한국학교수학회논문집 제 13 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 13, Number 3, 357-379, September 2010

행렬의 수준별 평가에 대한 연구

이민정[1] · 이 양[2]

고교 평준화 정책 이후 교육의 수월성이 소홀히 된다는 이유로 수준별 수업의 실시 방법에 대한 많은 연구들이 있었다. 수준별 수업 이후 수준별 평가에 대한 도입이 2008년 교육과학기술부에서 발표되었고, 이는 학생들이 수준에 맞는 평가를 받는 것을 말한다. 본 연구는 Cotton의 평가가 갖추어야 할 원칙을 참고하여 Gipps의 시험의 영향에 대한 연구 결과를 강조하여 본 연구의 형성평가 문항의 구성기준을 세웠으며 이 기준에 맞게 수준별 평가 문항을 구성하였다. 먼저 본 연구는 MacGregor의 대수를 보는 관점과 Foucault의 관점에서 본 수학 수업과 Foucault의 시험에 대한 생각을 이론적 토대로 하여 행렬 단원의 교수학습 내용을 산술과 구조를 강조하여 도입하였으며 그 후, 학생들의 질문을 받아 학생들의 관심과 수준을 반영하여 수준별 평가 문항을 구성하였다. 그런 다음, 우리는 본 연구에서 설정한 형성평가 문항 기준에 맞추어 평가 문항을 적절하게 수정하였고 그 결과를 분석하였다.

주요용어 : 수준별 평가, 평가, 평가문항, 수준, 행렬

Ⅰ. 서론

고교 평준화 정책은 1974년부터 현재까지 30여년이 넘게 시행되고 있는 교육정책이다.[3] 이혜숙(2006)은 평준화 정책은 당시에 심각했던 고교진학을 위한 과열 경쟁, 과도한 사교육비 지출 및 재수생 누적, 중학교 서열화 및 위기감 심화 등의 문제를 어느 정도 해결하였다는 점에서 긍정적인 평가를 받고 있다고 한다. 그러나 학력 저하, 학교의 자율적 운영과 학교 선택권, 교육의 수월성 등과 관련하여 비판적인 시각이 제기되어 왔으며, 이에 평준화 보완 또는 폐지의 목소리가 커져 오고 있다고 지적한다.

그래서 상위권과 하위권 학생들도 학교 수업에 흥미를 가질 수 있도록 하는 수준별 수업이 필요하다는 의견이 나오고 있다. 수준별 수업에는 크게 [4]학급 간 수준별 이동수업과 학

1) 부산대학교 수학교육과 대학원, (nice1mj@nate.com)
2) 부산대학교 수학교육과, (ylee@pusan.ac.kr)
3) 이혜숙(2006)은 교육은 현재보다 더 나은 상태를 지향하는 것으로 성적 우수아만을 위한 것도 아니고 성적 열등아만을 위한 것도 아니라고 말하며 현 입시제도가 교육을 입시에 적절하도록 끌고 가고 있다고 주장한다.
4) 김홍섭 외(2008)는 교육과학기술부에서 만든 수준별 이동 수업 매뉴얼에 2008년 이후 실시될 수준별 이동 수업에 대한 방법, 절차, 설문지 등을 정리해 놓았다.

급 내 수준별 수업이 있는데 본 연구에서는 연구한 학교 여건상 정규 시간에는 학급 내 수준별 수업을 하고, 방과 후 학습 시간에는 학급 간 수준별 이동수업을 하여서 정규 시간의 학급 내 수준별 수업에 초점을 맞추어 수업을 하였다. 수업과 연결해서 평가도 수준별로 이루어지도록 문항을 구성하였다.

행렬은 기원전 4세기 경 바빌로니아인에 의해 점토판의 방정식 풀이를 시초로 하여, 기원전 3세기 경 동양 중국에서 선형방정식의 풀이 형태로 행렬을 사용하였다. 행렬에 대한 이론은 Cauchy, Jacobi, Gauss, Sylvester, Cayley, Hamilton, Jordan, Frobenius 등의 수학자들에 의해 발전하였고, 행렬의 경우 덧셈에 대해서는 교환법칙과 결합법칙이 성립하고, 곱셈에 대해서는 결합법칙과 분배법칙이 성립하지만 교환법칙은 성립하지 않는 그 당시에 알려진 대수학의 기본법칙과 다른 구조를 갖고 있어 이를 계기로 많은 대수 이론이 만들어졌다.(우정호 외, 2002). 행렬 이론은 경제학, 자연과학, 공학 등에서도 응용되고 있으며, 행렬은 그 역사 속에서 다양한 수준과 양의 문제들을 갖고 있어서 수준별 평가 문항을 구성하는데 적절하다.

본 연구는 수학Ⅰ 행렬 단원의 전체적 흐름을 구성하여, 2008년 새롭게 나온 수준별 평가 문항을 구성해 나가는 과정에 대해 연구한 것이므로 큰 의의가 있다고 본다.

수준별 평가에 대한 연구는, 박대연 외(2000)가 7차 교육과정 함수 영역에서 고등학교 1학년 수준별 평가 문항을 구성했었지만 2008년 대부분의 학교에서 수준별 평가를 정기 고사에서 실시하지 않고 있었기 때문에 구성한 수준별 문항과 정기 고사 문항을 비교하여 결과를 분석한 연구는 부족하며, 특히 7차 교육과정에서 1~10단계 (초등학교 1학년~고등학교 1학년) 에 해당하는 [5]단계형 수준별 교육과정이 아닌, 학생이 자기의 진로, 능력, 취향에 맞는 과목을 선택하는, 심화선택과목인 수학Ⅰ 교과의 경우 대부분의 학교에서 수준별 이동 수업이 이루어지지 않고 있었으며, 2010년에는 일부 고등학교의 경우 수학Ⅰ 정규 시간에도 수준별 이동수업이 이루어지고 있으나, 그 시행 기간이 짧아 수학Ⅰ 행렬 단원에 대한 수준별 평가 문항 구성에 대한 학교 현장의 연구는 많이 부족하다.

본 연구에서는 수준별 평가에서 문항의 [6]정답률이 전체 시험 대상의, 상 수준은 34%이하, 보통 수준은 34%초과 67%이하, 하 수준은 67%초과로 나오면 문항이 적절하다고 보았다. 각 수준의 비율을 약 33%로 같게 한 이유는 보편적으로 고등학교에서 교실의 여유가 없어 성적순으로 동일 인원으로 반 편성을 하여 수준별 이동 수업을 실시하고 있다고 널리 알려져 있기 때문이다.

Cotton(2004)은 국가적 차원에서 영국에서는 평가 개발자들이 평가를 <표 Ⅰ-1>과 같이 해야만 한다는 5가지 원칙을 세웠고, Gipps(1994)는 시험의 영향에 대해 6가지 연구 결과를 <표 Ⅰ-1>과 같이 제시하였다. <표 Ⅰ-1>을 보면, 시험 결과들은 정치적 압박과 대중매체의 관심이 있을 때 점수들이 부풀려질 수 있으므로, 그것들은 학생 성취도에 대한 그릇된 영향을 줄 수 있으며, 시험은 교육 과정을 좁혀서 시험 항목만 가르쳐지고, 쉬운 기술에 대해조차도 잘못 지시하게 하며, 이런 종류의 연습과 훈련은 생각을 발달시킬 기회를 거부하며, 점수에 대한 압박 때문에 개념은 더 가르치기 어려워지고 체계에 의해 거부당하고, 외부적으로 위임된 시험 내용은 교사의 전문 지식과 지위를 줄인다고 한다. 그러므로 배우는 것

5) 단계형 수준별 교육 과정은 학생들의 능력 수준 단계에 따라 이동식 수업을 하거나 열린 수업 또는 개별화 수업을 실시할 수 있다.

6) $\text{정답률} = \dfrac{\text{정답을 한 학생 수}}{\text{전체 학생 수}} \times 100\%$

을 개선하고, 배운 것을 평가하며, 교육 과정 대상의 과정에 초점을 맞추어, 시험의 질을 평가하고, 학교 연습에 일반적으로 적합한, 형성 평가 문항을 수준별로 구성해 보았다.

<표 Ⅰ-1>의 Cotton의 평가가 갖추어야 할 원칙을 참고하여, Gipps의 시험의 영향에 대한 연구결과를 강조하여 <표 Ⅰ-2>와 같이 본 연구에서 형성평가 문항의 구성 기준을 세웠다.

본 연구에서 문항 구성의 조건은 "문항제작자의 저작권을 보호하여 각 수준 당 1문제씩 구성하고, 각 수준의 정답률이 적절한 퍼센트(%)여야 하며, 상 수준을 맞추면서 보통 수준을 틀리는 학생이나 보통수준을 맞추면서 하 수준을 틀리는 학생의 경우 12%범위내만 인정하고, 질문을 받아 학생들 수준, 관심을 반영하며, 정기고사(성적)에 반영될 가능성을 염두에 두어야 하고, 교육 과정 대상의 과정에 초점을 맞추어야 한다." 고 하였다.

형성평가 문항이 갖추어야 할 조건은 "풀이과정을 쓰도록 하고, 배우는 내용의 개선을 위한 것이며, 배우는 내용이란 교육과정에 포함된 내용이되, 이해를 돕기 위해 상위권 학생에게 교육과정에 없는 내용도 제시할 수 있으나, 평가에 반영은 안 되어야 하며, 수업 진행 중에 시행되어야 하며, 성적에 반영이 안 되어야 한다." 고 하였다. 본 연구에서는 상, 중, 하 수준의 학생들이 골고루 수학에 대한 관심과 이해를 증진시킬 수 있는 평가 문항을 구성하는 과정에 대해 연구하는 것이 목표이다.

<표 Ⅰ-1> Cotton의 평가가 갖추어야 할 원칙 및 Gipps의 시험의 영향에 대한 연구 결과

Cotton의 평가가 갖추어야 할 원칙	배우는 것을 개선
	배우지 않은 것보다는 배운 것을 평가
	교육 과정 대상의 과정에 초점을 맞추어,
	시험의 질을 평가하고,
	학교 연습에 일반적으로 적합함.
Gipps의 시험의 영향에 대한 연구 결과	시험 결과들은 정치적 압박과 대중매체의 관심이 있을 때 점수들이 부풀려질 수 있으므로, 그것들은 학생 성취도에 대한 그릇된 영향을 줄 수 있으며,
	시험은 교육과정을 좁혀서 시험 항목만 가르쳐지고,
	시험은 쉬운 기술에 대해조차도 잘못 지시하게 하며,
	이런 종류의 훈련과 연습 지도는 배우는 이론을 뒤처지게 하고, 배우는 것을 향상시키는 것이 아니라 생각을 발달시킬 기회를 거부하며,
	시험 점수에 대한 압박 때문에 개념은 더 가르치기 어려워지고 체계에 의해 거부당하고,
	외부적으로 위임된 시험 내용은 교사의 전문 지식과 지위를 줄임.

<표 Ⅰ-2> 본 연구에서 형성평가 문항의 구성 기준

문항의 수준을 나누는 근거	• 문항의 정답률은 전체 시험 대상의 상 수준: 상위 34% 이하, 보통 수준: 34% 초과 67% 이하, 하 수준: 67% 초과 (성적순 반 편성 때문)
문항 구성의 조건	• 각 수준 당 1문제씩 구성 (문항 제작자의 저작권 보호)하고,
	• 각 수준의 정답률이 적절한 퍼센트(%)여야 하며,
	• 상 수준을 맞추면서 보통 수준을 틀리는 학생이나 보통수준을 맞추면서 하 수준을 틀리는 학생의 경우 12%범위내만 인정하고,
	• 질문을 받아 학생들의 수준과 관심을 반영하며,
	• 정기고사(성적)에 반영될 가능성을 염두에 두어야 하고,
	• 교육 과정 대상의 과정에 초점을 맞추어야 함.
형성평가 문항이 갖추어야 할 조건	• 풀이과정을 쓰도록 하고,
	• 배우는 내용의 개선을 위한 것이며,
	• 배우는 내용이란 교육과정에 포함된 내용이되, 이해를 돕기 위해 상위권 학생에게 교육과정에 없는 내용도 제시할 수 있으나, 평가에 반영은 안 되어야 하며,
	• 수업 진행 중에 시행되어야 하며,
	• 성적에 반영이 안 됨.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 2008년 수준별 평가의 도입

[7]교육과학기술부(2008)는 4월 15일 4. 15 학교자율화 추진계획을 발표했고 교육인적자원부(2008)는 2008년 1월 17일 수준별 평가에 대해서도 발표했는데, [8]수준별 평가란 수준별 수업이후 $\frac{2}{3}$는 똑같이 출제하고 나머지 $\frac{1}{3}$은 수준에 따라 다르게 출제하는데 [그림 Ⅱ-1]과 같다.

[그림 Ⅱ-1]과 같이 하 수준 문항을 선택한 학생은 이 문제를 풀어서 맞았더라도 100점을 받을 수 없다. 그러므로 100점을 받기 위해서는 상 수준 문항을 선택하여 맞추어야 한다. 따라서 상 수준의 학생이 하 수준 학생 보다 실력은 있으면서 더 낮은 점수를 받는 일이 없도

7) 2008년 4월 15일 교육과학기술부(장관)는 학교 자율화 추진계획을 발표하였다. 0교시 수업 전면 허용, 우열반 편성 허용, 사설 모의고사 허용 등이다.
8) 2008년 1월 17일 세계일보에서 올해부터 고등학교 중간, 기말고사 등 내신 시험에 수준별 평가 방식이 도입된다고 했고, 그에 대해 교육인적자원부는 2008년 1월 17일 수준별 수업 효과 제고를 위해 연구 용역이 진행 중에 있으며, 상반기 중 단위학교 여건과 상황에 따라 적용, 시행할 계획이라고 해명했다.

1. 다음 중 수준에 맞는 문제를 하나만 선택하여 선택문항을 표시하고 풀어보시오. (1)6점짜리 문제(상 수준) (2)4점짜리 문제(보통 수준) (3)2점짜리 문제(하 수준)

[그림 II-1] 수준별 평가의 예

록 수준별 평가 문항은 아주 잘 구성되어야만 한다. 그러므로 교육 현장에서의 수준별 평가 시행과 결과 분석이 필요하다. 앞으로 자세한 서술이 있겠지만 행렬 이론은 수준별 평가의 도입으로 효율적인 수업과 평가를 가능하게 해 줄 수 있는 대표적인 교재를 제시해 줄 수 있다. 교육 정책을 볼 때 수준별 평가에 대한 연구가 필요하며, 행렬은 그 연구를 하는 데 적절하다고 볼 수 있다.

2. MacGregor의 대수를 보는 관점

<표 II-1> 본 연구의 이론적 배경

이론적 배경			연구할 점
2008년 수준별 평가 도입	교육인적자원부는 2008년 1월 17일 수준별 평가를 도입한다고 발표.		교육 현장에서의 수준별 평가 시행과 결과 분석이 필요함.
MacGregor의 대수를 보는 관점	대수학 학습에서 상, 중, 하위권에 속하는 학생들이 수학적 문맥을 이해하는 능력도 거기에 상응한다고 볼 수 있음.		행렬 지도상에서 산술과 구조에 대한 지도에 수준별 시행이 필요함.
Foucault의 관점에서 본 수학 수업과 Foucault의 시험에 대한 생각	Foucault의 관점에서 본 수학 수업	학생들이 교사의 응시를 피하고, 틀렸다는 사실에 솔직하지 않는 산만한(discursive) 수업임.	개인별 학습효과가 다양하므로 수준별 평가가 필요함.
	Foucault의 시험에 대한 생각	학생들을 응시, 감시, 감독, 자격을 부여하고, 분류하는 것이라고 함.	

행렬에 대한 이론은 상, 중, 하 수준에 속하는 각 수준의 학생들에게 적합한 수준들의 내용을 다양하게 갖추고 있기 때문에 행렬 단원을 선정하여 수준별 평가 문항을 구성하였다. 예컨대 덧셈, 곱셈에 관련된 행렬 집합의 단순한 대수적 구조는 하위권에 적합하고 역행렬 등과 관련된 이론은 중위권 이상의 학생들에게 적합하고 멱영(nilpotent)인 행렬들에 대한 이론은 상위권 학생들에게 적합한 예가 될 것이다.

[9]MacGregor(2001)에 의하면, 학생들이 쓰인 글에 의지해서 학습하는 모든 경우에 읽기

9) MacGregor(2001)는 난독증(dyslexia)에 대해 논의를 하는데, 대수 교육이 학교 이후의 삶에 얼마나 혜택이 있느냐에 대해서 대부분의 사람들이 혜택이 없다고 생각한다고 한다. 그러므로 난독증이 있어 대수의 산술과 구조를 이해하지 못하는 사람들의 학습에도 의미를 두어야 한다고 주장한다.

기술[10]이 영향을 미친다고 알려져 있다고 한다. MacGregor(2001)는 만약 학생들이 대수적 개념과 대수적 절차를 이해하고 사용하고자 한다면 학생들은 언어 구조의 의식적인 인식과 이런 구조들을 조작하고 통제하는 능력을 필요로 한다고 주장했는데, 이에 따르면, 대수학 학습에서 상위권, 중위권, 하위권에 속하는 학생들은 읽기 능력도 거기에 상응한다고 볼 수 있을 것이다.

<표Ⅱ-1>은 본 연구의 이론적 배경을 표로 요약한 것이다. <표Ⅱ-1>에서 MacGregor의 대수를 보는 관점을 보면, 대수학 학습에서 상위권, 중위권, 하위권 각각에 속하는 학생들이 수학적 문맥을 이해하는 능력도 거기에 상응한다고 볼 수 있으며, 따라서 행렬 지도상에서 산술과 구조에 대한 지도[11]에 수준별 시행이 필요하다.

실제로 난독증(dyslexia)이 있는 학생은 기호의 순서와 공간의 배열이 구조적인 곳에서 수학적 기호를 읽는 데 어려움을 가진다고 한다. 즉, 난독증(dyslexia)이 있어 대수를 잘 이해하지 못하는 학생들도 고려하여 지도되어야 한다. 행렬은 중요한 대수 구조를 설명하는 예이며 위에 의거하여 행렬 지도하고 평가할 때 대수를 보는 관점을 MacGregor의 관점으로 보고 설명할 필요가 있다.

3. Foucault의 관점에서 본 수학 수업과 Foucault의 시험에 대한 생각

Foucault의 수업과 평가에 대한 이론을 논의하는 이유는 행렬이론이 갖고 있는 수업과 평가에 관련된 관점들을 부각시키기 위한 것이다. 행렬이론은 시각적인 강의를 할 수 있는 내용을 많이 포함하고 있기 때문에 대다수의 학생들의 흥미를 유도할 수 있다. 산만한 수업을 피할 수 있는 좋은 교재를 제공할 수 있게 되고 따라서 평가도 학생들에게 만족을 줄 수 있는 가능성이 매우 높기 때문이다.

수학교육학자 Hardy(2004)는 포스트모더니즘 시대에 Foucault의 관점에서 본 수학 수업에 대해 연구결과를 발표했는데, 교사들은 수학 수업 시간 중 자신이 학생들 모두를 총괄적으로 훑어본다—숨을 곳이 없다-고 생각하지만 몇몇 학생들은 선생님의 응시를 피한다고 한다. 교사가 모든 곳에 항상 있지 않기 때문이라고 하며, 그러한 학생들은 또한 틀렸다는 사실에 솔직하지 않을 수 있다고 한다. 그들은 질문을 했을 때 느리게 반응하고 마지막 선택을 피할 수 있다고 한다. 이런 수학 수업을 Hardy(2004)는 프랑스의 철학자 Foucault(1972)의 용어를 사용하여 "산만한(discursive) 수업" 이라고 한다.

그럼에도 불구하고 Hardy(2004)는 "몇몇 위험을 가지지 않는다면 어떤 것도 얻을 수 없다." 라고 말하며, 위험이 있더라도 학생의 개인차를 존중하는 수업은 필요하다고 강조하고 있다.

수업과 평가는 연결되어 이루어져야 하는데, 평가에 대해 Foucault(1977)는 시험을 정상화(Normalization)하는 응시, 감시, 감독, 자격을 부여하고 분류하는 것이라고 한다. 그는 이것이 개인을 차별화하고 판단하게 한다고 한다. 행렬의 수준별 평가를 통해 완벽히 개인차를 반영하지는 못하겠지만 위험이 있더라도 평가에 있어서 학생들을 분류하는 것이 아니라 학생들 개인에게 만족감을 주고자 시도해 보았다. <표Ⅱ-1>에 Foucault의 관점에서 본 수학

10) 문맥의 의미를 잘 파악하는 학생은 읽기 기술이 있는 학생을 의미한다.

11) 김성준(2004)은 대수의 학습-지도 방향에서 산술과 구조에 대한 지도가 필요하다고 강조한다. 왜냐하면 기존의 대수 교육은 산술을 많이 강조하였기 때문에 개선이 필요하다고 한다.

수업과 평가와 연구할 점을 제시하였다. 수학 수업도 포스트모더니즘 시대에 맞추어 개인에 초점을 맞추어 지도와 평가가 이루어져야 할 것이다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구의 목적은 학생들이 행렬을 배우는 목적을 분명히 하도록 하고 고등학교 수준에 맞추어 행렬을 하나의 구조로 정리하고 수준별 평가 문항을 구성하는 과정을 연구하는 것이다. 즉, 학생들이 행렬을 잘 이해할 수 있도록 수업을 한 후, 평가도 학생들이 골고루 흥미를 유지할 수 있도록 하는 것이다. 그래서 아래와 같은 과정을 거쳤다. 본 연구는 2002년~2007년에 걸쳐 수학Ⅰ 행렬 수업을 하며 개선되었던 점을 토대로 2008년 3월 J고등학교 2학년 4개 반 학생들을 대상으로 연구를 한 후, 과학 기술 집중과정 1개 반을 대상으로 형성평가를 실시하였다. 두 번째 평가 시에는 과학 기술 집중과정 1개 반과 인문 사회 집중과정 1개 반을 대상으로 실시하였다. 세 번째 평가 시에는 I고등학교 1개 반을 대상으로 실시하였다.

2. 연구 방법

2002년~2007년에 걸처 수학Ⅰ 교과서와 몇몇 알려진 대수학 서적(Anton, 1995; John, 1989; McCoy, 1942)를 읽어봄을 통해 행렬의 역사, 연산 성의 이유, 성질, 연습 문제 등의 자료를 수집하여 수학Ⅰ 행렬을 환의 구조에 초점을 맞추어 정리하여 수업해 보았다. 행렬에 대한 수업을 14~15차시 (1~2차시: 행렬 연산 개념과 간단한 예, 3~4차시: 행렬 곱셈에 대한 문제 풀이, 5~6차시: 역행렬 개념 문제, 7~8차시: 문제 풀이, 9~10차시: 역행렬과 연립일차방정식, 11~12차시: 연습문제 풀이, 13~14차시: 종합 연습문제 풀이) 에 걸쳐 4개 반에서 한 후 연습 문제를 풀면서 행렬 단원 전반에 걸친 질문을 받았다. 그 후 질문한 학생과 수업 시간, 쉬는 시간에 인터뷰를 하고 답변을 하면서 학생이 모르는 부분과 개념에 대해 분석하였다. 본 연구에서 학생 이름과 질문 내용은 기록을 했으며 그것을 바탕으로 수준별 평가 문항을 구성해 보았다. 이 때 수준별 평가 문항은 행렬에 대한 모든 차시의 수업이 마친 후 수업 시간 중 행렬 전반에 대한 형성평가로 실시되었다. 이종규(2006)는 인터뷰할 때 본인의 반응을 통제하고 참여자가 안락함과 안정감을 느끼고 그들의 견해를 공개적으로 말할 수 있도록 하라고 했다. 그래서 본 연구에서는 평가적 반응을 통해 편향되지 않도록 주의했으며 학생들이 수업 시간 중 의도된 실험이라는 언급 없이 자연스럽게 이야기할 수 있도록 유도하였다. 이런 방식으로 수업한 4개 반 중 1개 반 30명을 대상으로 하여 형성평가를 한 결과를 분석해 보니 이 수준별 평가 문항이 각각의 수준에 적합하지 않다고 판단되어 정기고사의 문항분석표에서 학생 수준에 맞는 문항을 추출해 재구성하였다. 구성 이후 상 수준을 맞으면서 보통 수준을 틀리는 것과 같은 경우의 학생 수를 조사하기 위해 2개 반 학생을 대상으로 다시 평가한 후 최종적으로 학생들에게 문항 풀이를 하였다. 다른 상황의 학교의 경우를 알아보기 위해 그 다음 해 다른 학교 1개 반 학생을 대상으로 다시 평가를 실시하고 결과를 분석하였다.

3. 교수 학습 내용

본 연구에서는 교과서에서 '환' 구조를 제시하지 않고 지도하는 문제점을 드러냄을 통해 '환'에 초점을 맞추어 수업을 할 것이다. 하지만 Cotton의 원칙에 입각해서 현 교육과정에 '환'의 도입이 없으므로 평가문항에는 반영하지 않을 것이다. 수준별 평가문항 구성 과정에서 "환"을 제시하여 교수학습을 한 이유는 행렬에 대한 올바른 개념을 학생들이 깨닫도록 하기 위해서이다.

다음과 같은 수업 순서 1)부터 3)까지 차례대로 가르치면 좋을 것이다. 행렬의 크기는 고등학교 과정이므로 특별한 언급이 없으면 2×2행렬로 보았다.

1) 먼저 행렬의 역사와 실용성에 대해 설명해 준다. [12]우정호 외(2002)는 행렬이 어디서 생겼는지 정확히 아는 사람은 없으나 행렬식에 대한 연구가 있었고 그 후에 행렬(Matrix)에 대한 연구가 영국의 수학자 케일리에 의해 시작되었다고 한다. 행렬 이론 응용의 예를 들면, 요즘 3D게임에서 3차원 공간을 2차원(모니터)에 묘사하는 것을 들 수 있다.

2) 그 다음 행렬 집합에서 닫혀 있다는 개념, 덧셈, 뺄셈, 실수배, 곱셈 연산의 정의를 차례대로 설명해 준다. 그 후 연산의 성질에 대한 설명은 간단하게 하며 번호를 매긴다. 대학교에서 행렬에서의 연산들은 선형대수학의 기본을 이루는 내용이다. 벡터 공간에서 선형변환들의 집합이 다시 벡터공간이 되고 행렬들의 집합의 성질들도 벡터공간이 된다. 선형변환들의 집합과 행렬들의 집합은 동치 관계, 즉 선형변환 하나하나는 행렬들로 표시 된다. 이 경우 선형변환들의 합성은 행렬의 곱셈으로 나타나는데 여기서 행렬의 곱셈 정의가 자연스럽게 유도되며 덧셈의 경우도 마찬가지이다. 다음에 언급되는 행렬의 성질은 선형변환의 성질에서 자연스럽게 유도되는 것이다. 고등학생들 중에서 "행렬의 곱셈은 왜 덧셈처럼 대응하는 성분끼리 곱하지 않는 거예요?" 와 같이 행렬의 곱셈의 정의에 대해 의문을 가지는 학생들이 있었다. 이 학생들에게는 위의 내용을 언급해도 될 것이다. 마찬가지로 행렬의 실수배에 대해 의문을 가지는 학생들에게는 다음을 언급해도 될 것이다. 먼저 실수의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 환을 형성한다. 그리고 실수의 집합 R 위에서 정의된 행렬 환을 M이라 할 때, R에서 M으로의 함수 $f: R\to M$, $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$를 생각하면 f는 환의 구조를 보존하는 일대일 함수가 된다. 따라서 이 함수를 통하여 R은 M의 부분환으로 취급될 수 있다. 여기서 부분환의 의미는 부분집합으로서 같은 연산을 가지고 자신이 환이 되는 경우를 말한다. 그러므로 f를 통하여 실수와 행렬의 덧셈과 곱셈이 가능해지는 것이다. 즉 실수 α와 행렬 A에 대하여 $\alpha + A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + A, \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} A$ 가 되는 것이다. 여기서 $\alpha + A$는 상위권의 학생들에게 심화학습의 내용으로 제시할 수 있을 것이다. 하지만 Cotton

12) 우정호 외 5인(2002)의 수학 I 교사용 지도서에는 행렬의 역사에 대한 설명이 잘 나와 있다.

의 원칙에 입각해서 선형변환과 추후에 언급될 환, 부분환은 교육과정에 없으므로 평가 문항에는 제외되어야 한다.

3) 그 다음, 행렬의 성질에 대해 2008년 3월 행렬 수업할 때 [그림 Ⅲ-2]와 같이 행렬이 "환"이라는 데 초점을 맞추어 교과서를 재구성하여 설명하였다. [그림 Ⅲ-1]은 [13]A, B 교과서에 제시된 행렬의 성질이다. 여기서 학생들은 연산의 법칙을 왜 배우는지 알지 못하고 교환법칙이나 결합법칙이 성립한다는 것을 계산을 통해 간단히 확인해 보고 진도를 나가며, 결합법칙을 왜 공부하는지 몰라서 생략하고 넘어가는 경우가 많다.

※ 교과서에 제시된 행렬의 성질들

행렬의 성질①

같은 꼴의 행렬 A, B, C 에 대하여

(1) $A+B=B+A$ (교환법칙)

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (결합법칙)

행렬의 성질②

같은 꼴의 행렬 A, B 와 임의의 실수 k, l 에 대하여

(1) $(kl)A=k(lA)$ (결합법칙)

(2) $(k+l)A=kA+lA$

$k(A+B)=kA+kB$ (분배법칙)

행렬의 성질③

곱과 합이 정의되는 세 행렬 A, B, C 에 대하여

(1) $(AB)C=A(BC)$ (결합법칙)

(2) $A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$ (분배법칙)

(3) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$ (단, k는 실수)

[그림 Ⅲ-1] A, B교과서에 제시된 행렬의 성질

※구조적인 면에서 재구성한 행렬의 성질

행렬의 집합을 생각하자.

두 행렬 A, B가 같은 꼴일 때, A와 B의 대응하는 성분의 합을 각 성분으로 하는 행렬을 A와 B의 합 $A+B$라 하자.

두 행렬 A, B에 대해 A의 열의 개수와 B의 열의 개수가 같을 때, 행렬 A의 i행과 행렬 B의 j열의 성분을 차례로 곱하여 합한 것을 (i, j)성분으로 하는 행렬을 행렬 A와 B의 곱 AB라 하자.

그러면 이 집합은 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀 있다. 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀 있는, 교과서에 자주 나오는 2차 정사각행렬들의 집합을 생각하자. 그러면 이 집합에 속하는 임의의 행렬 A, B, C, O(영행렬), E(단위행렬) 에 대하여

(1) $A+B=B+A$
(덧셈에 대한 교환법칙이 성립)

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
(덧셈에 대한 결합법칙이 성립)

(3) $A+O=O+A=A$
(덧셈에 대한 항등원 O가 존재)

(4) $A+(-A)=-A+A=O$
(A의 덧셈에 대한 역원 $-A$가 존재)

(5) $(AB)C=A(BC)$
(곱셈에 대한 결합법칙이 성립)

(6) $A(B+C)=AB+AC$
$(A+B)C=AC+BC$
(행렬의 덧셈, 곱셈에 대한 좌 분배, 우 분배 법칙이 성립)

(7) $AE=EA=A$
(행렬의 곱셈에 대한 항등원 E가 존재)

그러므로 2차 정사각행렬의 집합은 단위원(단위행렬)을 가지는 환이 된다.

※행렬의 실수배에 대해서

행렬 A의 각 성분에 일정한 실수 k를 곱한 수를 성분으로 하는 행렬 을 행렬 A의 k배라고 하고, kA와 같이 나타낸다. 그러면,

같은 꼴의 행렬 A, B와 임의의 실수 k, l 에 대하여

(1) $(kl)A=k(lA)$ (결합법칙) (2) $(k+l)A=kA+lA$

$k(A+B)=kA+kB$ (분배법칙)

[그림 Ⅲ-2] 본 연구에서 재구성한 행렬의 성질

본 연구는 이것이 읽기 기술이 약한 학생들이 행렬의 구조를 이해하는 것을 어렵게 한다고 보았다. [그림 Ⅲ-2]는 본 연구에서 재구성한 행렬의 성질이다. 그래서 교과서와 차이점이 있다면 교과서는 덧셈 연산을 가르치고 덧셈에 대한 연산법칙을 가르치고 곱셈 연산을 가르치고 곱셈에 대한 연산 법칙을 가르쳤다면 본 연구는 행렬의 집합에서 연산을 가르치고 그 후에 합과 곱이 정의되는 2차 정사각행렬의 집합을 생각해서 환의 정의에 입각해서 연산법칙에 번호를 매겨 재구성해서 가르쳤다는 것이다. 2차 정사각행렬의 경우 고등학교 과정에서 많이 나오는 행렬이며, 단위행렬에 대한 설명이 가능해 진다. 물론 교과서에 제시된 내용을 설명한 후 재구성한 것을 설명해 주었다.

13) A, B교과서는 대한 교과서(주)와 금성출판사(주) 교과서의 내용이다. 참고문헌에 언급되어 있다.

"환"이라는 용어를 사용한 이유는 대수학에서 중요한 역할을 하며 대수적 구조인 환의 정의를 환이라는 용어를 사용함으로써 많은 편리함을 얻을 수 있기 때문이다. 그러므로 환이라는 용어를 사용하는 것을 추천한다. 실제로 현장에서 환의 구조를 설명할 때 환을 제기할 때마다 그 정의에 대한 성질들을 모두 나열해야 하는 번거로움이 있기 때문에 환의 용어를 사용하면 상당히 간결해질 수 있다. 물론 학생들이 환의 정의를 이해하는 어려움을 거쳐야 하겠지만 이것을 거치게 되면 그에 따르는 이득은 상당할 것이다. 환의 정의는 다음과 같다.

> McCoy(1942)는 "환"은 어떤 집합이 두 연산에 대해 닫혀 있으며 한 연산에 대해 교환, 결합 법칙이 성립하고 그 연산에 대한 항등원, 역원이 존재하며 나머지 한 연산에 대해서는 결합 법칙이 성립하고 두 연산에 대한 좌 분배, 우 분배 법칙이 성립할 때 그 집합을 "환" 이라고 한다고 했다.

위의 시행에서처럼 "환"이라는 용어를 도입했을 때의 학습효과가 증진되는 경우가 있는 것처럼, 도입함으로써 오히려 더 어렵게 느껴지고 혼란스러워지는 학생들의 군도 있을 것이다. 그러므로 MacGregor의 대수를 보는 관점과 같이 실제의 수업에서는 대상학생 군의 수준에 따라 "환" 이라는 용어를 도입할 것인가를 결정해야 할 것이다. 상위권 학생의 경우 "환"이라는 용어를 도입했을 때의 학습효과가 증진되었다. 그러나 도입하지 않는 경우에는 행렬 집합이 가지고 있는 환의 공리적 구조가 저절로 습득이 될 정도로 다양한 예들을 통해서 학습시켜야 할 것이다. 즉, 본 연구에서는 용어를 도입해서 학습효과가 있는 부류의 학생들을 지도할 때의 효율성 있는 교재구성을 공부하고자 하는 것이고, 일반적으로 도입하여야 한다고 주장하는 것은 아니다.

1)부터 3)까지 수업 후 역행렬과, 역행렬과 연립일차방정식 수업을 한 후에 학생들의 질문을 받았다.

4. 학생들의 질문 분석

<표 Ⅲ-1> 학생들의 질문, 분석 및 적합한 수준 제시

학생들의 질문	분석	적합한 수준 제시
S1 : 덧셈, 곱셈, 교환법칙, 분배법칙, 결합법칙, 항등원, 역원은 쉬워요. S2 : 그런데 "환"의 정의 중 "두 연산"에서 왜 2차 정사각행렬에서는 "덧셈, 곱셈"이 되는 건가요? S3 : "행렬의 나눗셈"은 왜 안 되나요? S8 : 행렬의 역행렬과 실수의 역원이 무엇이 다른가요? (본 연구 수업을 듣지 않은 학생의 질문임)	행렬에 대한 기본 개념 이해가 부족하며, 환, 선형 변환 등의 대수 구조에 대한 이해가 필요하며, S2학생의 질문은 고등학교 수준에서 벗어나 개별적으로 질문에 답해 주었다. 실제로 "2차 정사각행렬이 환이 됨을 증명하시오." 라는 실험된 형성평가에 90% 이상의 학생이 답하지 못했다. 설명을 위해 필요한 부분만의 언급이 요구되고, 직접 "환"의 정의를 평가문항에 반영하기에는 곤란하며,	기본 연산의 정의, 법칙을 다루는 문항이 하, 보통 수준 문항으로 적합함.

	참고로 S1, S2, S8 학생은 중, 하위권 학생이었고, S3학생은 상위권 학생이었음.	
S4 : 선생님, 행렬의 성질에 대해 옳은 것, 옳지 않은 것 고르는 것은 너무 어려워요. 반례 찾는 규칙 없나요? S5 : "AB의 역행렬이 존재하면 A, B의 역행렬이 존재한다." 는 왜 옳은가요? S6 : 케일리-해밀턴 정리의 역이 일반적으로 성립하지 않는데 역이 성립하는 경우도 있다 하던데요. 어떤 경우인가요? 왜 그래요? S7 : 모든 행렬이 영인자를 가지는 가요?	수학 교사에게도 수준이 높은 질문 내용이 있었으며, S5, S6 질문은 직접 이차 정사각행렬을 두고 성분들끼리 곱셈을 하여 증명이 가능하나, 과정이 길고 복잡하여 증명을 해 보도록 유도하고, 직접 증명과정을 보여 주었고, 반례 찾는 규칙이라면 직접 성분을 두고 계산하는 것이 가장 좋으나 일반적이지는 않고, 참고로 S4, S6학생은 중위권 학생이었고, S5, S7학생은 상위권 학생이었음. 영인자와 케일리-해밀턴 정리의 개념은 고등학교 교과서에 작은 글씨로 나옴.	전반적인 내용을 물어볼 수 있으므로 옳은 것, 옳지 않은 것 고르는 것이 상 수준 문항으로 적합함.

다음은 학생들에게 질문을 자유롭게 받아 인터뷰한 내용이다. 수업을 한 후 인터뷰를 받아 평가 문항을 작성한 이유는 학생들의 수준과 관심을 반영한 평가 문항을 구성하기 위해서이다. 관심을 형성 평가에 반영하는 이유는 학생들이 공부에 흥미를 유지하도록 하기 위해서이다. 다음은 S1~S8 학생들의 수학적 이야기이다.

S1 : 덧셈, 곱셈, 교환법칙, 분배법칙, 결합법칙, 항등원, 역원은 쉬워요.

S2 : 그런데 "환"의 정의 중 "두 연산"에서 왜 2차정사각행렬에서는 "덧셈, 곱셈"이 되는 건가요?

S3 : "행렬의 나눗셈"은 왜 안 되나요?

S4 : 선생님, 행렬의 성질에 대해 옳은 것, 옳지 않은 것 고르는 것은 너무 어려워요. 반례 찾는 규칙 없나요?

S5 : "AB의 역행렬이 존재하면 A, B의 역행렬이 존재한다." 는 왜 옳은가요?

S6 : 케일리-해밀턴 정리의 역이 일반적으로 성립하지 않는데 역이 성립하는 경우도 있다 하던데요. 어떤 경우인가요? 왜 그래요?

S7 : 모든 행렬이 영인자를 가지는 가요?

S8 : 행렬의 역행렬과 실수의 역원이 무엇이 다른가요?

<표Ⅲ-1>은 학생들의 질문, 분석 및 적합한 수준을 제시한 것이다. S1~S8 학생들의 질문들은 역시 상, 중, 하 의 수준을 반영하고 있기 때문에 각각에 맞는 답을 해 주었지만 그대로 평가 문항으로 둘 수는 없고 현실적인 입시 제도와 경험을 바탕으로 S1 학생의 인터뷰를 반영하여 학생들이 쉬워하는 기본 계산 문제는 하 수준에 두었고 S1, S2, S3, S8 학생의 인터뷰를 반영하여 행렬의 연산 법칙에 대한 문제는 보통 수준에 두었다. 그래서 교환법칙이 성립하면 인수분해가 가능함을 알아야 풀 수 있는 문제는 계산을 하고 법칙도 이해해야 풀 수 있으므로 보통 수준에 두었다. S2학생의 "환"의 정의에 관한 질문은 고등학교 수

준을 벗어나서, 개별적으로 질문에 답해 주었다. 중상위권 학생이 '환'이라는 것을 도입한 내용은 이해했다는 것을 수업 시간에 학생들에게 질문을 통해 확인했지만 "2차 정사각행렬이 환이 됨을 증명하시오." 라는 환의 정의를 외워 증명하는 것을 실험된 형성평가를 통해 실시해 보았으나, 일부 최상위권 학생을 제외하고는 대학 내용이라 무리였고, 무엇보다 교육과정 밖이므로, 환의 정의를 이용해 2차 정사각행렬이 환이 됨을 증명하는 내용은 평가 문항에서 제외시켰다. 2차 정사각행렬으로 설명하는 이유는 고등학교에서 가장 많이 다루는 행렬이기 때문이다. 2차 정사각행렬이 환이 됨을 확인하는 정도가 적당하다고 보며 "환"이라는 용어는 사용하지 않더라도 그 공리적 구조를 설명해 줄 수 있는 교환법칙, 결합법칙, 덧셈에 대한 항등원, 덧셈에 대한 역원, 곱셈에 대한 항등원, 역행렬, 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는 예 등의 문항은 평가문항에 포함시켰다.

5. 수준별 평가 문항 I 구성

본 연구에서는 <표 Ⅲ 2>와 같이 수준별 문항을 구성해 보기로 하였다. S4~S7 학생들의 인터뷰를 반영하여 행렬의 성질에 대해 옳은 것, 옳지 않은 것을 고르는 문제는 상 수준에 두었다. 학생들이 한 단원 수업을 마치고 질문을 할 때 나름대로 생각해 보고 자신이 관심이 많은 부분에 대해서 질문을 했다고 본 연구에는 보기 때문에 인터뷰 내용을 반영하여 평가 문항을 구성하고자 한다. 학생들의 질문이 고등학교 수준을 벗어나는 경우도 있고, 적절하지 않은 경우도 있었기 때문에 평가 문항 선정을 할 때에는 조절할 필요가 있었으나, 학생들의 질문은 그 학생이 정말 궁금해서 하는 것이므로 어떤 것이든지 수용하였고, 의미를 부여하여 필요한 것은 평가문항에 반영하고자 하였다.

상 수준의 문항은 실제 수능 기출 문제로서 신뢰성이 있는 문제로 수나 문자를 조금 수정한 것이다. 실제 이미 출제되었던 문제로 시중에 많이 유통되어 있었지만, 사교육을 받은 학생을 제외하고는 학교 현장 교육과정에서 다루어진 적은 없었던 문항이었다. 상 수준의 문항을 풀기 위해서는 케일리-해밀턴 정리와 역행렬의 존재성 등 여러 개념을 알아야 한다.

<표 Ⅲ-2> 수준별 평가 문항 I

※ 다음 중 하나를 선택하여 풀어 보시오.

1. 하 수준

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$을 구하면?

2. 보통 수준

두 행렬 A, B에 대하여

$A+B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ 이고,

곱셈에 대한 교환법칙이 성립할 때, A^2+B^2의 모든 성분의 합은?

3. 상 수준

다음 중 참인 것을 고르면?

(A, B는 2차 정사각행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬)

ㄱ.행렬 $B^3=O$ 이면 $B^2=O$ 이다. ㄴ.$A^k=A^m=A^n=E$ 을 만족 시키는 서로 다른 자연수 k,m,n이 존재하면 $A=E$이다. ㄷ.행렬 $A^3=O$ 이면 $A=O$ 이다.

그래서 <표 Ⅲ-2>와 같이 수준별 평가 문항Ⅰ을 구성해 보았다.

6. 평가 실시

<표 Ⅲ-2>의 평가지로 본 연구의 수업을 들었던 J고등학교의 4개 반 중 임의로 과학기술 집중과정 1개 반 30명 학생들을 대상으로 2008년 6월 초 형성평가로 실시하고 거두어 채점해 보았다. 그 결과는 학습 과정을 잘 참고하여 결과 분석 및 논의의 "1. 수준별 평가Ⅰ의 결과"에서 구체적으로 다루어 보았다.

7. 5~6의 절차를 반복

평가 결과를 잘 분석하여, 위에 제시된 5. 수준별 평가 문항 구성(Ⅱ~Ⅳ) ~ 6. 평가 실시의 절차를 반복하였다. 그 구체적인 내용은 결과 분석 및 논의의 "2. 수준별 평가문항 Ⅲ의 구성 ~ 6. 수준별 평가 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ의 시행 과정 및 결과 분석"에서 다루어 보았다. 수준별 평가 문항Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ 구성에 대한 내용은 연구 절차에 들어가야 하지만, 본 연구에서는 수준별 평가 Ⅰ의 결과를 분석해서 구성을 해서 결과 분석 및 논의에 수준별 평가 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ 구성에 대한 내용을 다루었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 수준별 평가Ⅰ의 결과

수준별 평가 문항이 형성평가로서 갖추어야 할 기준이 <표 Ⅰ-2>에서 설정되어 있으므로 그 기준에 따라 평가 문항을 분석해 보았다. <표 Ⅲ-2>를 실시해 본 결과 학생들은 세 문제 중 하나를 선택하지 않고 풀 수 있는 문제는 다 풀어서 제출해서 예상과는 다른 연구 결과가 나왔다. 오히려 상 수준의 문항을 맞으면서 보통 수준의 문항을 틀리는 학생들을 발견할 수 있어 의외의 좋은 연구 결과를 얻을 수 있었다. 그래서 이런 학생들이 전체 인원의 12% 이내인 경우에는 문항의 수준별 난이도로 적합하다고 보기로 했다. 12%로 선정한 이유는 김옥경(1990) 의 고등학생들을 대상으로 한 테스트에서의 오류 분류에 따르면 기술적 오류(Technical error)[14]의 빈도수가 11.8%였기 때문이다. 그래서 12% 이내를 실수로 틀리

14) 김옥경(1990)의 기술적 오류란 계산상의 오류, 표로부터 자료를 잘못 끌어내는 오류, 기초적인 대

거나 맞출 경우로 보았다. 수준별 평가 I 의 채점 결과 [그림 Ⅳ-1]과 같이 30명 중 상 수준의 문항은 10명이 맞추었고 보통 수준의 문항은 상 수준도 맞춘 학생을 포함하여 25명, 하 수준의 문항은 30명이 맞추었다.

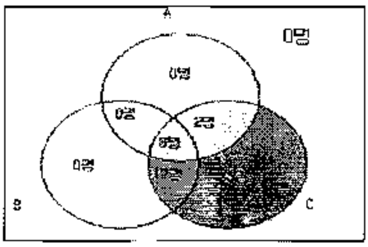
상 수준의 문항을 맞춘 10명은 6점, 보통 수준 문항을 맞춘 학생 중 상 수준을 맞추지 못한 학생 17명은 4점, 상 수준과 보통 수준을 맞추지 못하고 하 수준 문항만 맞춘 3명은 2점을 부여한다면 10명은 6점, 17명은 4점, 3명은 2점을 부여받게 된다. 상 수준의 문항은 맞추면서 보통 수준의 문항을 틀리는 학생 수가 2명 있었지만 본 연구에서 12%이내의 학생이 이런 경우에는 수준의 난이도가 적합하다고 보았으므로 30명 중에 2명이므로 약 6.6%로 난이도가 보통 수준으로 적합하다고 볼 수 있다. 실제로 두 학생의 답안지의 풀이과정을 본 결과, 계산 과정에서 실수가 있었음을 알 수 있었다. 이 수준별 평가 결과는 연구한 학생 수가 30명밖에 되지 않아 일반화하는 데에는 한계가 있으며 단지 본 연구를 하는 데 참고하면 된다.

2. 수준별 평가 문항Ⅲ 구성

위의 결과를 볼 때 하 수준의 문항 유형은 이 학급의 모든 학생들이 실수를 하지 않는다면 풀 수 있으므로 하 수준의 문항 수준을 좀 더 높이는 것이 좋을 것 같다. 그리고 보통 수준 문항은 상 수준보다는 쉽고 하 수준보다는 어렵지만 30명 중 25명이 맞추었으므로 정답률이 높은 편이어서 보통 수준과 하 수준 문항만 새로 구성해 보았다.

새로 구성한 하 수준의 문항은 [그림 Ⅳ-2]의 J고등학교의 2008학년도 1학기 412명을 대상으로 실시한 수학 I 행렬의 중간고사 문항분석표에서 정답률이 가장 높았던 문항이다. 이 문항은 정답률이 [15]84.67%였다. 그리고 정답률이 45.01%였던 문항으로 보통 수준의 문항을 재구성하였다.

문항분석표로 정답률을 분석한 이유는 OMR카드를 읽음을 통해 정확하게 채점을 한 것이고 전교 2학년 412명이 모두 실시한 시험이었고 철저한 감독에서 이루어진 시험이었기 때문이다. 그래서 <표 Ⅳ-1>과 같이 수준별 평가 문항Ⅱ를 구성하였다. 수준별 평가 문항Ⅱ는 정답률로 수준을 나누었지만, 정기고사 전체 행렬 문항에서 비슷한 정답률을 가진 문항 중, S1~S8학생들의 질문의 관심, 수준을 반영하고 있는 문항으로 추출하여 선택한 것으로, 앞의 연구 결과를 반영한 수준별 평가 문항으로 적합했다. 여러 문항을 구성할 수도 있지만



[그림 Ⅳ-1] 수준별 평가 I 의 A는 상 수준을, B는 보통 수준을, C는 하 수준을 맞춘 학생 수

수기호를 다루는 데 있어서의 오류, 초등학교 또는 중학교 수학에서 습득된 알고리즘을 시행하는 데 있어서의 오류 등을 말한다.

15) 정답을 맞은 학생이 전체 인원의 84.67%이므로 아주 쉬운 문항이라고 보면 된다.

문항 제작자의 저작권이 있으므로 삼가도록 하겠다.

<표 Ⅳ 1>는 실제 문항과 다르게 수나 문제를 조금 수정한 것이다. 여기서 중간고사의 문항분석표에 근거하여 실제 성적에 반영될 정기 고사에 반영될 만한 형성평가 문항을 각 학생의 수준에 맞게 구성해 보았다.

	무응답	1번	2번	3번	4번	5번	중복답	정답	정답률	정답률높은 순서
1. 행렬의 성분	0	11	320	30	30	20	0	2	77.86%	2
2. 행렬의 덧셈과 뺄셈	0	343	26	12	18	7	0	1	84.67%	1
3. 행렬의 곱셈	0	20	28	15	291	67	0	4	70.60%	4
4. 행렬의 곱셈의 성질	0	9	15	41	32	303	0	5	74.94%	3
5. 역행렬	1	20	64	251	58	17	0	3	61.07%	7
6. 연립일차방정식과 행렬	0	24	234	74	56	23	0	2	56.93%	8
7. 연립일차방정식과 행렬	0	185	89	71	54	32	0	1	45.01%	10
8. 행렬의 연산법칙	0	61	30	86	64	190	0	5	46.23%	9
9. 연립일차방정식과 행렬	0	285	32	29	38	27	0	1	69.34%	5
10. 행렬의 곱셈의 활용	0	14	23	53	281	40	0	4	68.37%	6

[그림 Ⅳ-2] J고등학교 수학 Ⅰ 1학기 중간고사 문항분석표

<표 Ⅳ-1>의 평가 문항은 중간고사 문항과 실제 수능 기출 문항으로 구성한 것으로 수나 문자를 조금 수정한 것이다. 이미 학생들이 문항을 접한 적이 있어 비슷한 문항이되 숫자를 복잡하게 하였더니 수준별 평가 문항으로서 적절하지 않은 결과가 나왔다. 그래서 유형은 그대로 하되 간단한 숫자와 3번 문항의 ㄷ보기만 수정하여 <표 Ⅳ-2>와 같이 수준별 평가 문항Ⅲ를 구성했다. 이 평가지로 2008년 8월 J고등학교의 1학기 중간고사 시험에서 10개 반 중 1등 한 과학기술 집중과정 1개 반 31명과 10개 반 중 10등한 인문사회 집중과정 1개 반 36명 학생들을 대상으로 시험을 쳤다. 여름 방학 방과 후 학습 시간에 수학 Ⅰ에 대한 복습이 이루어졌었지만 학생들이 행렬을 배우는 도중이 아니어서 반발이 예상되었으나 의외로 학생들이 시험에 진지하게 잘 임해 주었으며 연구 결과의 신뢰도를 위해 시험 실시 전이 아닌 실시한 후에 연구를 위해서 시험을 친 것이라고 충분히 설명한 후 양해를 구했다. 예체능을 진로로 정한 학생들 중 시험을 치기를 희망하지 않는 학생들은 제외시키고 평가했다. 1학기 중간고사를 친 지 4개월이 지난 후라서 일부 학생들만 문제를 기억하고 있었다. 숫자를 수정했기 때문에 학생들은 직접 풀어서 제출했다. 연구한 학교의 중간고사가 객관식 문항으로 이루어졌었기 때문에 수준별 평가 문항Ⅲ는 객관식으로 구성하였다.

<표 Ⅳ-1> 수준별 평가 문항Ⅱ

※ 다음 중 하나를 선택하여 풀어 보시오.

1. 하 수준 (정답률 84.7%이었던 문항) 행렬

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 11\\-1 & -13\end{pmatrix}$에 대하여

실수 x, y가 $xA+yB=C$를 만족하도록 하는 x, y의 곱은?

2. 보통 수준 (정답률 45.01%이었던 문항)

실수 x, y에 대한 연립방정식

$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}$에서 $x+y$가 최대일 때, t의 값은? (단, t는 실수)

3. 상 수준 (실제 수능 기출 문제)
다음 중 참인 것을 고르면?
(A는 2차 정사각행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬)

ㄱ.행렬 $A^5 = O$ 이면 $A^2 = O$ 이다.
ㄴ.$A^l = A^m = A^n = E$ 을 만족시키는 서로 다른 자연수 l,m,n 이 존재하면 $A = E$이다.
ㄷ. 행렬 $A^5 = O$ 이면 $A = O$ 이다.

<표 Ⅳ-2> 수준별 평가 문항Ⅲ

※ 다음 중 하나를 선택하여 풀어 보시오.
1. 하 수준
행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$에 대하여
실수 x, y가 $xA + yB = C$를 만족하도록 하는 x, y의 곱은?
① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 6

2. 보통 수준
실수 x, y에 대한 연립방정식
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$에서 $x + y$가 최대일 때, t의 값은? (단, t는 실수)
① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ -1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 6

3. 상 수준
다음 중 참인 것을 고르면? (A,B는 2차 정사각행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬)

ㄱ.행렬 $A^3 = O$ 이면 $A^2 = O$ 이다.
ㄴ.$A^k = A^m = A^n = E$ 을 만족시키는 서로 다른 자연수 k,m,n이 존재하면 $A^2 = E$ 이다.
ㄷ.A, B의 역행렬이 존재하면 AB 의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

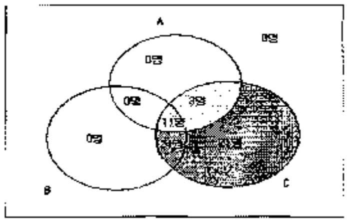
3. 수준별 평가Ⅲ의 결과

위의 시험의 결과를 벤다이어그램으로 나타내면 [그림 Ⅳ-3]이다. [그림 Ⅳ-3]에서 볼 때 상 수준 문항은 전체 67명 중 14명이 맞추었고 보통 수준 문항은 35명, 하 수준 문항은 59명이 맞추었다. 그러므로 상 수준 문항의 정답률은 20.90%이고 보통 수준의 정답률은

52.24%이고 하 수준의 정답률은 88.06%이고 상 수준과 하 수준의 문항을 맞추고 보통 수준의 문항을 맞추지 못한 학생이 3명으로 4.48%로 12% 이내이므로 수준별 평가 문항으로 수준별 평가 문항Ⅲ는 아주 적합하다고 볼 수 있다.

위의 결과는 본 연구의 교수 학습 내용을 들은 학생을 대상으로 해서 질문을 받고 1개 반에서 1차 형성평가를 치르고 또 전교생을 대상으로 한 중간고사의 문항분석표를 근거로 해서 2차 형성평가에서는 2개의 반 학생들 중 예체능 학생들이 시험을 치르지 않은 상태에서 연구한 것이 때문에 매우 특수한 경우이고 이것을 일반화하는 데에는 한계가 있을 것으로 보인다.

그러나, <그림 Ⅳ-4>의 SPSS (Statistical Package for the Social Sciences)를 이용한 신뢰도 분석에 의하면, 중간고사 결과 하 수준 문항과 보통 수준 문항의 정답률과 수준별 평가 문항Ⅲ 결과 하 수준 문항과 보통 수준 문항의 정답률의 크론바흐의 알파계수



[그림 Ⅳ-3] 수준별 평가Ⅲ의 A는 상 수준을, B는 보통 수준을, C는 하 수준을 맞춘 학생 수

	VAR00001	VAR00002
1	84.70	88.06
2	45.01	52.24
3		

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	Cronbach's Alpha Based on Standardized Items	N of Items
.997	1.000	2

[그림 Ⅳ-4] 중간고사 하 수준, 보통 수준 문항과 수준별 평가 문항Ⅲ의 하 수준, 보통 수준 문항의 정답률 비교 및 SPSS의 신뢰도 분석 결과

(Cronbach's Alpha coefficient)가 0.997로 새로 구성한 하 수준 문항과 보통 수준 문항이 비록 일부 학생을 대상으로 했으나, 신뢰도가 아주 높음을 알 수 있다.

수준별 평가는 그 학교의 지역, 학생 전체 수준, 등의 특수한 상황을 고려하여 구성되어야 하므로 위의 결과를 일반화할 필요는 없다고 본다. 위와 같이 평가한 후 문항 풀이를 하였다. 수준별 평가 문항을 구성하는 것도 중요하지만 풀이를 통해 학생 실력을 개선시키는 것이 더 중요하다.

4. 수준별 평가 문항Ⅳ 구성

위의 결과를 일반화할 필요는 없지만 다른 상황의 학교의 경우와 비교하기 위해 다른 상황의 학교인 I고등학교 전체 8개 반 중 수학 성적이 4~5등인 1개 반 학생들 36명을 대상으로 행렬 단원의 수업이 진행 중인 상태에서 2009년 6월 행렬의 성질을 물어 보는 동일한 내용으로 세트형인 상 수준, 보통 수준, 하 수준 문항을 위의 수준별 문항에서 보통 수준 문항

을 제외하고는 간단한 수나 문자만 변형시켜 다시 수준별 평가 문항Ⅳ를 <표 Ⅳ-3>와 같이 구성하여 실시해 보았다. 수준별 평가Ⅲ와 같이 1등인 반과 8등인 반으로 평가를 시행했으면 더 좋았을 것이나, 8등인 반의 학생들에 대한 접근이 쉽지 않아서 편의상 중간 위치의 반 학생들을 대상으로 하게 되어서 이를 일반화하는 데에는 한계가 있을 것으로 보인다. 보통 수준 문항은 역시 앞에서 연구한 J고등학교 수학Ⅰ 1학기 중간고사에서 정답률이 46.23% 였던 문항에서 간단한 수나 문자를 변형시킨 것이었다.

5. 수준별 평가Ⅳ의 결과

위의 시험 결과 상 수준을 맞춘 학생은 11명, 보통 수준을 맞춘 학생은 5명, 하 수준을 맞춘 학생은 10명이었으며, 모두 틀린 학생이 10명이었다. 모두 틀린 10명의 학생 중 7명은 상만을 택해서 풀어서 틀린 학생이었다. 상 수준을 맞추면서 보통 수준을 틀린 학생 수는 2명이었고, 보통 수준을 맞추면서 하 수준을 틀린 학생은 0명이었다. 그러므로 이런 학생의 경우 정답률이 12% 범위내만 인정한다고 했으므로 5.56%로 적합하고, 상 수준의 경우 정답률이 30.56%, 보통 수준의 경우 44.44%, 하 수준의 경우 72.22%로 위의 결과는 본 연구에서 정한 문항구성의 조건에 잘 부합되고 있다. 시험 결과를 벤다이어그램으로 나타내면 [그림 Ⅳ-5]이다.

<표 Ⅳ-3> 수준별 평가 문항Ⅳ

※ 다음 중 하나를 선택하여 풀어 보시오.

1. 하 수준

행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -2\end{pmatrix}$ 에 대하여

A^2-B^2 을 구하면?

2. 보통 수준

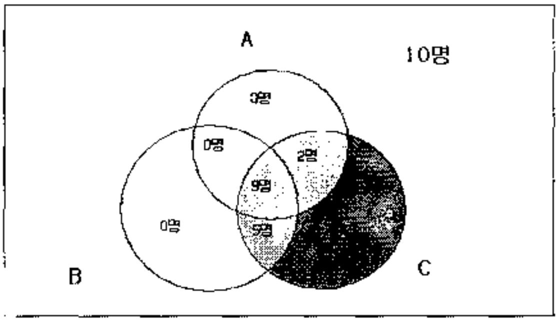
이차 정사각행렬 A, B, C, D에 대하여, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.)

① $A^2-E=O$ 이면 $A=E$ 또는 $A=-E$ 이다.
② $AB=O$ 이면 $A=O$ 또는 $B=O$ 이다.
③ $D\neq O$ 일 때, $DB=DC$ 이면 $B=C$ 이다.
④ $A^2=O$ 이면 $A=O$ 이다.
⑤ 행렬 A 의 역행렬이 존재할 때, $AC=O$이면 $C=O$이다.

3. 상 수준

다음 중 참인 것을 고르면? (A,B는 2차 정사각행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬)

ㄱ. 행렬 $AB=E$ 이면 $BA=E$ 이다.
ㄴ. $A^5=O$ 이면 $A=O$ 이다.
ㄷ. $A^k=A^m=A^n=E$ 을 만족시키는 서로 다른 자연수 k,m,n이 존재하면 $A^2=E$ 이다.



[그림 Ⅳ-5] 수준별 평가Ⅳ의 A는 상 수준을, B는 보통 수준을, C는 하 수준을 맞춘 학생 수

6. 수준별 평가 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ의 시행 과정 및 결과 분석

본 연구의 수준별 평가 시행 과정 및 결과를 분석해 보면, <표 Ⅳ-4>와 같다.

먼저, 성을선 외(2000)는 형성평가를 향상을 목적으로 이루어지는 교사와 학생의 상호작용 속에서 이루어지는 평가라고 정의하고 있고, 형성평가를 일정한 단계마다 이루어지는 것으로 보는 기존의 개념과 달리 학습이 이루어지는 모든 과정 속에서 이루어지는 것으로 보기 때문에, 그러므로, <표 Ⅳ-4>의 수준별 평가문항 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ는 모두 시행 시기가 형성평가로서 적합하다고 볼 수 있다.

둘째, 수준별 평가 문항Ⅲ는 정답률이 적합했고 상 수준을 맞으면서 보통 수준을 틀리는 것과 같은 경우는 12% 이내로 적당했다.

셋째, 위의 결과는 통계적 자료로서는, 대상 학생 수가 적어서, 의미가 적다고 보지만 이런 과정을 통해 행렬에 대한 학생들의 각 수준에 따른 학습 도달 정도를 알 수 있어서 큰 의의가 있다고 본다.

넷째, 수준별 평가 문항Ⅲ는 교사가 노력한다는 전제하에, 수준별 평가가 가능할 것이라는 것을 보여 준다. 하지만 교사의 다른 업무가 많아 수준별 평가를 위해 위와 같이 준비하는 것이 힘들 것이라고 많이 알려져 있다.

다섯째, 수준별 평가 문항 Ⅳ는 정답률이 적합했고 상 수준을 맞으면서 보통 수준을 틀리는 것과 같은 경우는 12% 이내로 적당했다. 이 결과를 볼 때, 두 개의 학교만 대상으로 연구를 해서 많은 한계점이 있지만 두 번째 학교 역시 임의로 택한 학교였음에도 불구하고 비슷한 결과가 나타난 것으로 볼 때 위의 연구결과는, 학생들을 대상으로 수업하고 질문을 받고 지나간 기출문항을 분석하여 정답률을 비교한 후 수준별 평가 문항을 구성해 나가는 본 연구의 방법이 학생들의 수준이 비슷한 학교에서는 수준별 평가 문항을 구성하는 데 적절하다는 결론을 지어 준다.

본 연구에서는 수준별 평가 문항을 구성하기 위해 세 개의 연구한 문항으로 평가를 시행했으나 아직 성적에 반영될 경우 OMR카드 읽는 부분과 학생들과 학부모님들의 정서적인 부분, 교사들의 업무부담 가중 등의 해결해야 할 과제들이 남겨져 있다.

<표 Ⅳ-4> 수준별 평가 시행 과정 및 결과

평가문항	시행 과정 및 결과
수준별 평가 문항Ⅰ	2008년 3월에 행렬에 대한 교수학습 내용 공부가 마치고 4월에 중간고사를 치른 후 6월에 실시되었으며,
	6월 정규 수업 이후 방과 후 학습 시간에 행렬에 대한 문제를 푸는 수업이 진행 중이었고, 성적에 반영이 안 되는 평가였고, 배우는 내용을 개선하기 위한 것이었으나,
	보통 수준과 하 수준 문항이 너무 쉬워서 해당 수준 정답률이 적절하지 않았음.
수준별 평가 문항Ⅱ	중간고사 문항 분석표의 정답률을 비교하여 문항은 구성하였고,
	정답률이 적절했으나,
	이미 문항이 공개된 후라서 형성평가로 치를 수 없었기 때문에, 문항을 구성했으나 평가를 시행하지는 않았으며,
	정답률이 적절할 것은 당연하지만 벤다이어그램을 통해 상 수준을 맞추면서 보통 수준을 틀린 학생이 12%이내인지 확인이 필요함.
수준별 평가 문항Ⅲ	2008년 4월 중간고사 문항에서 보통, 하 수준 문항을, 6월 수준별 평가문항Ⅰ에서 상 수준 문항을 선택하여 구성하였으며,
	2학기를 시작하는 8월 수업 시간 중 실시하였고, 여름 방학 때 방과 후 학습 시간에 수학Ⅰ 배운 내용에 대한 정리하는 수업이 진행 중이었으며,
	시행 결과 아주 적합한 수준별 문항 구성을 이루었으며, 학생들의 각 수준에 따른 학습 도달 수준을 알 수 있었고,
	수준별 평가가 교사가 노력한다는 전제하에, 가능할 것이라는 것을 보여주었음.
수준별 평가 문항Ⅳ	2009년 6월에 다른 I고등학교 학생들을 대상으로 문항을 행렬의 성질을 묻는 동일한 내용의 문항으로 수준을 달리하여 실시하였으며,
	시행 결과 아주 적합한 수준별 문항 구성을 이루었으며,
	2개의 학교에서만 시행해서 한계점이 있지만, 임의로 택한 학교였다는 점에서 위의 연구 방법이 학교 수준이 비슷한 상황에서 수준별 평가 문항을 구성하는 데 적절하다는 결론을 지을 수 있다.

Ⅴ. 마치며

본 연구에서는 수준에 맞은 평가 문항을 구성하기 위해서 행렬 수업을 하고 학생들 질문을 받아 수준별 평가 문항Ⅰ을 구성하고 평가를 실시한 후 수준별 평가 문항Ⅰ의 평가 결과를 분석하였다. 그 후 수준별 평가 문항Ⅰ의 부족한 부분에 대해 정기고사의 정답률과 비교

하여 필요한 문항을 추출하여 수준별 평가 문항Ⅱ, 수준별 평가 문항Ⅲ을 구성하고, 평가를 실시한 후 결과를 분석하였다. 다시 다른 상황의 고등학교에서 행렬의 성질이라는 동일한 내용으로 수준을 나누어 수준별 평가 문항Ⅳ를 구성하고, 평가를 실시한 후 결과를 분석하였다. 수준별 평가 문항을 구성할 때, 행렬이론을 고등학생들에게 이해하도록 할 때, 선형변환 및 환 이론은 상위권 학생들에게 이해를 돕기 위해 제시하고, 평가 문항에는, 교육과정에 속하지 않으므로 제외시켰다. 도입하지 않는 경우에는 행렬 집합이 가지고 있는 공리적 구조를 다양한 예들을 통해서 학생들이 저절로 습득되도록 해야 할 것이다.

수준별 평가 문항 구성할 때 사전에 먼저 어떤 문항으로 학생들을 평가하면 좋을지 대략 본 연구와 같이 문항을 구성해 보고 정기고사의 학생 문항분석표를 통해 정답률을 알아보고 비슷한 유형으로 해서 재구성하여 수준별 평가 문항을 만들어 시행해 보면 행렬에 대해 단위학교 학생들이 가지는 학생들 수준에 따른 문항의 난이도를 짐작할 수 있을 것으로 보인다. 그리고 다른 학교에서도 학생들의 수준이 큰 차이가 없다면 같은 문항의 수준을 적용시킬 수 있을 것이다. 이러한 과정을 통해 학생들의 수준을 짐작한 후 다른 내용에서도 비슷하게 적용하여 문항을 구성하면 될 것이다. 이러한 과정은 수학 교사, 연구자들의 각 순간마다의 노력을 필요로 한다. 업무 부담이 가중되지만 학생들을 위하는 보람 있는 일이다. 학생들의 개인차는 존중되어야 하며 끊임없는 연구를 해서 교수학습활동이 학생들 개인에게 만족스럽도록 나아가야 한다. 형성평가나 정기고사를 통해 수준별 평가를 한다면 상위권과 하위권 학생들이 수학 수업에 흥미를 느낄 수 있을 것이다.

본 연구의 시사점은 학생들이 수준별 평가 문항을 풀 때 자기 수준에 맞는 문항을 쉽게 찾지 못해 모든 문항을 다 푼다는 것과 수준별 평가 문항 구성이 참 쉬울 것 같지만 의외로 적절한 퍼센트(%)의 정답률을 만드는 것이 어렵다는 것이다. 그리고 상 수준과 하 수준의 문항은 풀지만 보통 수준의 문항을 풀지 못하는 의외의 학생들이 있다는 점이다.

우리가 이러한 과정에서 유의해야 할 점은 수업과 평가에서 완전한 방법은 존재할 수가 없고 좀 더 나은 방법을 찾아갈 수 있을 뿐이라는 것이다. 따라서 항상 과정과 결과를 분석하고 개선해야 하는데 본 연구의 취지는 여기에 있다.

참고문헌

교육과학기술부 (2008). 학교 자율화 추진 계획 발표, 서울 : 교육과학기술부 보도자료.

교육인적자원부 (2008). '고교 시험 올부터 수준별 평가' 에 대한 기사 해명 자료, 서울 : 교육인적자원부 해명자료.

김성준 (2004). 대수의 사고 요소분석 및 학습-지도 방향 탐색, 서울대학교 대학원.

김옥경 (1990). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원.

김홍섭・신인철・김라경・남부호・김주식・최재천・김광분・나태순・강덕기・김기탁・김란숙・김용돈・안상호・양슬기・이동규・장희식・전영주・조억진 (2008). 수준별 이동수업매뉴얼(교육과학기술부, 대전광역시교육청), 대전 : 신진기획.

박대연・고안상・유홍상・김윤배 (2001). 제7차 교육과정에 따른 함수영역의 수준별 문항개발 및 평가방법, 전주대학교 교육문제연구소 제 3회 공동학술연구논문집, 제15권 4호, 151～183.

성을선 · 남정희 · 최병순 (2000). 중학교 과학수업에서 형성평가의 실제, 과학교육논문집, 제10권 1호, 455~467.
우정호 · 류희찬 · 문광호 · 송갑석 · 박선화 · 박경미 (2002). 고등학교 수학 I 교사용지도서, 서울 : 대한교과서(주).
이종규 (2006). 질적 연구 방법론, 서울 : 교육과학사.
이혜숙 (2006). 평준화/비평준화 고교 수업의 질적 분석과 평준화 정책, 한국교육 33(2), 3~25.
조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 홍진곤 (2003). 고등학교 수학 I 교사용지도서, 서울 : (주)금성출판사.
Anton, H. (1995). 알기 쉬운 선형대수, John Wiley & Sons Inc. (이장우, 역). (영어 원작은 1994년 출판).
Cotton, T. (2004). What can I say, and what can I do? In Walshaw, M. (Ed.). Mathematics Education within the Postmodern(pp.219-237). the United States of America: Information Age Publishing Inc.
Foucault, M. (1972). The archaeology of knowledge (Trans: Sheridan, A.), New York: Pantheon.
Foucault, M. (1977). Discipline and punish: The birth of the prison (Trans: Sheridan, A.), New York: Pantheon.
Gipps, C. V. (1994). Beyond testing: Towards a theory of educational assessment, London: Falmer Press.
Hardy, T. (2004). There's no hiding place. In Walshaw, M. (Ed.). Mathematics Education within the Postmodern(pp.103-109). the United States of America: Information Age Publishing Inc..
John, B. F. (1989). 현대 대수학. (천장호, 역). 서울 : 대영사. (영어 원작은 1989년 출판).
MacGregor, M. (2001). Dose Learning Algebra Benefit Most People?, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference The Future of the Teaching and Learning of Algebra, 2, 405.
McCoy, N. H. (1942). Remarks on divisors of zero, The American Mathematical Monthly, 49(5), 286-295.

On the Composition of Evaluation Questions Corresponding to Each Level in Matrix Chapter of the High School

Lee, Min Jung[16] · Lee, Yang[17]

Abstract

There are many studies about the method of trying leveled class because we say the Excellence of Education after high school's Equalization Policy. After the leveled class, Ministry of Education, Science and Tech. announced the induction of leveled classes' evaluation in 2008, it is called that students take classes adapted to their levels. This study illustrates criteria of forming evaluation, it composes leveled assessment tests referenced by Gibb's evaluation effects & Cotton's evaluation principles. Before anything else, this study induced contents of studies which is emphasized the structure rather than the arithmetic that is based on Foucault's analysis of mathematics' class and examination & MacGregor's point of algebra. Since then we made leveled assessment tests which made by students' Question. And then, In this study, we modified evaluation tests appropriately by criteria of evaluation and analysing the result.

Key Words : Evaluation, Evaluation questions, Level, Matrix

16) Graduate School, Pusan National Univ., nice1mj@nate.com
17) Pusan National Univ., ylee@pusan.ac.kr