵적인 방법을 사용해서라도 유의미하게 설명되어져야할 대상이다. 분배법칙을 설명하기 위해서는 동수누가나 배 개념을 통한 곱셈의 개념적 이해가 필요하다. 곧이어 다룰 다양한 곱셈 방법 중 '비례표를 통한 방법'이 분배법칙을 가장 잘 드러내는 방법으로서, 학생들에게 분배법칙을 암묵적으로 설명하는 수단이 될 수 있다.

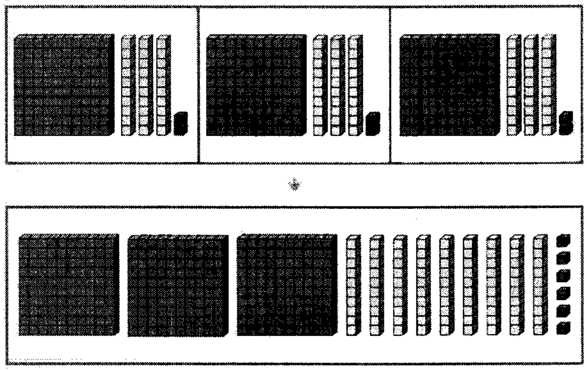
지금까지 살펴보았듯이 곱셈 알고리즘의 수학적 구조는 자리값의 원리에 따른 십진 분할과 분배법칙, 그리고 곱셈 구구로의 환원으로 요약될 수 있다. 이 수학적 구조는 표준 알고리즘을 비롯한 여러 다양한 형태의 알고리즘으로 나타난다. 이 절에서는 실험적 지도안의 구안에 필요한 사전 작업으로서 곱셈 알고리즘의 다양한 유형을 추출한 다음 그것을 명확히 규정하고 그 특성을 교수학적 관점에서 분석하고자 한다.

1. 가로셈

가로셈 방법은 디너스 십진 모형을 이용하여 문제를 해결하는 과정을 그대로 식으로 쓴 것에서 형식화할 수 있다. 즉 132×3의 경우 디너스 십진 모형으로 놓았을 때 백모형이 1

개, 십모형이 3개, 낱개모형이 2개에서 각각을 3배 한 것을 식으로 쓴 것이다.

활동 1 귤은 모두 몇 개인지 수 모형으로 알아보시오.



100×3=300
30×3=90
2×3= 6
⇒ 300+90+6=396

● 귤은 모두 몇 개인지 곱셈식으로 나타내시오.

[그림 2] 132×3의 가로셈 표현

이렇게 표현한 가로셈은 자리값의 원리에 따른 수의 십진 분할과 그에 기초한 분배법칙을 잘 표현하고 있다. 38×24의 경우를 가로셈으로 표현하면 [그림 3]과 같다.

30×20=600
30×4=120
8×20=160
8×4=32
⇒ 600+120+160+32=912

[그림 3] 가로셈 표현

위에서 보이듯이 가로셈 방법에서는 38에서의 30이 '3'으로 나타내어지는 것이 아니라 '30'으로 나타내어지기 때문에 세로셈과 달리 0의 생략으로 인한 자리수 오류가 생길 가능성이 적다. 하지만 세로셈보다 기록하는 숫자가 많아서 번거롭다는 단점이 있다.

2. 세로셈

세로셈은 가장 많이 활용되는 알고리즘으로서 그것 또한 다양한 여러 종류로 세분될 수 있다. 큰 자리부터 계산하는가, 작은 자리부터 계산하는가, 부분 곱셈을 어느 정도까지 상세하게 기술하는가에 따라 여러 유형으로 나뉜다[그림 4].

① 큰 자리 수부터 계산한 경우

$$\begin{array}{cccc} & & 5 & 6 \\ \times & & 3 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 0 & 0 \\ & 1 & 8 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 2 \\ \hline 1 & 7 & 9 & 2 \end{array}$$

② 작은 자리 수부터 계산한 경우

$$\begin{array}{cccc} & & 5 & 6 \\ \times & & 3 & 2 \\ \hline & & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 7 & 9 & 2 \end{array}$$

③ 부분 곱셈을 상세하게 기술한 경우

$$\begin{array}{cccc} & & 5 & 6 \\ \times & & 3 & 2 \\ \hline & & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & \\ & 1 & 8 & \\ 1 & 5 & & \\ \hline 1 & 7 & 9 & 2 \end{array}$$

④ 부분 곱셈을 간단하게 기술한 경우

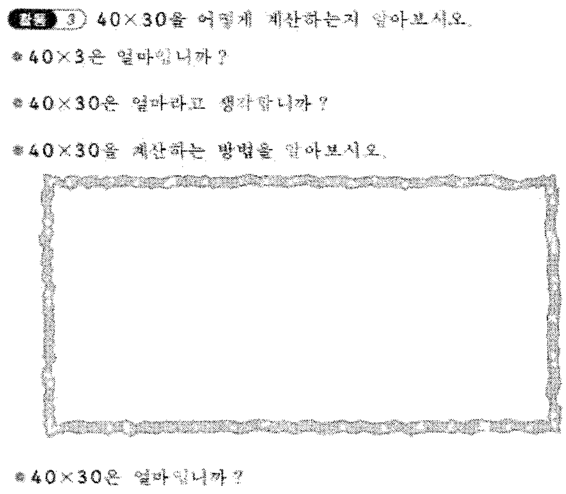
$$\begin{array}{cccc} & & 5 & 6 \\ \times & & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 8 & \\ \hline 1 & 7 & 9 & 2 \end{array}$$

[그림 4] 세로셈의 여러 유형

이 가운데 ④를 '표준 알고리즘'이라고 부른다. 이것은 모든 부분 곱셈과 모든 0이 나타나는 ②의 축약된 형태로서 ②보다는 훨씬 많은 양의 수를 기억하고 암산하는 능력을 요구한다. 따라서 ②에서 ④로 이행하는 것이 적절하며 그 중간 단계에 ③이 위치한다. 즉 ②와 ③은 ④에 대하여 Vygotsky가 말한 스캐폴딩(scaffolding)에 해당한다고 볼 수 있다(유연진, 박만구, 2009).

3. 0이 붙은 수의 곱셈 방법

20×300, 32×50 등과 같이 0이 붙은 수의 곱셈에서는 세로셈보다 훨씬 간편한 기계적인 규칙이 있다. 그것은 "피승수와 승수에서 0을 제외하고 나머지 수끼리만 곱한 다음, 그 결과에 처음에 제외한 0의 개수만큼 붙여준다"는 것이다. 다소 도식적으로 말한다면 "수는 곱하고, 0은 개수만큼 쓴다"이다[그림 5].


3) 40×30을 어떻게 계산하는지 알아보시오.

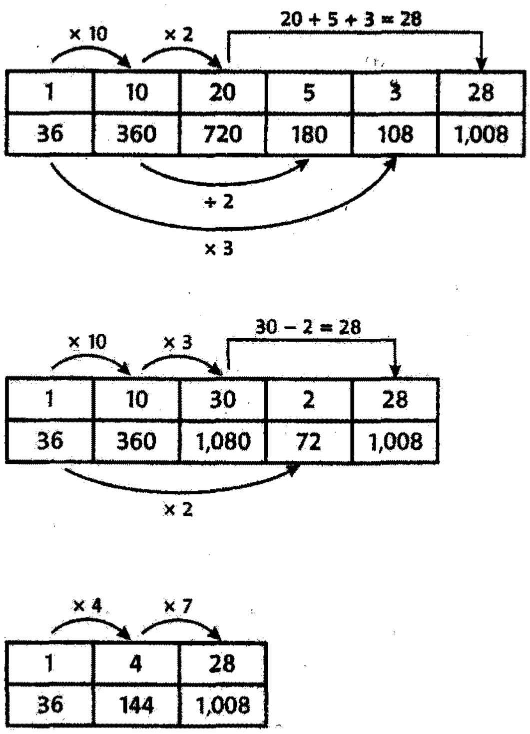
* 40×3은 얼마입니까?
* 40×30은 얼마라고 생각합니까?
* 40×30을 계산하는 방법을 알아보시오.
* 40×30은 얼마입니까?

[그림 5] 0이 붙은 수의 곱셈 방법

이 방법은 표준 알고리즘뿐만 아니라 다양한 세로셈과 가로셈의 과정 중간에서 자주 사용되기 때문에 반드시 익혀야할 규칙이다. 그렇기 때문에 대부분의 교과서가 이 규칙을 도외시하기가 어려우며, 현재 초등 수학 교과서도 마찬가지이다.

4. 비례표(ratio table)

비례표는 Wijers, Lange, Gravemeijer, Querelle(1998)가 쓴 「현실속의 수학(Mathematics in Context)」 교과서에서 곱셈 지도의 주요 방법으로 채택한 알고리즘이다. 그 알고리즘의 핵심은 "덧셈과 곱셈을 결합하여 승수를 분할함으로써 주어진 곱셈을 보다 용이한 곱셈의 여러 단계로 분할하는 것"이다. 비례표의 주된 특징은 하나의 곱셈 과제를 다양한 방법으로 해결할 수 있다는 점이다. 다음 [그림 6]은 비례표를 써서 36×28을 다양하게 수행한 사례이다.



[그림 6] 「Mathematics in Context」 교과서에서 비례표를 통한 36×28의 계산

비례표 방법의 특징은 "명확하게 절차적으로 규정할 수 없는 방법"이라는 점에 있다. 그 이유는 승수가 어떤 수인가에 따라 그것을 분할하는 방법이 다르며, 또 하나의 승수에 대해서도 분할하는 방법이 여러 가지가 있을 수 있기 때문이다. 명확하게 확립된 절차가 아니라는 점에서, 이 비례표 방법은 알고리즘의 한 유형으로 분류하기 어려운 측면이 있다.

하지만 이 일반성이 비례표 방법의 장점이 되기도 한다. 세로셈 알고리즘은 비례표 방법의 특수한 사례이며, 이집트의 곱셈 방법(Eves, 1953)도 그러하다[그림 7, 8].

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 3 & 8 \\
\times & & 2 & 4 \\
\hline
 & & 3 & 2 \\
 & 1 & 2 & \\
 & 1 & 6 & \\
 & 6 & & \\
\hline
 & 9 & 1 & 2
\end{array}
$$

×2 ×4 ×10 20+4=24

24	1	4	2	20	24
38	38	152	76	760	912

[그림 7] 비례표로 표시된 세로셈

$$
\begin{array}{rr}
1 & 38 \\
2 & 76 \\
4 & 152 \\
*8 & 304 \\
*16 & 608 \\
\cline{2-2}
 & 912
\end{array}
$$

×2 ×2 ×2 ×2 8+16=24

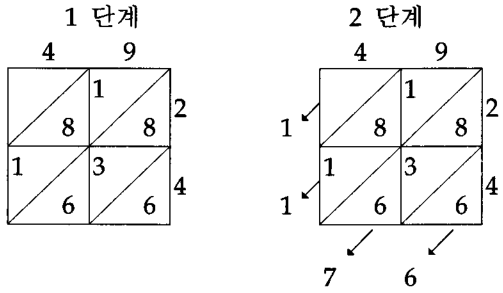
24	1	2	4	8	16	24
38	38	76	152	304	608	912

[그림 8] 비례표로 표시된 이집트 곱셈법

이외에도 비례표의 장점은 많다. 그것은 하나의 수를 합하고, 곱하고, 나누는 등 여러 연산을 써서 다양한 방법으로 분할할 수 있다는 점에서 '수 감각(number sense)'을 필요로 하며 그것을 함양할 수 있다. 또한 곱셈 알고리즘의 기초가 되는 수학적 토대가 되는 분배법칙을 잘 구현하고 있으며 그것을 암묵적이고 비형식적으로 다룰 수 있는 좋은 기회이다.

5. 격자 방법(lattice method)

격자곱셈은 10세기경 인도에서 발명되어진 알고리즘으로서(Cajori, 1950: 98) 현대의 표준 알고리즘과 거의 유사하다. 격자 방법에 의한 49×24의 계산은 [그림 9]와 같다.



[그림 9] 격자 방법

이 방법은 각각의 자리수 만큼의 칸을 격자 형태로 그린 후, 각 자리수끼리의 곱을 격자 안에 쓰고, 그것을 대각선 방향으로 더해서 답을 구하는 것이다. 이 방법은 표를 그려야 한다는 번거로움이 있지만, 수행되는 부분 곱셈이 모두 명확하게 나타나고 기록되므로 곱셈을 배우는 초기 단계의 학생들에게는 비례표나 표준 알고리즘보다 더 용이하게 느껴질 가능성이 있다.

Ⅲ. 초등 수학 3학년 2학기 곱셈 단원에 대한 실험적 학습·지도안 구안

이 장에서는 제 Ⅱ장에서 수행했던 자연수 곱셈에 대한 교수학적 분석을 바탕으로 학생이 해결해야할 문제에 적합한 알고리즘을 선택하고, 그러한 다양성을 통하여 학생 스스로 표준 알고리즘을 발달시키는 경험, 즉 점진적인 형식화를 추구하는 입장에서 초등수학 3학년 2학기의 곱셈 단원에 대한 실험적 학습·지도안을 구안하였다.

1. 실험적 학습·지도안의 방향과 개요

본 연구에서는 다음과 같은 관점 하에 재구성하였다.

첫째, 다양한 비형식적인 알고리즘을 거치면서 표준 알고리즘을 학생 스스로 발견하도록 한다. 급격한 형식화를 통해서 알고리즘을 익히고 훈련하는 것이 아니라, 다양한 알고리즘을 제시하여 학생 나름의 자발적인 방법을 드러내는 기회를 장려함으로써 학생 스스로 표준 알고리즘을 점차적으로 발견하도록 한다. 이 과정에서는 역사적 발달 단계에서 나타난 과도기적인 방법이라든가 비형식적 방법 등을 다양하게 채용한다.

둘째, 다양한 알고리즘을 제시함으로써 알고리즘 학습의 오랜 문제인 기계적인 훈련을 극복하고자 한다. 다양한 곱셈 방법을 서로 비교함으로써 Skemp(1987)가 말했듯이 그들을 관계적으로 이해하고, 그 기저에 깔려있는 원리를 파악함으로써 표준 알고리즘에 대한 총체적인 이해를 추구하고자 한다.

셋째, Wijers, Lange, Gravemeijer & Querelle(1998)가 쓴「현실속의 수학(Mathematics in Context)」 교과서의 중심 내용을 이루고 있는 비례표 방법을 채용하고자 한다. 이 교과서가 5~8 학년을 대상으로 개발된 것이라고 볼 때, 비례표는 본 연구자의 교수 실험의 대상인 3학년 2학기와는 맞지 않는다. 그럼에도 불구하고 비례표를 채용한 이유는 Gravemeijer와 van Galen(2003: 120)은 비례표 방법이 표준 알고리즘의 본질인 자리값의

원리와 분배법칙을 잘 드러내며, 수감각과 곱셈 감각을 기르는데도 효과적이기 때문에, 자연수 곱셈 알고리즘을 아동 스스로 개발하도록 지도하는데 있어서 좋은 방법이 될 수 있다고 주장하면서 두 자리 수 곱셈 18×23을 예로 들고 있기 때문이다. 우리나라 교육과정에서는 3학년 2학기에 두 자리 수 곱셈을 배운다. 필자 또한 비례표 방법이 여타의 다른 모든 알고리즘을 포괄할 수 있는 일반적인 특성과 함께 비형식적인 특성을 갖고 있기 때문에 곱셈 알고리즘의 도입 시기에 다루어볼 만한 가치가 있다고 판단하였다. 비례표와 함께 아울러 격자 방법도 수용하여 그 지도 소재로서의 그 효과를 검증해보고자 한다.

넷째, 단원의 종국적인 목표는 기존 교과서와 마찬가지로 표준 알고리즘에 두되 그것에 도달하는 과정을 달리하도록 한다. 표준 알고리즘의 함축성과 일반성은 최종 목표로 삼되, 학생들에게 표준 알고리즘만을 사용할 것을 강요하지는 않을 것이며 학생 자신이 선호하는 방법을 선택하여 문제를 해결할 수 있는 기회를 제공하고자 한다.

2. 실험적 학습 지도안의 구체적 내용

실험적 학습 지도안의 차시별 내용은 다음과 같다. 상세한 학습 지도안은 부록으로 첨부하였다.

<표 1> 재구성한 실험적 학습 지도안 차시별 내용

차시	주제	주요활동 및 곱셈 알고리즘
1	(세 자리 수)×(한 자리 수)를 계산하는 다양한 방법을 알아보기	○ 활동 1 : 어림 및 조정, 디너스 십진 모형을 사용하여 곱셈하기 ○ 활동 2 : 가로셈 방법으로 곱셈하기 ○ 활동 3 : 세로셈 방법으로 곱셈하기 ○ 활동 4 : 표준알고리즘으로 곱셈하기 ○ 익히기 : 각자가 좋아하는 방법으로 곱셈 해결하기
2	(두 자리 수)×10, (몇 십)×(몇 십), (두 자리 수)×(몇 십)을 계산하는 간편한 방법 알아보기	○ 활동 1 : 디너스 십진 모형을 사용하여 (두 자리 수)×10 곱셈하기 ○ 활동 2 : 비례표를 사용하여 (몇 십)×(몇 십) 곱셈하기 ○ 활동 3 : 비례표를 사용하여 (두 자리 수)×(몇 십) 곱셈하기
3	(두 자리 수)×(두 자리 수)를 계산하는 다양한 방법 알아보기	○ 활동 1 : 비례표를 사용하여 (두 자리 수)×(두 자리 수) 곱셈하기 ○ 활동 2 : (두 자리 수)×(두 자리 수)를 계산하는 다양한 방법 알아보기 ○ 익히기 : 좋아하는 방법으로 곱셈 해결하기
4	격자곱셈을 알아보고 곱셈을 활용하기	○ 활동 1 : (두 자리 수)×(두 자리 수) 세로셈 방법 알아보기 ○ 활동 2 : 격자곱셈의 규칙을 알아보고 격자곱셈하기 ○ 활동 3 : 격자곱셈과 세로셈 비교하기 ○ 활동 4 : 곱셈 문장제 해결하기

가. 1차시: (세 자리 수)×(한 자리 수)를 계산하는 다양한 방법 알아보기

1차시에서는 어림과 조정 활동을 통하여 곱셈 알고리즘을 학습하는 토대를 제공한다. 그 다음으로 학생들이 가장 많이 접해왔던 디너스 십진 모형을 활용하여 곱셈 알고리즘을 지도한다. 이때, 각 자리 수에 대한 개념을 확실하게 심어주고 다음 곱셈 알고리즘을 이해하는 토대가 될 수 있도록 각 자리 수에 대하여 경계선을 그어준다. 그리고 승수 부분에 대해서도 점선으로 경계를 표시하고 그림과 함께 설명을 제공하여 학생들이 곱셈 개념을 잘 이해할 수 있도록 한다.

디너스 십진 모형을 활용하여 곱셈 알고리즘의 기초를 닦았다면 다음 활동에서는 가로셈 방법과 다양한 세로셈 방법으로 곱셈을 수행한다. 이를 통해서 학생들은 곱셈 알고리즘에 대해 이해하고 스스로 좋은 방법을 선택할 수 있도록 한다.

마지막 익히기 활동에서는 다양한 곱셈 방법 중에서 스스로 원하는 방법을 선택하여 곱셈 문제를 해결하도록 한다. 제 7차 교과서의 1차시의 마지막에는 문장제가 하나 포함되어 있으나, 실험적 학습 지도안에서는 그것을 4차시로 옮기고 1차시에서는 계산 문제만을 제시하였다.

나. 2차시: (두 자리 수)×10, (몇 십)×(몇 십), (두 자리 수)×(몇 십)을 계산하는 간편한 방법 알아보기

2차시에서는 기존 교과서와는 다르게 (두 자리 수)×10 곱셈을 디너스 십진 모형을 사용하여 설명하였다. 기존 교과서에서는 10×3을 통해 10×13을 도출하는데 반해 재구성한 교과서에서는 (두 자리 수)×10 역시 디너스 십진 모형을 통해 해결하도록 구성한다. 또 (몇 십)×(몇 십)을 비례표를 통해 지도하고자 한다. 비례표를 사용하여 (몇 십)×(몇 십)을 할 때 학생들이 (몇 십)×(몇)×10의 순서로, 또는 (몇 십)×10×(몇)의 순서로 스스로의 판단 아래 문제를 해결할 수 있게 한다. 그리고 (두 자리 수)×(몇 십) 역시 비례표를 써서 문제를 해결하게 하여 학생들이 간편한 방법을 추론하고 선택할 수 있도록 하였다.

그리고 학생들의 곱셈 지식 생성의 수월성을 고려하여 (몇 십)×(몇 십)을 (두 자리 수)×(몇 십) 이전에 학습하도록 지도 순서를 재구성하였다. 안희진(2006: 105)에 따르면, 기존의 교과서에서는 (두 자리 수)×(몇 십)을 다룬 후에 (몇 십)×(몇 십)을 다루고 있으나, 이 순서를 반대로 함으로써 (한 자리 수)×10의 연장선상에서 (몇 십)×(몇 십)을 학습하도록 하는 것이(몇 십)의 지식을 생성하기에 보다 수월하다. 실험적 지도안은 이 주장을 수용하여 (몇 십)×(몇 십)을 먼저 다루었다.

다. 3차시: (두 자리 수)×(두 자리 수)를 계산하는 다양한 방법 알아보기

3차시에서도 1차시와 마찬가지로 현실 맥락 문제를 통하여 곱셈을 도입한다. 그리고 이를 어림과 조정 활동을 통하여 일차적으로 다룬다. 이후 2차시에서 배운 비례표의 다양한 방법들을 살펴본 후 각자 나름대로 다른 방법들을 생각하여 문제를 해결할 수 있게 하였다. 그리고 그 나름의 방법들을 다른 학생들과 공유할 수 있도록 하였다.

활동 2에서는 비례표, 가로셈의 방법, 세로셈을 제시하여 학생 스스로 그 차이점과 공통점을 찾아보도록 하였다. 이를 통해 학생들은 하나의 문제에 다양한 곱셈 알고리즘이 있음을 알고 이들의 서로 연관되어 있음을 앎으로써 스스로 가장 좋은 문제를 선택할 수 있는

기회를 제공받을 수 있을 것이다. 그리고 자신이 가장 좋아하는 방법을 선택할 수 있는 기회를 제공받음으로써 학생 스스로 알고리즘을 구성하고자 노력할 것이라 기대된다.

라. 4차시: 격자곱셈을 알아보고 곱셈을 활용하기

4차시에서는 10세기경에 인도에서 발명된 곱셈 방법인 이른바 격자 방법이 제시된다. 학생들은 이를 통해 곱셈이 현 시대를 비롯하여 전 세계의 모든 사람들이 과거부터 사용되어온 것임을 알게 되며 지금 현재 사용하고 있는 세로셈 알고리즘 역시 그의 하나임을 느끼게 해 주고자 한다.

그리고 격자곱셈의 규칙을 찾아봄으로써 격자곱셈을 이해할 수 있도록 구성한다. 그리고 이를 세로셈과 비교하여 학생 스스로 편리한 알고리즘을 선택할 수 있게 한다. 이는 마지막 활동이 문장제 문제를 통해 더 확고히 다질 수 있도록 하였다.

Ⅳ. 교수 실험

이 장에서는 새롭게 구안한 곱셈단원을 교수실험하기 위해 연구 방법과 절차를 확인하고 이를 수업에 적용하였다.

<표 2> 교수 실험 과정

기간	과정	내용
2009년 7월 3주	사전검사	1학기 학기말평가를 사전검사로 대체함
2009년 9월 1주	실험반과 비교반 선정	임의의 두 반을 실험반과 비교반으로 선정함
2009년 9월 2주	예비수업	재구성한 내용을 예비로 실험반과 비교반을 제외한 다른 반에 적용함
2009년 9월 3주	재구성 교과서 수정	예비 수업을 바탕으로 재구성한 교과서를 수정함
2009년 9월 4주	본 수업	총 4차시의 재구성 교과서로 실험반에서 수업 비교반은 제 7차 교과서로 수업
2009년 9월 5주~ 10월 1주	사후 검사	실험반과 비교반에서 사후검사를 실시함

1. 실험 설계

본 연구에서는 대전광역시에 위치하고 있는 J초등학교 3학년 학급 중 두 학급을 실험반과 비교반으로 선정하였다. 두 집단의 학생 수는 각각 30명이나 학교의 특성상 전출입이 많아 1, 2학기 모두 한 교사와 꾸준히 수업을 받은 학생은 17명과 21명이다.

1학기 학기말평가를 사전검사로 대체하였고 두 집단 사이의 동질성 검사를 실행하였다.

비교반은 학기말 평가 성적이 비슷한 반으로 선택하였다. 통계처리 프로그램이 SPSS에서 독립표본 t-검정을 통해서 실험반(2반과) 비교반(3반)의 1학기 기말고사의 총점을 비교한 결과(<표 3>) 실험반(M=84.35, SD=14.044)이 비교반(M=83.81, SD=11.062)보다 평균이 0.54점 높았으나 이는 통계적으로 유의미하지 않았다($t(36)=0.134$, $p>0.05$).

<표 3> 두 집단의 기말평가에 대한 독립표본 검정

	학급	N	평균	표준편차	평균의 표준오차	t	P
기말평가	실험반(2반)	17	84.35	14.044	3.406	0.134	0.895
	비교반(3반)	21	83.81	11.062	2.414		

실험 처치 기간 동안 실험 집단은 본 연구자가 재구성한 교과서를 가지고 수업을 하였으며, 비교집단은 담임교사가 제 7차 교과서에 따라 수업하였다.

실험 처치 후, 학생들의 곱셈 알고리즘 이해 여부 등을 파악하기 위한 계산 능력 검사지와 이해력 검사지를 만들어 평가하였으며 그 결과를 분석하였다.

2. 예비 수업

본 연구에서는 실험적 학습 지도안의 수준과 양, 표현 방법 및 학습 내용이 적절한가에 대해 알아보기 위하여 예비 수업을 실시하였다. 예비 수업은 구안한 4차시 분량의 지도안을 실험반과 비교반이 아닌 제 3의 학급에서 실시하였으며 학생들의 다양한 반응 및 이해도를 살피기 위해 노력하였다. 예비 수업을 하고 난 후 몇 가지 문제점 및 보완점이 발견되어 학습 지도안의 내용을 수정하였다.

3. 본 수업

본 수업은 4개 차시로 이루어져 있으며 실험적 학습 지도안으로 실시되었다. 제 7차 초등 수학 3-나 단계의 곱셈 단원은 총 6차시로 구성되어 있으나 재미있는 놀이와 수준별 학습 그리고 생활에서 알아보기를 다룬 2개 차시를 제외한 총 4개 차시를 재구성하여 적용하였다. 이와 동일한 4개 차시에 대하여, 비교반은 제 7차 교과서의 3-나 단계의 곱셈 단원을 따라서 수업이 실시되었다.

4. 사후 검사

평가 문항의 종류는 크게 계산 평가 문항과 이해 평가 문항으로 나누었다. 계산 평가는 주어진 곱셈에 대한 정답 여부만을 검사하였으며, 이해 평가는 곱셈 계산 알고리즘의 근저에 있는 여러 수학적 원리에 대한 이해 여부를 검사하였다. 사후 검사지의 구성 체계는 <표 4>와 같다.

<표 4> 사후 검사지의 구성 체계

문항	평가 종류	평가 내용	평가 의도
1	계산	(세 자리 수)×(한 자리 수)	여러 곱셈 방법에 대한 학생들의 선호도
2	계산	(세 자리 수)×(한 자리 수)	
3	계산	(두 자리 수)×10	
4	계산	(몇 십)×(몇 십)	
5	계산	(몇 십)×(두 자리 수)	
6	계산	(두 자리 수)×(몇 십)	
7	계산	(두 자리 수)×(두 자리 수)	
8	계산	동수누가의 곱셈 상황	곱셈 개념의 유형에 따른 다양한 문장제의 해결 실태를 보는 것
9	계산	비율상황의 곱셈 상황	
10	계산	비율상황의 곱셈 상황	
11	계산	동수누가의 곱셈 상황	
12	계산	동수누가의 곱셈 상황	
13	계산	곱집합 개념의 곱셈 상황	
14	이해	교환법칙의 이해	곱셈 법칙을 배우지 않아도 잘 이해하고 있는지에 대해 알아보고자 함
15	이해	분배법칙, 결합 법칙의 이해	
16	이해	분배법칙의 이해	
17	이해	곱셈에서 자리값 개념의 이해	
18	계산	(세 자리 수)×(한 자리 수)	가로셈에서의 계산 방법을 살펴보고자 함
19	계산	(몇 십)×(몇 십)	
20	계산	(두 자리 수)×(두 자리 수)	
21	계산	(세 자리 수)×(한 자리 수)	세로셈에서의 계산 방법을 살펴보고자 함
22	계산	(두 자리 수)×(몇 십)	
23	계산	(두 자리 수)×(두 자리 수)	
24	계산	(두 자리 수)×(두 자리 수)	하나의 문제를 얼마나 다양한 해결방법을 활용하여 해결하는가를 살펴보는 것

사후 평가는 연구자가 직접 개발한 문항을 사용하여 수행하였다. 제 3의 평가지가 아닌 연구자가 직접 제작한 평가지를 사용했다는 점은 평가의 중립성에 문제가 소지가 될 수 있을 것이다. 하지만 기존의 수학 교과서와 수학 익힘책에 나오는 소재를 사용하여 다소 변형함으로써 실험반과 비교반 모두에게 중립적인 평가지를 제작하려고 노력하였다. 사후 평가는 실험반과 비교반에서 모두 실시하였으며 그 결과를 정량적, 정성적으로 분석하였다.

V. 결과 분석

1. 정량적 결과 분석

본 연구에서는 교수 실험 후에 실험반과 비교반에 대하여 실시된 두 종류의 사후 평가(계산평가와 이해평가)를 실시하였다. 별도의 사전평가는 실시하지 않았으며 그 대신 실험반과 비교반이 속한 학교에서 실시한 2009학년도 제 1학기 기말고사의 수학 과목 점수를

사전평가로 대체하였다. 사전평가의 결과 실험반이 비교반보다 평균이 0.54점 높았으나 이는 통계적으로 유의미하지 않았다.

본 연구에서는 공분산분석(ANCOVA)을 써서 실험반과 비교반이 사후평가에서 어떤 차이를 보이는지 알아보았다. 공분산분석은 사후평가 점수 자체를 비교하는 것이 아니라, 대신 사전평가에서의 점수차를 감안하여 사후평가 점수를 교정하여 비교한다. 각 학급별 사전평가와 사후 계산평가의 평균과 표준 편차는 <표 5>와 같았다. 그리고 이들 자료를 사전평가를 공변수, 학급을 독립변수 그리고 사후 계산평가를 종속변수로 공분산분석을 실시한 결과는 <표 6>과 같았다.

<표 5> 사후 계산평가 결과

	사전평가		사후 계산평가		표본의 크기
학급	평균	표준편차	평균	표준편차	
실험반(2반)	84.35	14.044	11.24	2.078	17
비교반(3반)	83.81	11.062	11.90	2.234	21
전체	84.08	12.55	11.61	2.163	38

<표 6> 사후 계산평가 공분산분석 결과

분산원	제곱합(SS)	자유도(df)	평균제곱(MS)	F	p
모형	40.868	2	20.434	5.409	.009
사전평가	36.658	1	36.658	9.704	.004
학급	4.779	1	4.779	1.265	.268
오차	132.211	35	3.777		
전체	173.079	37			

먼저 공변수인 사전평가의 효과는 유의하였다($F(1, 35))=9.704$, $p=0.004$). 그리고 사전평가를 통제했을 때 수업방법에 따른 두 학급의 사후 계산평가 점수의 교정 평균에는 유의한 차이가 없었다($F(1, 35))=1.265$, $p=0.268$). 계산 평가 문항에 대해서는 실험반이 비교반에 비해서 향상됐다고 말할 수 없다.

각 학급별 사전평가와 사후 이해평가의 평균과 표준편차는 <표 7>과 같았다. 그리고 이들 자료를 사전평가를 공변수, 학급을 독립변수 그리고 사후이해평가를 종속변수로 공분산분석을 실시한 결과는 <표 8>과 같았다.

<표 7> 사후 이해평가 결과

	사전평가		사후 이해평가		표본의 크기
학급	평균	표준편차	평균	표준편차	
실험반(2반)	84.35	14.044	1.35	.93	17
비교반(3반)	83.81	11.062	.81	.93	21
전체	84.08	12.55	1.05	.96	38

<표 8> 사후 이해평가 공분산분석 결과

분산원	제곱합(SS)	자유도(df)	평균제곱(MS)	F	p
모형	12.308	2	6.154	9.977	.000
사전평가	9.533	1	9.533	15.457	.000
학급	2.549	1	2.549	4.133	.050
오차	21.587	35	.617		
전체	33.895	37			

먼저 공변수인 사전평가의 효과는 유의하였다(F=(1,35)=15.457, p=0.000). 그리고 사전평가를 통제했을 때 수업방법에 따른 두 학급의 사후 이해평가 점수의 교정 평균에는 유의한 차이가 있었다(F(1, 35))=4.133, p=0.050). 이해 평가 문항에 대해서는 실험반이 비교반에 비해서 향상됐다고 말할 수 있다.

2. 정성적 결과 분석

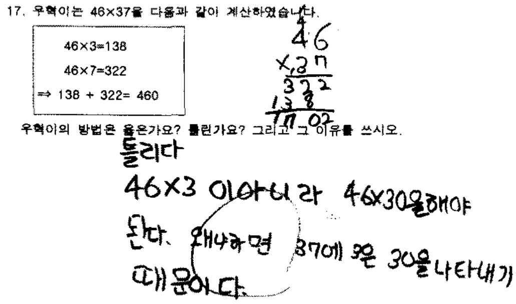
가. 자리값의 원리에 대한 이해

자리값의 원리는 곱셈 알고리즘의 토대로서 그것을 이해하기 위한 필수 조건이다.

<표 9> 자리값 원리에 대한 이해에 대한 문항의 정답률

	실험반	비교반
17번 문항 정답률	53%	29%

자리값의 원리를 어느 정도 이해하고 있는지에 관한 문항에서 실험반이 비교반에 비해 정답률이 매우 높은 편이었다. 이는 실험반 학생들이 자리값의 개념을 더 잘 이해하고 있다는 것을 보여준다. 이는 학생들이 디너스 십진 모형, 가로셈, 세로셈, 표준 알고리즘 등을 차례로 배웠기 때문인 것으로 보인다. 비교반 학생들의 경우 46×37의 답이 1702임은 알고 있으나 어떤 곳이 틀렸는지 찾지 못하는 학생들도 있었다. 혹은 "앞으로 한 칸 가야 한다"라는 수준으로 오류를 표현했지만, 이는 자리값의 이해에 근거한 것이라기보다는 알고리즘에 대한 절차적인 이해에 근거한 답으로 여겨진다. 이는 곱셈 알고리즘을 이해하지 못하고 기계적으로 풀었음을 보여주는 것이라 할 수 있다.


17. 우혁이는 46×37을 다음과 같이 계산하였습니다.

46×3=138
46×7=322
⇒ 138 + 322= 460

우혁이의 방법은 옳은가요? 틀린가요? 그리고 그 이유를 쓰시오.

[그림 10] 자리값의 원리를 바르게 이해한 사례

17. 우혁이는 46×37을 다음과 같이 계산하였습니다.

46×3=138
46×7=322
⇒ 138 + 322= 460

46
×37
322
138
1701

우혁이의 방법은 옳은가요? 틀린가요? 그리고 그 이유를 쓰시오.

틀렸다 그 이유는 322가 앞으로 한칸가야 한다.

[그림 11] 자리값의 원리를 이해하지 못한 사례

나. 곱셈 알고리즘의 본질로서의 수의 분할과 분배법칙 적용하기

분배법칙, 즉 승수를 분할하여 곱을 하는 조작은 곱셈 알고리즘의 본질로서 모든 곱셈 활동에 기초가 된다. 분배법칙에 대한 이해를 살펴보면 다음과 같다.

<표 10> 분배법칙에 대한 이해에 대한 문항의 정답률

	실험반	비교반
15번 문항 정답률	41%	14%
16번 문항 정답률	41%	38%

분배법칙에 대한 이해를 살펴보면 실험반이 비교반보다 높은 것으로 나타났다. 특히 15번의 경우에는 25×12를 12를 2×6이나 3×4로 다양하게 분할해서 풀었다. 하지만 비교반의 경우에는 승수를 분할하는데 어려움을 느끼는 학생들이 많은 편이었다. 하지만 16번의 경우 비교반과 실험반의 차이가 많이 나지 않았는데, 이는 16번 문항과 같은 유형의 문제에 대해서는 기존 교과서에서도 모눈종이를 통해 유의미하게 지도하고 있기 때문일 것으로 추측된다(교육인적자원부, 2006b).

15.소라는 21×70을 다음과 같이 계산하였다.

70은 7×10이므로 먼저 21×7을 하면 147이야... 그리고 여기에 10을 곱하면 1470이야.

소라의 방법과 비슷한 방법을 써서 25×12를 계산하시오.

25는 5×5 이므로 먼저 12×5를 하면 60이야
그리고 여기에 5를 곱하면 300 이야

[그림 12] 피승수를 분할하여 문제를 해결한 사례(1)

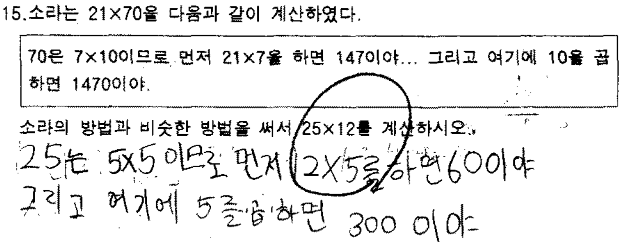
15.소라는 21×70을 다음과 같이 계산하였다.

70은 7×10이므로 먼저 21×7을 하면 147이야... 그리고 여기에 10을 곱하면 1470이야.

소라의 방법과 비슷한 방법을 써서 25×12를 계산하시오.

12=6×2 이니까 25×6=150이고 여기에다 2를 곱하면
300이다.

[그림 13] 승수를 분할하여 문제를 해결한 사례(2)


15.소라는 21×70을 다음과 같이 계산하였다.

70은 7×10이므로 먼저 21×7을 하면 147이야... 그리고 여기에 10을 곱하면 1470이야.

소라의 방법과 비슷한 방법을 써서 25×12를 계산하시오.

25는 5×5 이므로 먼저 12×5를 하면 60이야
그리고 여기에 5를 곱하면 300 이야

[그림 14] 피승수를 분할하여 문제를 해결한 사례(3)

다. 곱셈 개념에 따른 세 가지 유형별 문장제의 정답률

박혜진(2008)에 의하면 곱셈 상황은 동수누가, 비율, 비교, 정렬과 넓이, 조합(곱집합)으로 분류할 수 있다(p.15). 이 논문에서는 곱셈 상황을 초등학교 3학년에 적용가능한 범위로 한정하여 동수누가, 비율상황, 곱집합의 세 가지로만 분류하여 정답률을 조사하였다.

<표 11> 동수누가의 곱셈상황의 이해에 대한 문제의 정답률

	실험반	비교반
8번 문항 정답률	71%	90%
11번 문항 정답률	76%	67%
12번 문항 정답률	71%	67%

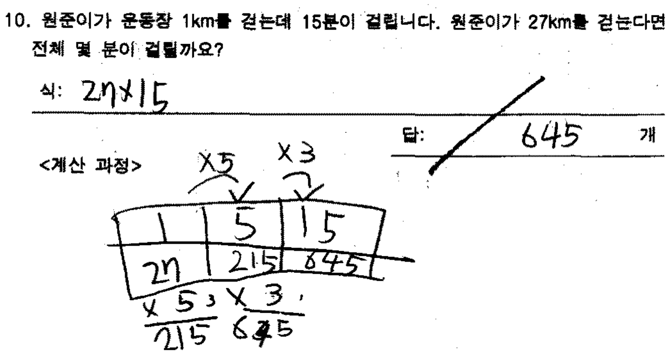
같은 동수누가의 상황임에도 불구하고 8번 문항은 비교반이 월등히 우수하게 나타났지만 11, 12번의 상황에서는 실험반이 정답률이 높게 나타났다. 그 이유는 8번 문항에서는 16×11을 해결해야만 했는데, 이것은 세로셈으로 해결하기에 매우 간단한 숫자이기 때문이라고 생각된다. 이에 비해 11, 12번 문항은 다른 곱셈 과정이 포함되어야 하기 때문에 정답률이 더 낮게 나온 것이라 여겨진다. 하지만 실험반에서는 매우 간단한 숫자임에도 불구하고 표준알고리즘보다는 자신이 좋아하는 다양한 알고리즘을 문제를 해결하려 시도하다가 오답을 산출한 사례가 많았다.

<표 12> 비율상황의 곱셈상황의 이해에 대한 문제의 정답률

	실험반	비교반
9번 문항 정답률	47%	71%
10번 문항 정답률	65%	67%

비율상황의 문제에 대해서는 정답률이 비교반이 높게 나온 것을 알 수 있다. 비교반에서는 세로셈 알고리즘 방법으로 문제를 해결하였는데 이것이 문제 해결에 도움을 주는 것임을 알 수 있다. 이에 비해 실험반에서는 표준 알고리즘을 사용하지 않고 비례표로 해결하려다 틀린 경우가 많았다. 이는 실험반 학생들이 계산의 정확성이라든가 표준 알고리즘을 정확하게 적용해야 한다는 것에 관심이 있기보다는 자신이 흥미있는 알고리즘을 적용

하고 실험하는 것에 더 관심이 있었기 때문인 것으로 추측된다.



[그림 15] 비례표를 사용하여 틀린 사례

<표 13> 곱집합 개념의 곱셈상황의 이해에 대한 문제의 정답률

	실험반	비교반
13번 문항 정답률	82%	76%

곱집합 상황에 관한 문장제인 13번 문항의 경우 실험반의 정답률이 더 높게 나왔는데, 이는 실험반이 학습 실험적 학습·지도안에는 곱집합 상황에 관한 문장제가 포함되고 있기 때문인 것으로 생각된다. 현행 제 7차 3-나 교과서의 곱셈 단원에는 곱집합 상황에 관한 문장제를 다루고 있지 않다.

라. 곱셈 알고리즘 선호도

전체 문제를 해결한 다양한 방법들의 활용률을 살펴보았을 때 비교반과 실험반 전체에서 세로셈이 가장 높게 나타났다. 실험반에서는 세로셈 다음으로 격자곱셈을 많이 활용한 것으로 나타났다(<표 14>). 이 결과는 매우 의외의 것이었으며, 그 이유를 추측해보자면, 격자곱셈이 새롭고 재미있으며 학생들이 덧셈을 할 때 세로셈처럼 기억을 따로 해야 하거나 다른 곳에 수를 써야하는 부담감이 적기 때문인 것으로 보인다. 또한 표준 알고리즘과 표시 형식이 다르지만 내용상 거의 유사하기 때문에, 표준 알고리즘을 이해한 학생이라면 그로부터 유추하여 격자 곱셈의 작동 방식을 이해할 수 있었고, 그 결과 활용도가 높아진 것으로 추측된다. 특히 어려울 것이라는 예상과는 달리 자리값의 개념이 많이 확립되지 않은 부진한 학생의 경우 격자 방법을 많이 활용하는 경향이 나타났다. 이 사실 또한 표준 알고리즘과 격자 방법의 구조가 거의 유사하다는 사실로부터 이해할 수 있다. 격자 곱셈 방법은 본시 학습에서는 어려울지 몰라도, 우수아나 부진아 모두에게 보충 학습이나 탐구 활동의 소재의 후보로서 적절할 것으로 판단된다.

학생들은 격자 방법 다음으로 가로셈 및 비례표 등을 선호하였다. 비례표에 대해서는 실험반에서 5%에 해당하는 소수의 학생들이 선호하였고, 이는 비례표가 3학년 2학기에는 부적절할 것이라는 애초의 염려를 반영한 것으로 보인다. 비례표는 지도안에서 2차시와 3차시에 등장하는데, 실험반 학생들 대부분이 비례표를 어려워하였으며, 3차시에 이르러 소

수의 우수한 학생들만이 이해하였다. 일반성과 비형식성이라는 교수학적인 장점 때문에 표준 알고리즘으로 다가가는 통로 역할을 할 수 있을 것으로 가정했으나, 결과적으로는 3학년 2학기 학생에게는 적합지 않은 것으로 생각된다.

실험반과 비교반 사이에 드러난 선호도의 차이는 다양한 방법을 지도하였을 때, 학생들에게 다양한 수학적 사고능력을 키워줄 수 있고 상황에 따라 다양하게 방법을 가지고 문제를 해결할 수 있도록 해 줄 수 있다는 점에서 시사점을 준다.

<표 14> 전체 문제에서의 다양한 방법 활용률

	실험반	비교반
표준 알고리즘	57%	93%
가로셈	11%	0
세로셈	1%	4%
격자방법	25%	0
비례표	5%	0
덧셈	0	0
암산	1%	3%

VI. 요약 및 결론

현대의 수학교육의 일반적 추세는 기능보다는 수학적 추론이나 문제 해결 나아가 수학적 창의성을 추구하는 방향을 취하고 있으며, 이러한 흐름은 초등 수학교육에서 기능 영역의 내용, 특히 산술 알고리즘의 지도 방식을 바꿀 것을 요구하고 있다. 다시 말하면 훈련과 연습을 통한 도구적 이해가 아닌 수학적 사고가 개재된 창의적인 경험을 통한 지도, 즉 Freudenthal(1973: 141)이 말한 '재발명 방법'이 그것이다. 교사는 학생들이 곱셈 문제를 푸는데 있어서 다양한 방법을 사용할 수 있다는 것을 수용해야만 하고, 그를 통하여 학생은 표준 알고리즘을 스스로 발달시키는 경험을 가져야만 한다(Gravemeijer와 van Galen, 2003).

이 논문에서는 이와 같은 문제의식을 바탕으로 현재 초등 수학 교과서 3학년 2학기 곱셈 단원의 총 4차시에 해당하는 만큼의 내용에 대한 실험적인 지도안을 구안하였다. 이 지도안을 통하여 학생은 교사의 안내를 따라 다양한 알고리즘을 접함으로써 알고리즘에 내재된 수학의 구조를 이해하고 발견하게 되고, 표준 알고리즘에 점진적으로 접근하는 방식으로 학습하였다. 비록 다양한 알고리즘을 다룰지라도, 실험적 지도안의 궁극적인 목표는 표준 알고리즘으로 설정되었으며, 거기에 도달하는 과정에서 다양한 알고리즘을 사용함으로써 비형식적인 방법에서부터 형식적 방법으로의 연속적인 이행을 성취하고자 하였다. 이렇게 구안된 지도안은 교수실험을 통하여 초등학교 3학년 학생에게 적용되었고, 그들의 곱셈 알고리즘에 대한 이해 과정을 분석하였다. 그 결과는 다음과 같다.

첫째 다양한 곱셈 알고리즘에 대한 선호도를 살펴보았을 때, 비교반과 실험반 전체에서 세로셈이 가장 높게 나타났다. 실험반에서는 세로셈 다음으로 격자곱셈을 많이 활용한 것으로 나타났다. 이 결과는 매우 의외의 것이었으며 그 이유를 추측해보면 다음과 같다. 우선 격자곱셈이 새롭고 재미있으며 학생들이 덧셈을 할 때 세로셈처럼 기억을 따로 해야

하거나 다른 곳에 수를 써야하는 부담감이 적기 때문인 것으로 보인다. 또한 덧셈을 할 때 받아올림이 일어나기는 하지만, 곱셈을 하는 순간에는 현행의 곱셈처럼 받아올림이 일어나지는 않았기 때문일 것이다. 나아가 격자 곱셈은 표준 알고리즘과 표시 형식이 다르지만 내용상 거의 유사하기 때문에, 표준 알고리즘을 이해한 학생이라면 그로부터 유추하여 격자 곱셈의 작동 방식을 이해할 수 있었고 그 결과 활용도가 높아진 것으로 추측된다. 특히 어려울 것이라는 예상과는 달리 자리값의 개념이 많이 확립되지 않은 부진한 학생의 경우 격자 방법을 많이 활용하는 경향이 나타났다. 격자 곱셈 방법은 본시 학습에서 채용된다면 도입 단계보다는 응용 단계에서, 혹은 본시학습이 아닌 보충 학습이나 탐구 활동 시간의 우수아나 부진아 모두를 위한 소재로서 적절하다고 판단된다.

학생들은 격자 방법 다음으로 가로셈 및 비례표 등을 선호하였다. 비례표에 대해서는 실험반에서 5%에 해당하는 소수의 학생들이 선호하는 것에 그쳤고, 이는 비례표가 3학년 2학기에는 부적절할 것이라는 애초의 염려를 반영한 것으로 보인다. 비례표는 실험 지도안의 2차시와 3차시에 등장하는데, 실험반 학생들 대부분이 비례표를 어려워하였으며, 3차시에 이르러 소수의 우수한 학생들만이 이해하였다. 원래 비례표를 곱셈 알고리즘의 주요 방법으로 채택하고 있는 미국의 교과서(Wijers, Lange, Gravemeijer, Querelle, 1998)는 5~8학년 대상이라고 하는 교재였다. 다양한 곱셈 방법을 허용하는 유연성과 비형식성이라는 장점에 근거하여, 비례표가 학생의 마음으로 하여금 표준 알고리즘을 향하여 점진적으로 다가가는 통로 역할을 할 수 있을 것으로 가정했으나, 결과적으로는 우리나라 초등학교 3학년 2학기 학생이 배우기에는 다소 무리가 따르는 것으로 나타났다.

둘째, 알고리즘의 다양성을 활용한 실험적 학습·지도안은 곱셈 알고리즘의 토대가 되는 자리값의 원리와 분배법칙의 이해에 효과적이나 계산의 정확성 측면에서는 그렇지 못하였다. 공분산분석(ANCOVA)을 써서 실험반과 비교반의 사후평가 결과를 분석한 결과 표준 알고리즘 이외의 다양하게 변형된 알고리즘을 학습한 실험반 집단이 비교반 집단보다 이해력 측정 평가에서는 유의한 차이를 보였으나, 계산 평가 문항에서는 유의한 차이를 보이지 않았다. 이 결과는 실험 지도안과 제 7차 교과서가 이해와 계산이라는 서로 다른 두 측면에 각각 강조점을 두고 있음을 의미한다.

둘째, 실험반 학생들은 자신이 원하는 알고리즘으로 주어진 문제를 다양하게 해결하였다. 특히 세로셈 이외의 다양한 방법들을 섞어가며 여러 가지 방법을 사용하는 학생들도 있었다. 이는 학생들에게 다양한 알고리즘을 제시하고 학생들에게 문제 해결의 선택권을 주었기 때문에 가능한 일이었다. 하지만 다양한 알고리즘의 제시로 인하여 학생들은 정확한 답을 산출해야한다는 생각이 약해졌으며, 그보다는 자신이 좋아하거나 새로운 알고리즘을 모험적으로 적용하고 실험하려는 데에 더 관심이 가게 되었고, 그 결과 계산 능력에서는 비교반에 미치지 못한 결과를 보였을 것으로 생각된다. 이 결과는 숙달을 위한 훈련과 이해 사이의 대립이라는 수학 교육에서 오래된 문제를 다시 상기시킨다. 그러나 언제나 대답은 다음과 같다. 비록 현대적인 수학교육이 훈련과 연습보다 이해와 사고를 중시하기는 하지만, 훈련과 이해는 서로 대립되는 것은 아니며, 정확한 계산 능력 또한 수학 교육이 포기할 수 없는 목적이다. Freudenthal(1973: 142)이 말했듯이 수업의 과정에서 알고리즘은 반드시 이해되고 재발명되어야만 하는 것이지만, 알고리즘의 숙달 및 그 숙달을 위한 연습 또한 수학교육에서 도외시할 수 없는 중대한 과업임에 틀림없다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2006a). **수학 3-가**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006b). **수학 3-나**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006c). **수학익힘책 3-가**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2006d). **수학익힘책 3-나**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2007e). **수학 3-가 초등학교 교사용 지도서**. 서울: 천재교육.

교육인적자원부 (2007f). **수학 3-나 초등학교 교사용 지도서**. 서울: 천재교육.

박현미, 강완 (2006). 자연수의 나눗셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식. **한국초등수학교육학회지**, 10(2), 221-242.

박혜영 (2000). **초등학교 학생의 두 자리수 이상 곱셈 전략에 관한 연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

박혜진 (2008). **자연수의 곱셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식**. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

백선수 (2002). 초등수학교실에서 알고리즘 지도 방안 탐색. **한국교원대학교 수학교육연구(靑藍數學敎育, 10)**. 153-171.

석경희, 백석윤 (2004). 초등 수학의 문장제 해결 과정에 나타난 오류 분석. **한국초등수학교육학회지**, 8(2), 147-168.

안희진 (2006). **초등학교 수학 교과서에 나타난 곱셈 알고리즘 지도 방법에 대한 분석**. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

유연진, 박만구 (2009). 초등수학 문제해결 활동에서 나타나는 아동 간 스캐폴딩 과정 분석. **한국초등수학교육학회지**, 13(1), 75-95.

전형옥, 이경화 (2008). (두 자리 수)×(두 자리 수) 해결과정에서 나타나는 학생의 비형식적 지식에 관한 사례연구. **대한수학교육학회지 수학교육학연구**, 18(4), 483-496.

Cajori, F. (1950). *A History of Elementary Mathematics with Hints on Methods of Teaching.* California: The Macmillan Company.

Eves, H. (1953). *An Introduction to the History of Mathematics.* 이우영, 신항균 역(1995). 수학사. 서울: 경문사.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gravemeijer, K., van Galen, F. (2003). Facts and Algorithms as Products of Students' Own Mathematical Activity. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., Schifter, D.(Eds). *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skemp, R. R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics,* 황우형 역(1997), 수학학습심리학. 서울: 민음사.

Wijers, M., Lange, J., Gravemeijer, K., Querelle, N. (1998). *Mathematics in Context: Reflections on Number.* Chicago: Encyclopaedia Brittanica Educational Corporation.

<Abstract>

A Design of Multiplication Unit of Elementary Mathematics Textbook by Making the Best Use of Diversity of Algorithm

Kang, Heung Kyu[3]; & Sim, Sun Young[4]

The algorithm is a chain of mechanical procedures, capable of solving a problem. In modern mathematics educations, the teaching algorithm is performing an important role, even though contracted than in the past.

The conspicuous characteristic of current elementary mathematics textbook's manner of manipulating multiplication algorithm is exceeding converge to 'standard algorithm.' But there are many algorithm other than standard algorithm in calculating multiplication, and this diversity is important with respect to didactical dimension.

In this thesis, we have reconstructed the experimental learning and teaching plan of multiplication algorithm unit by making the best use of diversity of multiplication algorithm. It's core contents are as follows. Firstly, It handled various modified algorithms in addition to standard algorithm. Secondly, It did not order children to use standard algorithm exclusively, but encouraged children to select algorithm according to his interest. As stated above, we have performed teaching experiment which is ruled by new lesson design and analysed the effects of teaching experiment. Through this study, we obtained the following results and suggestions.

Firstly, the experimental learning and teaching plan was effective on understanding of the place-value principle and the distributive law. The experimental group which was learned through various modified algorithm in addition to standard algorithm displayed higher degree of understanding than the control group.

Secondly, as for computational ability, the experimental group did not show better achievement than the control group. It's cause is, in my guess, that we taught the children the various modified algorithm and allowed the children to select a algorithm by preference. The experimental group was more interested in diversity of algorithm and it's application itself than correct computation.

Thirdly, the lattice method was not adopted in the majority of present mathematics school textbooks, but ranked high in the children's preference. I suggest that the mathematics school textbooks which will be developed henceforth should accept the lattice method.

Keywords: mathematisation, multiplication algorithm, standard algorithm, ratio table, lattice method

논문접수: 2010. 07. 05
논문심사: 2010. 07. 24
게재확정: 2010. 08. 05

3) natin@gjue.ac.kr
4) -simson-@hanmail.net

<부록> 실험적 학습 지도안

1차시 : (세 자리수)×(한 자리수)를 계산하는 다양한 방법을 알아보기

곱셈을 하여 봅시다. (1)

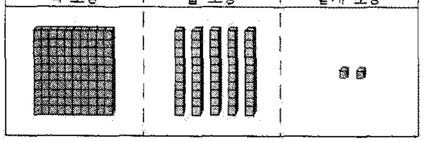
활동 1 용준이는 마트에서 귤 3상자를 샀습니다. 한 상자에는 귤이 152개씩 들어 있습니다. 용준이가 산 귤은 모두 몇 개인지 알아봅시다.

- 용준이가 산 귤은 모두 대략 몇 개일지 어림하여 보시오.

- 여러분이 어림한 값이 실제 수와 같을까요? 다르다면 어림한 수를 바탕으로 실제 산 전체 귤의 수를 구해 보시오.

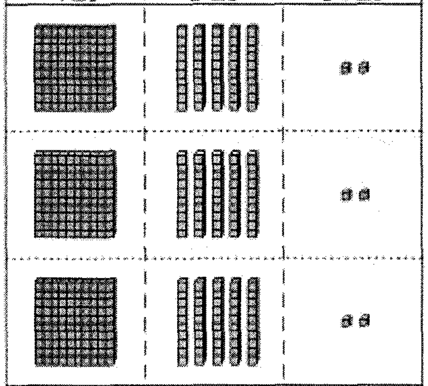
- 용준이는 전체 귤의 개수를 152×3으로 나타내고 수모형을 써서 구하였습니다.
  - 용준이는 152만큼 수모형을 놓았습니다.

백 모형	십 모형	낱개 모형



- 용준이는 152×3 만큼 수모형을 놓았습니다. 각각의 수모형의 개수를 쓰시오.

백 모형	십 모형	낱개 모형



개	개	개

- 십모형은 모두 몇 개인가요?
- 십모형을 어떻게 하면 좋을까요? 그렇게 생각하는 이유는 무엇입니까?

- 수모형을 바꿔 다시 그려보세요.

백 모형	십 모형	낱개 모형
개	개	개

- 용준이의 수모형을 보고 자리값 표를 채우시오.

백의 자리	십의 자리	일의 자리

- 용준이가 산 전체 귤의 개수는 몇 개인가요?

- 다음 곱셈을 수모형을 이용하여 해결해 보세요.

134×4

활동 2 동건이는 152×3을 다음과 같은 식을 써서 구했습니다.

100×3=300
50×3=150
2×3= 6
⇒ 300+150+6=456

- 동건이의 방법을 설명해 보세요.

- 다음 곱셈을 동건이와 같은 방법으로 해결해 보세요.

562×3　　　367×2

활동 3 운식이는 152×3을 다음과 같이 구했습니다.

$$\begin{array}{r} 1\,5\,2 \\ \times \quad\;\; 3 \\ \hline 3\,0\,0 \\ 1\,5\,0 \\ 6 \\ \hline 4\,5\,6 \end{array}$$

◈ 운식이의 방법을 설명해 보세요.

◈ 동건이의 방법과 비교해 보세요.

◈ 다음 곱셈을 운식이와 같은 방법으로 해결해 보세요.

$$\begin{array}{r} 3\,6\,7 \\ \times \quad\;\; 5 \\ \hline \end{array}$$

활동 4 우성이는 152×3을 다음과 같이 구했습니다.

$$\begin{array}{r} 1\,5\,2 \\ \times \;\; {}_{1} \;\; 3 \\ \hline 4\,5\,6 \end{array}$$

◈ 우성이의 방법을 설명해 보세요.

-작게 쓰인 "1"은 무엇을 의미하나요?

◈ 우성이와 운식이의 방법을 비교해 보세요.

◈ 다음 곱셈을 우성이와 같은 방법으로 해결해 보세요.

$$\begin{array}{r} 4\,1\,2 \\ \times \quad\;\; 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\,2\,3 \\ \times \quad\;\; 7 \\ \hline \end{array}$$

익히기 지금까지 배운 방법 중에서 각자가 좋아하는 방법으로 아래의 문제를 해결하여 봅시다.

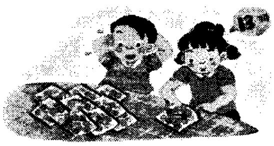
121×3　　144×2　　506×8

349×6　　726×4　　549×7

2차시 : (두 자리 수)×10, (몇 십)×(몇 십), (두 자리 수)×(몇 십)을 계산하는 간편한 방법 알아보기

곱셈을 하여 봅시다. (2)

활동 1 철수는 마트에서 사탕 10봉지를 샀습니다. 한 봉지에는 사탕이 13개가 들어 있습니다. 철수가 산 사탕은 모두 몇 개인지 알아봅시다.



◈ 철수는 전체 사탕의 개수를 13×10으로 나타내고 수모형을 써서 구했습니다.

- 철수는 13만큼 수모형을 놓았습니다.

십모형	낱개모형
▬	■ ■ ■

- 철수는 13×10만큼 수 모형을 놓았습니다.

십모형	낱개모형
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
▬	■ ■ ■
개	개

- 십모형은 모두 몇 개인가요?
- 십모형을 어떻게 하면 좋을까요? 그렇게 생각하는 이유는 무엇입니까?
- 낱개모형은 모두 몇 개인가요?
- 낱개모형을 어떻게 하면 좋을까요? 그렇게 생각하는 이유는 무엇입니까?

- 수모형을 바꿔 다시 그려보세요.

백모형	십모형	낱개모형
개	개	개

-철수의 수모형을 보고 자리값 표를 채우시오.

백의 자리	십의 자리	일의 자리

- 철수가 산 전체 사탕의 개수는 몇 개인가요?

다음 곱셈을 수모형을 이용해서 해결해보세요.

21×10

활동 2 달걀 한 판에는 30개가 들어 있습니다. 달걀이 40판 있다면 모두 몇 개인지 알아봅시다.

찬솔이와 수현이는 전체 달걀의 개수를 30×40으로 나타내고 다음과 같이 비례표를 써서 구했습니다.

<찬솔이의 방법>

×4 ×10

판의 수	1	4	40
달걀의 개수	30	120	1200

<수현이의 방법>

×10 ×4

판의 수	1	10	40
달걀의 개수	30	300	1200

- 두 사람의 방법을 설명해 보세요.

다음 곱셈을 비례표를 사용해서 해결해보세요.

40×30

1				
40				

20×60

1				
20				

50×70과 같은 곱셈값을 구하는 간편한 방법은 무엇인가요?

곱셈을 하시오.

50×80 70×40

활동 3 연필이 한 다스에 12개가 들어 있습니다. 모두 30다스를 가지고 있다면 전체 연필의 개수가 몇 개인지 알아봅시다.

지현이와 효리는 전체 연필의 수를 12×30으로 나타내고 다음과 같이 비례표를 써서 구했습니다.

<효리의 방법>

× 3 × 10

다스 수	1	3	30
연필의 개수	12	36	360

<지현이의 방법>

× 10 × 2 10+20=30

다스 수	1	10	20	30
연필의 개수	12	120	240	360

- 두 사람의 방법을 설명해 보세요.

여러분도 비례표를 써서 12×30을 구해보세요. 단, 두 사람과는 다른 방법으로 구해보세요.

1					
12					

누구의 방법이 가장 쉬운가요? 그리고 그 이유는 무엇인가요?

43×20과 같은 곱셈값을 구하는 간편한 방법은 무엇인가요?

곱셈을 하시오.

21×40 62×80

36×60 16×70

3차시 : (두 자리 수)×(두 자리 수)를 계산하는 다양한 방법 알아보기

곱셈을 하여 봅시다 (3)

활동 1 우리 반 학생은 전체 32명입니다. 학생 한 명이 방학동안 책을 23권 읽었습니다. 우리 반 학생 전체가 방학동안 읽은 책은 몇 권인지 알아봅시다.

- 전체 읽은 책이 대략 몇 권일지 어림하여 보시오.

- 여러분이 어림한 수가 실제 수와 같을까요? 다르다면 어림한 수를 바탕으로 실제 읽은 책의 전체 수를 구해 보시오.

- 수현이와 유리는 전체 책의 권수를 23×32로 나타내고, 다음과 같이 비례표를 써서 구하였습니다.

<수현이의 방법>

× 10 × 10 × 2 10+20=30 30+2=32

학생 수	1	2	10	20	30	32
읽은 책의 수	23	46	230	460	690	736

<유리의 방법>

× 4 × 8

학생 수	1	4	32
읽은 책의 수	23	92	736

- 두 사람의 방법을 설명해 보세요.

- 여러분도 비례표를 써서 23×32을 구해보세요. 단, 두 사람과는 다른 방법으로 구해보세요.

1					
23					

- 곱셈을 하시오.

27×24

1					
27					

1					
27					

1					
27					

활동 2 윤아와 보람, 선예는 전체 책의 권수를 23×32로 나타내고, 다음과 같은 방법으로 구했습니다.

<윤아의 방법>

× 10 × 2 30+2=32

학생 수	1	2	30	32
읽은 책의 수	23	46	690	736

<보람이의 방법>

23×30=690
23×2=46

⇒ 690+46=736

<선예의 방법>

$$\begin{array}{r} 2\ 3 \\ \times\ 3\ 2 \\ \hline 4\ 6 \\ 6\ 9\ \ \\ \hline 7\ 3\ 6 \end{array}$$

- 세 사람의 방법을 설명해 보세요.
- 세 사람의 방법의 공통점과 차이점은 무엇인가요?

- 23×32를 여러분 나름의 방법으로 해결해 보세요.

문제를 해결하기에 가장 좋은 방법을 선택해 보세요. 그리고 그 방법이 좋은 이유도 말해 봅시다.

익히기 지금까지 배운 방법 중에서 각자가 좋아하는 방법으로 곱셈을 하시오.

16×17 41×23 38×76

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 43 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45 \\ \times\ 36 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 97 \\ \times\ 68 \\ \hline \end{array}$$

4차시 : 격자곱셈을 알아보고 곱셈을 활용하기.

곱셈을 활용하여 봅시다. (4)

활동 1 24×49를 여러분이 좋은 방법으로 해결해 보세요.

선예와 동현이는 24×49를 다음과 같이 해결했습니다.

<동현이의 방법> <선예의 방법>

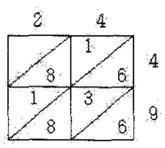
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 49 \\ \hline 960 \\ 216 \\ \hline 1176 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 49 \\ \hline 216 \\ 96 \\ \hline 1176 \end{array}$$

★ 선예와 동현이 같은 방법으로 해결하는 것을 **세로셈**이라고 합니다.

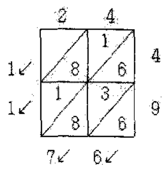
-선예와 동현이의 방법을 설명해 보시오.

활동 2 다음은 10세기경에 인도에서 발명되었던 격자 곱셈 방법을 써서 24×49를 계산한 것입니다.

<1단계>



<2단계>

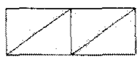


격자 곱셈의 규칙을 찾아봅시다.

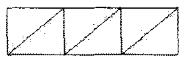
① 곱해지는 수는 격자의 위쪽에, 곱하는 수는 격자의 오른쪽에 쓴다.

격자 곱셈의 방법으로 다음 곱셈을 해 봅시다.

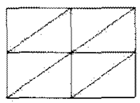
38×7



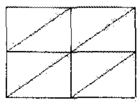
394×4



50×34



97×68



활동 3 격자 곱셈과 세로 곱셈을 비교해 봅시다.

격자 곱셈이 세로 곱셈에 비해 좋은 점은 무엇인가요?

격자 곱셈이 세로셈에 비해 불편한 점은 무엇인가요?

활동 4 지금까지 배운 방법 중 각자가 좋아하는 방법으로 문제를 해결해 보세요.

1년은 365일입니다.
3년은 모두 며칠입니까?

초콜렛이 한 상자에 30개씩 들어 있습니다. 사랑이가 40상자를 샀다면 초콜렛은 모두 몇 개일까요?

한국과 미국이 리틀 레슬링 대회를 개최하였습니다. 한국 선수는 14명, 미국 선수는 17명입니다. 한국의 모든 선수는 미국 선수와 반드시 한 번씩 경기를 해야 합니다. 한국은 모두 몇 경기를 해야 합니까?

우유 1L를 컵에 따르면 24잔이 나옵니다. 우유가 16L 있다면 컵으로 모두 몇 잔이 나오겠습니까?

인형을 한 시간에 65개씩 만드는 기계가 있습니다. 24시간 동안에는 인형을 몇 개를 만들 수 있습니까?