한국수학사학회지 제23권 제3호 (2010년 8월) 121–140

내포량의 평균 공식과 조작적 학습법

부민초등학교 김명운
cophyta@hanmail.net

본 논문은 속도, 온도, 농도, 밀도, 단가, 일인당 국민소득 등의 내포량의 평균을 구할 때, 내포량마다 다른 공식을 적용하여 구해야 하는 불편함을 해소하기 위하여, 지레의 원리를 이용하여 두 내포량의 평균 공식 $M = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}$ 를 유도하였고, 이 공식의 관계적 이해를 돕기 위해 지레의 원리를 이용한 조작적 학습법을 제시하였다. 비의 의미의 분수는 그 수치만으로 덧셈을 할 수가 없어 비가법적이라고 한 것을 비중을 적용하여 계산할 수 있음을 보인 것이다. 또한 두 양에서뿐만 아니라 여러 양의 덧셈도 단 한 번의 공식에의 적용으로 해결할 수 있도록 확장적용시킨 $M = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N}$ (단, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N$)은 새로운 공식이 아니라 가중평균을 구하는 공식이었다는 것을 밝혔다. 또한 통계학에서 의문거리였던 하위 제표의 방향성과 다른 모습을 보이는 상위제표의 통계자료에 대한 심프슨의 파라독스의 의문점을 가중평균의 원리를 이용하여 밝혔다.

주제어 : 내포량의 평균, 비율, 비의 의미의 분수, 지레의 원리, 심프슨의 파라독스

1 서론

양이란 어떤 사물의 무게, 부피, 수량 등의 많고 적음과 크고 작은 정도를 나타내는 것으로 일반적으로 분리량과 연속량으로 분류된다. 분리량은 더 이상 분할할 수 없는 양으로서 독립된 개체의 수를 나타내는 양을 뜻하고, 연속량은 얼마든지 분할 가능한 양으로 길이 넓이, 부피, 무게, 시간, 각도 등이 있다. 이러한 연속량에는 길이, 넓이, 부피, 무게 등과 같이 사물의 외형적인 크기를 나타내는 외연량과 속도, 농도, 밀도 등과 같이 사물의 속성의 크기를 나타내는 내포량이 있다. 내포량에는 밀도(질량/부피), 속력(거리/시간) 등과 같이 다른 종류의 양의 몫으로서 유도되는 도(度)라 불리는 양과 이율(이자/원금), 농도(용질의 양/용액의 양) 등과 같이 율(率)이라고 불리는 양이 있다(강지형외 6인, 1999).

외연량들은 직접측정이나 간접측정을 통해서 얻어지는 단일성격을 지닌 양이기 때문에 학생들은 학습에서 단위에 대한 감각이나 단위환산 외에는 별다른 어려움을 호소하지 않는 반면 내포량들은 각각의 양들이 두 개 이상의 양들의 몫으로 정의되어 있음으로 해서 복잡하다고 느낀다. 뿐만 아니라 각각의 내포량은 모두 서로 다른 공식을 가지고 있으며 평상시에 접해보기 힘든 생소한 양으로서 수학의 추상성이 더욱 강하기 때문에 학생들이 학습에 많은 어려움을 호소하고 있다. 더구나 몫으로 나온 값이므로 정수가 아닌 분수로 표현되는 경우가 많이 발생하지만 일반적인 분수의 사칙연산을 적용할 수 없다는 점이 학생들을 더욱 힘들게 한다.

김명운(2009)은 분수의 의미를 등분할의 의미(전체−부분의 비교), 양(측정)의 의미, 비의 의미, 연산자의 의미라는 4가지로 나누고 있다. 유리수의 개념은 비 동치관계라는 본질을 가지며, 이는 가법적 이미지를 갖는 양 사이의 관계인 '양적인 동치관계'와 승법적 이미지를 갖는 속도, 농도, 비율과 같은 질 사이의 관계인 '구조적(질적)인 동치관계'를 갖는다. 이러한 유리수 개념의 본질은 실제에서 여러 가지 맥락의 현상을 조직하는 수단으로 작용하게 되는데, 유현주(1995)는 등분할의 의미, 양(측정)의 의미는 양적인 동치관계로서의 유리수로, 비의 의미, 연산자의 의미는 구조적인 동치관계로서의 유리수로 구분시켜 놓았다.

분수의 사칙연산에서 일반적으로 덧셈과 뺄셈은 통분하여 분모끼리의 합·차로, 곱셈은 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리의 곱으로, 나눗셈은 승수를 역수로 바꾼 후 곱셈으로 계산한다고 알려져 있다. 하지만 위의 분수의 네 가지의 의미 중 어떤 의미의 분수의 덧셈·뺄셈이냐에 따라 연산 방식은 차이가 있다.

외연량에 해당하는 길이, 넓이, 부피, 무게 등은 가법적인 양이다. 예를 들어 10g에 5g을 합하면 15g이 되고, 10L에 5L를 섞으면 15L가 된다. 그러나 내포량은 비가법적이다. 10°C의 물에 5°C의 물을 섞으면 15°C가 되지 않고, 농도가 10%인 소금물에 5%인 소금물을 섞으면 15%의 소금물이 되지 않는다. 그래서 두 내포량을 합치게 되면 그 내포량의 공식을 적용하여 평균값을 구하게 된다.

농도가 10%인 소금물 100g에 농도가 20%인 소금물 100g을 섞으면 직관적으로 두 내포량의 균형값인 15%가 될 것이라고 예상할 수 있다. 하지만 농도가 10%인 소금물 100g에 농도가 20%인 소금물 150g을 섞으면 15%보다는 20% 쪽에 더 가까울 것이라고 예상은 가능하나 그 평균이 얼마인지는 농도를 구하는 공식에 대입시켜 풀어보지 않고는 그 값을 구할 수가 없다. 수학의 여러 가지 특성 중 하나는 일반성이다. 여러 경우에서 공통적으로 얻어지는 속성을 찾아 일반화시켜 개개의 특수한 사례에 적용시킬 수 있다는 것이 수학이

가지는 큰 매력일 것이다. 이와 같이 많은 내포량의 공식들에서 그 평균을 구할 수 있는 공통적인 원리를 찾아내어 일반화시킬 수 있는 공식을 찾아낸다면 학생들은 내포량의 평균을 구하는 단일화된 공식에 의하여 어떤 내포량의 평균이든지 손쉽게 구할 수 있을 것이다.

이에 본 논문은 지금까지 각각의 내포량의 평균을 구하는 학습에 대한 불편함을 살펴보고, 가중평균의 원리를 적용하여 내포량의 가중평균을 구해봄과 아울러, 그 원리로 내포량의 가중평균의 통합 공식을 유도하고, 그 공식으로 모든 내포량의 가중평균을 구할 수 있음을 보일 것이다. 또한 이항가중평균일 경우에는 지레의 원리를 적용하여 간단하게 구해낼 수 있음을 보이고, 이 원리에 의하여 이항가중평균의 공식을 유도하여 가중평균의 통합공식이 성립함을 보일 것이다. 또한 이 원리와 공식이 어떻게 이용이 되는지에 대한 몇 가지의 효용도 제시하겠다.

2 이론적 배경

2.1 현재의 내포량의 평균을 구하는 불편한 학습실태

내포량의 종류에 따른 문제

예1) 【속력】영수는 12분 동안 분속 70m로 걸었고, 18분 동안 분속 95m로 달렸다. 평균 속력은 얼마인가?

예2) 【농도】10%의 소금물 200g과 20%의 소금물 300g을 섞으면 몇 %의 소금물이 될까?

예3) 【인구밀도】A도시의 면적이 500km^2, 인구밀도가 6,000이고, B도시의 면적이 200km^2, 인구밀도가 400이면 A, B도시를 통합했을 때의 인구밀도는 얼마가 될까?

예4) 【단가】한 수산물 중개상이 조기를 A수산으로부터 단가 7,000원에 24,000마리를 매입하고, B수산으로부터 단가 6,300원에 18,000마리를 매입했다면, 조기 전체의 단가는 얼마일까?

예5) 【일인당 국민소득】작년 한 해의 북한에 사는 30,000,000명의 일인당 국민소득이 500＄이었고, 남한에 사는 40,000,000명의 일인당 국민소득이 8,900＄이었다면, 남북한을 합친 우리 나라 사람 70,000,000명의 일인당 국민 소득은 얼마일까?

예6) 【온도】18°C의 물 270g과 67°C의 물 360g을 섞으면 몇 °C의 물이 될까?

내포량의 종류에 따른 풀이 과정

예1) 【속력】속력을 구하는 공식은 『속력 $= \dfrac{\text{거리}}{\text{시간}}$』이다.

전체 걸린 시간은

$$12 + 18 = 30$$

이 되어 30분. 전체 간 거리는

$$12 \times 70 + 18 \times 95 = 2550$$

이 되어 2550m가 된다. 따라서 공식에 대입하면 평균속력은 $\frac{2550}{30} = 85(\text{m/분})$이 된다.

예2) 【농도】농도를 구하는 공식은 『농도 $= \dfrac{\text{소금의 양}}{\text{소금물의 양}}$』이다.

먼저 양쪽 소금물에 있는 소금의 양을 구하면

$$200 \times \frac{10}{100} + 300 \times \frac{20}{100} = 80$$

이 되어 80g, 전체 소금물의 양은

$$200 + 300 = 500$$

이 되어 500g. 따라서 평균농도 $= \dfrac{\text{전체소금의 양}}{\text{전체소금물의 양}}$이므로

$$\frac{80}{500} \times 100 = 16$$

이 되므로 16%이다.

예3) 【인구밀도】인구밀도를 구하는 공식은 『인구밀도 $= \dfrac{\text{인구수}}{\text{땅면적}}$』으로 땅의 면적의 단위는 km^2이다.

두 도시의 인구를 먼저 계산하면

$$500 \times 6000 + 200 \times 400 = 3080000(\text{명}),$$

두 도시의 면적의 합은 700이므로, 평균 인구밀도는

$$\frac{3080000}{700} = 4400$$

이므로 $4,400$(명/km^2)가 된다.

예4) 【단가】단가를 구하는 공식은『단가 $= \dfrac{\text{상품값}}{\text{상품의 개수}}$』이다.

두 회사로부터 구입한 조기의 전체 가격은

$$7000 \times 24000 + 6300 \times 18000 = 281400000$$

이므로 단가는

$$\frac{281400000}{42000} = 6700$$

이 되어 $6,700$(원/마리)가 된다.

예5) 【일인당 국민소득】일인당 국민소득을 구하는 공식은『일인당 국민소득 $= \dfrac{\text{전체국민소득}}{\text{국민수}}$』이다.

남북한 전체의 국민 소득을 생각해 보면

$$500 \times 3000\text{만} + 8900 \times 4000\text{만} = 3710\text{억}$$

이 되어 남북한을 합친 우리 나라 사람 $70,000,000$명의 일인당 국민 소득은

$$\frac{3710\text{억}}{7000\text{만}} = 5300$$

이 되어 $5,300$($/명)이 된다.

예6) 【온도】온도는 두 물질이 열평형을 이루었을 때 열량보존의 법칙에서 아래와 같은 공식이 나온다.

$$m_1c_1(t_1 - T) = m_2c_2(T - t_1)$$

A물질의 질량 : m_1, B물질의 질량 : m_2

A물질의 비열 : c_1, B물질의 비열 : c_2

A물질의 온도 : t_1, B물질의 온도 : t_2

열평형이이루어진온도 : T

$$270{\cdot}1{\cdot}(T-18)=360{\cdot}1{\cdot}(67-T)$$
$$630T=28980$$
$$T=46$$

따라서 46°C에서 열평형이 이루어진다.

2.2 심프슨의 파라독스

심프슨 파라독스란 1973년 미국 버클리 대학의 대학원 입학허가에 관한 것으로, 입학허가에 있어서 남녀 차별이 있었는가에 관한 실증적 조사에서 나온 것이다(김남희 외, 2006). 총 6개 분야 중 4개 분야에서 여성의 합격률이 남성보다 더 높게 나타났는데, 전체적으로는 남성의 합격률이 더 높은 것이었다. 한 범주 내에서의 어떤 속성에 대한 비율을 서로 비교한 결과가 그 범주의 부범주(subcategory)에서의 그 속성에 대한 비율을 서로 비교한 결과와 상치하는 현상이 나타난 것이다. 이는 저차원의 제표가 보여준 것을 고차원의 제표가 뒤집어 놓은 것으로 많은 수학자들을 흥미롭게 만든 통계학적 모순이다. 이러한 현상을 간단하게 2개의 하위 범주를 설정하여 나타내어 보면 아래의 [표 1]과 같다.

표 1: 신입생 합격률 현황

계열	구분	남학생		여학생	
		합격생	불합격생	합격생	불합격생
자연계열	학생수의 비	2	3	1	2
	합격률	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{3}$	
인문계열	학생수의 비	3	1	5	2
	합격률	$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{7}$	
전체합격률		$\frac{5}{9}$		$\frac{6}{10}$	

이 자료에 의하면 자연계열과 인문계열 모두 남학생의 합격률이 더 높았는데 전체의 합격률은 오히려 여학생이 더 높은 것이다. 이것이 일반 대수적 구조에서는 용납될 수 없는

비의 의미의 분수가 갖는 내포량의 특성이다. 따라서 내포량을 계산할 때는 어떤 방법이 필요한지, 저차원의 제표($\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$)가 고차원의 제표($\frac{5}{9} < \frac{6}{10}$)를 뒤집어 놓을 수 있는 원인은 무엇인지 알아볼 필요가 있다.

2.3 양의 분류

수학의 전 영역을 통틀어 가장 중요한 개념은 '수'이다. Pythagoras는 "만물은 수이다"라고 하여 수를 자연을 설명하는 근본 원리로 보았고, Gauss는 "과학의 여왕은 수학이고, 수학의 여왕은 수론이다"라는 말로 수체계의 이론을 중시했다. 수의 교수에 관한 문제는 수학교육의 역사에서 가장 활발하게 논의된 주제로서 수학적, 철학적, 심리적, 수학교육학적 측면에서 다양한 관점과 주장들이 제기되었다.

자연수의 수 개념으로 흔히 집합수, 순서수, 이름수를 든다. 집합수는 어느 집합에 속하는 원소의 수이고, 순서수는 사물을 어떤 특정 관점에 따라 늘어놓았을 때 그 차례를 나타내는 수이고, 이름수는 사물의 이름 대신에 사용하는 수이다. 하지만 수의 범위가 인류의 새로운 발견에 따라 또는 필요에 따라 확장되면서 수 개념의 확장도 필수적이었고, 이에 대한 많은 학자들의 견해를 고정화(2007)는 아래와 같이 정리하였다.

Dewey(1895)는 수가 적응을 위해 사물을 다루는 능동적인 측정활동의 산물로 얻게 되는 것이며, 전체량과 단위량 사이의 비, 즉 측정수라는 수의 상대적인 의미를 표현하는 것으로 보았다. Thorndike(1922)는 자연수 개념을 계열로서의 의미, 집합으로서의 의미, 비로서의 의미, 관계로서의 의미로 설명하고 있다. 또한 Piaget(1965)는 수를 기수와 서수가 종합된 조작으로 보고 있다. Freudenthal(1973)은 수 개념에 대해 교수현상학적 분석을 시도하였는데, 그에 따르면 수 개념은 그 접근 방식에 따라 셈수, 개수, 측정수, 계산수로 구분된다. 셈수란 자연수의 수열이며 집합론에서 순서수로 형식화되고 초한순서수로 확장된다. 개수는 셈수보다 일찍 발생되며 동물에게서도 나타나고, 집합론에서 기수를 형식화하며 초한기수로 확장된다. 측정수는 단위에 대한 배수이며 수학적으로 해석하면 작용소이다. 계산수는 수의 알고리즘적 측면, 공리적 체계로 형식화되는 측면으로 규칙에 따라 조작되는 대상이다. Confrey(1980)은 수 개념은 집합 또는 류(class)로서의 집합(기수) 개념, 순서 짓기, 무한 수열의 형성과 관련되는 순서수 개념, 두 양 사이의 비의 추상물로서의 비 개념, 무리수 개념을 설명하는 무한 소수 개념, 실수와 수직선상의 점을 일대일 대응시켜 기하학적 개념과 결부시키는 점-수 대응 개념, 법칙을 통해 정의되는 조작적 개념으로 설명한다. Davydov(1990)는 수가 전체 대상과 부분 사이의 관계, 하나의 양을 단위가 되는

다른 양을 이용해 측정하는 가운데 얻어지는 양 사이의 일반적인 관계인 비를 나타내는 것으로 보았다. 이상에서 학교 수학에서 다루어지는 수는 대략 셈수적 측면, 개수 또는 기수적 측면, 순서수적 측면, 측정수적 측면, 관계수 또는 계산수적 측면으로 구분되며, 특정한 구조를 이루는 산술 체계로서의 수 개념은 고등학교 이상에서 다루므로 셈수, 기수, 순서수, 측정수의 네 가지의 측면으로 구분할 수 있다.

측정수라는 것은 어떤 물질의 양을 세거나 재어서 나타낸 것으로 측정 단위가 주어져야 한다. 측정수는 그 측정 단위의 몇 배인지를 나타내는 수인 것이다. 우리는 전통적으로 이 측정수의 의미를 '수량'이라는 용어로 사용해 왔다. 오늘날 수량은 '양(量)'이라는 용어로 통합되어 사용하는데, 그 양을 서성보(2000)는 아래와 같이 분류하고 있다.

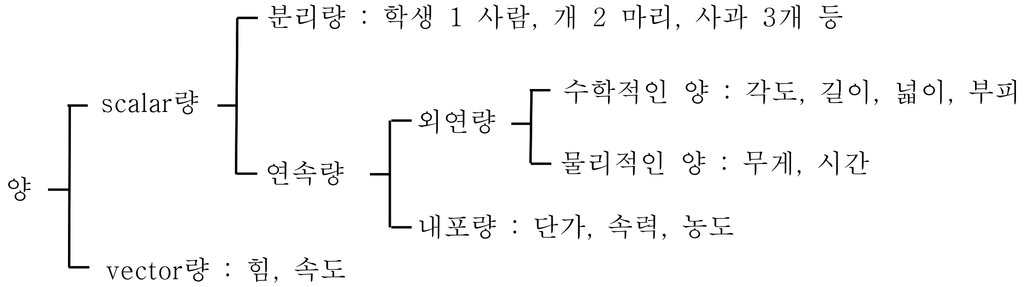

그림 1: 양의 분류

양의 분류가 [그림 1]과 같다면 단순히 어떤 단위의 몇 배를 의미하는 외연량과 두 양 사이의 비의 관계에 있는 내포량이 측정수에 포함된다는 것인데, Dewey와 Davydov의 비의 의미는 외연량과 밀접하나, Confrey의 비의 의미는 내포량과 더욱 밀접한 관계를 보인다. 또한 분리량은 기수의 의미로 연결이 될 수 있으므로 수의 개념의 각각의 분류와 양의 분류 사이에는 서로 관련이 있는 것으로 볼 수 있다.

3 지레의 원리를 이용한 '내포량의 평균 공식'

3.1 지레의 원리

물리학에서 지레의 원리는 다음과 같이 설명하고 있다. 지레에 작용하는 힘 중에서 막대를 받쳐주고 있는 점을 받침점(P), 힘을 가해 주는 점을 힘점(F), 그리고 물체에 힘이 작용하는 점을 일점(W)이라고 한다. 힘점에는 $b \times f$(b는 힘점과 받침점 사이의 거리, f는 힘점에 가해진 힘)인 힘의 모멘트가 작용하고, 일점에는 $a \times w$(a는 일점과 받침점 사이의

거리, w는 물체의 저항력 즉, 무게)인 힘의 모멘트가 앞의 것과는 반대방향으로 작용하여 $a \times w = b \times f$가 될 때 지레는 평형을 유지한다.

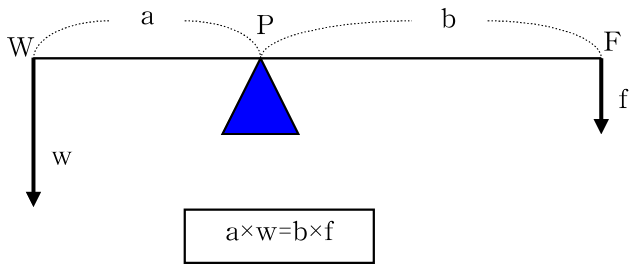

그림 2: 지레의 원리 1

3.2 '내포량의 평균 공식'의 유도

모든 내포량의 값은 두 양 또는 여러 양의 비의 값으로 결정된다. 즉, 『내포량 $= \dfrac{\text{분자요소}}{\text{분모요소}}$』라는 식이 성립된다.

이 때 분모요소 중 가변요소는 내포량의 웨이트를 결정하게 되는데 이것을 본 논문에서는 비중(比重)이라는 용어를 사용하기로 하겠다. 내포량의 이항평균의 조작적 학습에 이용하기 위해서 내포량의 각각의 요소와 지레의 원리에서의 각각의 요소간에 관계를 지어보면 아래와 같다.

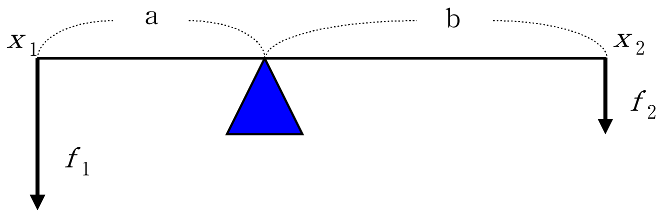

그림 3: 지레의 원리 2

여기에서 x_1, x_2는 내포량이고, f_1, f_2는 두 내포량 각각의 비중이다. a, b는 균형점에서 두 내포량 사이의 거리이고, 두 내포량간의 균형이 이루어졌다고 할 때, $a \times f_1 = b \times f_2$이므로, $a : b = f_2 : f_1$이 되고 이 때, a, b의 양의 의미는 절대량의 의미가 아닌 상대량의 의미이므로 f_2와 f_1으로 대체해도 무방하다. 따라서 아래와 같은 도식이 성립한다.

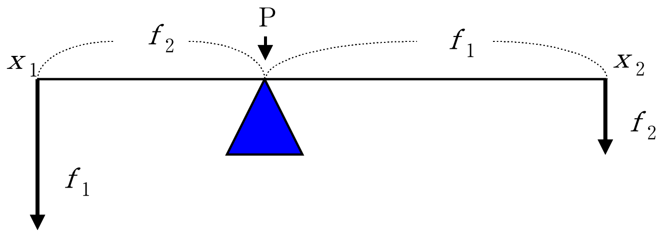

그림 4: 지레의 원리 3

두 내포량의 점 P에서 균형을 이루게 되고, 내포량의 평균은 두 내포량 x_1, x_2를 $f_2 : f_1$로 내분하는 점 P에서의 값이다. 따라서 두 내포량의 평균을 M이라 두면,

$$\begin{aligned} M &= x_1 + (x_2 - x_1) \times \frac{f_2}{f_1 + f_2} \\ &= \frac{x_1 f_1 + x_1 f_2 + x_2 f_2 - x_1 f_2}{f_1 + f_2} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}}$$

라는 '내포량의 평균 공식' 을 유도할 수 있다.

3.3 지레의 원리를 이용한 '내포량의 이항평균 공식' 의 적용

앞에서 얻어진 '내포량의 평균 공식' 으로 2절에서 제시한 6가지 종류의 내포량의 평균을 구하는 문제에 대한 풀이를 해 보면 아래와 같다.

예1) 【속력】 $\dfrac{70 \times 12 + 95 \times 18}{12 + 18} = 85(\text{m/분})$

예2) 【농도】 $\dfrac{10 \times 100 + 20 \times 300}{200 + 300} = 16\%$

예3) 【인구밀도】 $\dfrac{400 \times 200 + 6000 \times 500}{200 + 500} = 4400(\text{명/km}^2)$

예4) 【단가】 $\dfrac{6300 \times 18000 + 7000 \times 24000}{18000 + 24000} = 6700(\text{원/마리})$

예5) 【일인당 국민소득】 $\dfrac{500 \times 3000\text{만} + 8900 \times 4000\text{만}}{3000\text{만} + 4000\text{만}} = 5300(\$/\text{명})$

예6) 【온도】 $\dfrac{18 \times 270 + 67 \times 360}{270 + 360} = 46(°\text{C})$

]
모든 종류의 내포량의 평균을 각각의 공식에 대입하여 풀어야 하는 불편함을 지레의 원리를 이용한 ‘내포량의 평균 공식’으로 계산을 함으로써 종류에 관계없이 한 가지의 공식으로 해결할 수 있다는 간결함을 얻을 수 있다.

3.4 지레의 원리를 이용한 조작적 학습의 응용 및 두 내포량의 이항평균의 통합 공식의 응용

지레의 원리를 이용한 조작적 학습은 단순히 두 내포량의 평균을 구하는 경우외에도 다양한 활용을 보인다. 또한 이항평균의 통합공식도 그 활용에 따라 변형된 공식이 유도되며 대표적인 활용의 예는 아래와 같다.

첨가 내포량의 산출

어떤 내포량 x_1이 f_1만큼의 비중으로 있을 때, 내포량 목표치 M만큼 f_1+f_2의 비중의 만들려고 한다면 비중 f_2로 어느 정도의 내포량을 첨가해야 하는지를 구하고자 할 때, 지레의 원리를 이용한 조작적 학습으로 설명이 가능하다.

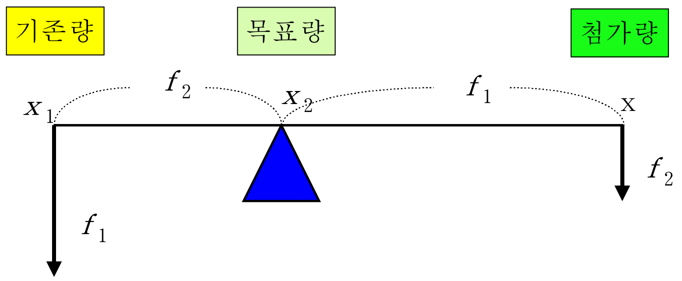

그림 5: 지레의 원리 4

두 내포량 x_1, x_2 에서 각각의 비중이 f_1, f_1+f_2가 되므로 첨가량의 비중은 저절로 f_2가 된다. 따라서 비중이 f_1+f_2인 목표 내포량 x_2가 두 내포량 x_1과 x의 평균이 되므로 아래와 같은 식이 성립할 것이다.

$$x_2 = \frac{x_1 f_1 + x f_2}{f_1 + f_2}$$

즉, 첨가 내포량 x의 산출공식은

$$\boxed{x = \frac{x_2(f_1+f_2) - x_1 f_1}{f_2}}$$

단, 기존 내포량 : x_1, 기존량의 비중 : f_1
목표 내포량 : x_2, 목표량의 비중 : $f_1 + f_2$

예) 10%의 소금물 200g이 있다. 16%의 소금물 500g을 만들려면 몇 %의 소금물을 넣어야 할까?

(풀이) 이것을 첨가 내포량의 산출 공식에 대입하여 계산하면 아래와 같다.

$$\frac{16 \times (200+300) - 10 \times 200}{300} = 20\%$$

3.5 잔존 내포량의 산출

어떤 내포량 x_1이 $f_1 + f_2$만큼의 비중으로 있을 때, 내포량 x_2를 비중 f_2만큼 추출해 버리면 비중 f_2만큼의 잔존 내포량은 얼마가 될지를 구하고자 할 때, 지레의 원리를 이용한 조작적 학습으로 설명이 가능하다.

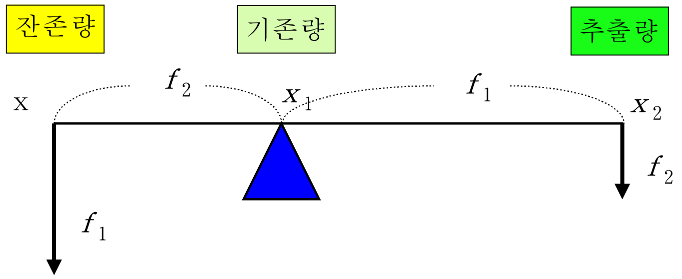

그림 6: 지레의 원리 5

두 내포량 x_1,x_2 에서 각각의 비중이 $f_1 + f_2, f_2$가 되므로 잔존량의 비중은 저절로 f_1이 된다. 따라서 비중이 $f_1 + f_2$인 기존 내포량 x_1이 두 내포량 x_2와 x의 평균이 되므로 아래와 같은 식이 성립할 것이다.

$$x_1 = \frac{x f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}$$

즉, 잔존 내포량 x의 산출공식은

$$x = \frac{x_1(f_1+f_2) - x_2 f_2}{f_1}$$

단, 기존 내포량 : x_1, 기존량의 비중 : $f_1 + f_2$

추출 내포량 : x_2, 추출량의 비중 : f_2

예) 16%의 소금물 500g이 있는데, 10%의 소금물 200g을 추출해 내면 남은 소금물의 농도는 몇 %가 될까?

(풀이)

이것을 잔존 내포량의 산출 공식에 대입하여 계산하면 아래와 같다.

$$\frac{16 \times (200+300) - 10 \times 200}{300} = 20\%$$

3.6 가중평균과 내포량의 평균

내포량 이항평균 통합 공식의 확장 적용

내포량의 평균을 구하는 경우에 농도가 10%, 20%, 34%인 소금물이 각각 200g씩 있다고 할 때는 단순평균을 사용해도 무방할 것이다.

$\frac{10+20+34}{3}$ 과 같이 구해도 관계없다. 그러나 농도가 10%인 소금물이 200g, 20%인 소금물이 300g, 34%인 소금물이 250g이 있으면 단순평균을 사용하기가 곤란하며, 이 때에는 두 내포량의 '이항평균의 통합 공식' 을 두 번 사용하면 구할 수 있을 것이다. 그렇다면 서로 다른 비중의 n 가지의 서로 다른 내포량의 평균을 구하고자 한다면 두 내포량의 '이항평균의 통합 공식' 을 $(n-1)$ 번 사용해야 하므로 매우 번거롭다. 따라서 내포량이항평균의 확장 적용을 생각해보자.

세 내포량 x_1, X_2, x_3 에 대한 비중이 각각 f_1, f_2, f_3 라 할 때, 먼저 두 양 x_1, x_2 의 평균 M_1 을 구해보면 $M_1 = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}$ 이므로 이 양과 x_3 의 평균을 구하면

$$\begin{aligned} M &= \frac{\frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1+f_2}(f_1+f_2) + x_3 f_3}{f_1+f_2+f_3} \\ &= \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{f_1+f_2+f_3} \end{aligned}$$

가 되어 내포량 이항평균의 통합 공식이 확장 적용이 됨을 알 수 있다.

단순평균과 가중평균

평균이란 몇 개의 수량을 대표로서 쓰이는 것으로 평균값이란 평균한 결과 얻어진 값이다. 평균에는 산술평균, 기하평균, 조화평균 등 많은 것이 있으나 일반적으로 평균이라 할 경우에는 산술평균을 가리키는 경우가 많으며, 이것은 가중평균과 대비하여 단순평균이라 한다. 내포량의 평균은 성질의 크기를 따지므로 두 양의 가중치에 따라 두 양의 평균이 어느 한 쪽에 치우치게 되므로 가중평균을 적용한다.

가중평균이란 웨이트(무게)를 붙였을 때의 평균이다. 이를테면 N개의 수치 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 산술평균 M은,

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{N}$$

으로 구할 수 있다. 그런데 이 N개 중에 x_1이 f_1개, x_2이 f_2개, $\cdots$, x_n이 f_n개 있다고 하면,

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N$$

이 되고, 이 N개의 수치의 합계는,

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n$$

이 되므로 M의 식은

$$M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N}$$

이 된다. 이것은 서로 다른 n개의 수치 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 에 대하여 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 이라는 웨이트가 붙었다고 생각하여, M의 식을 가중평균이라 한다. 이것은 수치 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 의 중요도나 영향도가 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 만큼 있다고 생각해도 좋다.

내포량의 평균 공식

어떤 종류의 내포량이 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 가 있고, 그 각각에 대한 비중이 $f_1, f_2 \cdots, f_n$ 일 때, 이 **내포량들의 평균** M은 가중평균의 원리가 적용되어 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boxed{M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N} \quad (\text{단}, f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N)}$$

예를 들어 부산에서 서울까지 1시간 동안은 시속 90km로, 2시간 동안은 시속 100km로, 1시간 20분 동안은 시속 105km로 달렸다면 평균속력은

$$\frac{1 \cdot 90 + 2 \cdot 100 + 1\frac{1}{3} \cdot 105}{4\frac{1}{3}} = 99\frac{3}{13}$$

이 되어 $99\frac{3}{13}$(km/시)이다.

3.7 심프슨의 파라독스의 해결

이상에서 밝힌 내포량의 평균을 구하는 공식으로 앞에 제기하였던 신입생의 합격률에 관한 궁금증을 해결해 보면 다음과 같다.

고차원의 제표가 변할 수 있는 통계

동일한 저차원의 제표라도 각각의 비율의 비중이 어느 정도씩이냐에 따라 고차원의 제표는 변할 수 있다. '내포량의 평균 공식' 에 의하여 여러 저차원의 각 양을 어떻게 두느냐에 따라 변할 수 있는 고차원의 제표를 아래의 [표 2]에서 생각해 보자.

표 2: 신입생 합격자의 수 현황

계열	구분	남학생		여학생	
		합격생	불합격생	합격생	불합격생
자연계열	학생수	$\frac{2}{5}a$ (명)	$\frac{3}{5}a$ (명)	$\frac{1}{3}b$ (명)	$\frac{2}{3}b$ (명)
	합격률	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{3}$	
인문계열	학생수	$\frac{3}{4}c$ (명)	$\frac{1}{4}c$ (명)	$\frac{5}{7}d$ (명)	$\frac{2}{7}d$ (명)
	합격률	$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{7}$	
전체합격률		$\frac{\frac{2}{5}a + \frac{3}{4}c}{a + c}$		$\frac{\frac{1}{3}b + \frac{5}{7}d}{b + d}$	

먼저, 위의 [표 2]에서와 같이 자연계열에 지원한 남학생과 여학생의 수를 각각 a명, b명이라 두고, 인문계열에 지원한 남학생과 여학생의 수를 각각 c명, d명이라 두면 내포량의 평균을 구하는 공식에 의하여 남학생의 전체 합격률은 $\frac{\frac{2}{5}a+\frac{3}{4}c}{a+c}$가 되고, 여학생의 전체 합격률은 $\frac{\frac{1}{3}b+\frac{5}{7}d}{b+d}$가 된다. 따라서 앞의 [표 1]에서 보이는 수치로는 전체 합격률이 여학생이 더 높았으나, '내포량의 평균 공식' 에 의하여 엄밀히 살펴보면 a, b, c, d에 따라 합격률은

달라진다. 예를 들어 [표 1]에서와 같이 $a=5, b=3, c=4, d=7$이라 두면 남학생의 전체 합격률은 $\frac{5}{9}$가 되어 여학생의 전체 합격률인 $\frac{6}{10}$보다 낮으나, $a=5, b=3, c=8, d=7$이라 두면 남학생의 전체 합격률은 $\frac{8}{13}$가 되어 여학생의 전체 합격률$\frac{6}{10}$인 보다 더 높게 된다. 따라서 합격률이란 내포량 역시 그 합을 구할 때에는 내포량의 평균을 구하는 식을 따라야 함을 알 수 있다.

지레의 원리에 의한 심프슨의 파라독스의 직관적 이해

[표 1]에서와 같이 저차원의 제표($\frac{2}{5} > \frac{1}{3}, \frac{3}{4} > \frac{5}{7}$)가 고차원의 제표($\frac{5}{9} < \frac{6}{10}$)를 뒤집어 놓을 수 있는 이유는 저차원의 각각의 합격률의 비중이 차이가 나기 때문이다. 이를 지레의 원리를 이용하여 그림으로 살펴보면 [그림 9]와 같다. 자연계열과 인문계열의 남학생의 합격률이 여학생의 합격률보다 높지만 합격률이 상대적으로 높은 집단인 인문계열의 비중이 전체적으로 여학생 집단에서 훨씬 더 높음으로 인해서 여학생 집단 전체의 합격률이 남학생 집단의 합격률보다 더 높은 것이다. 따라서 심프슨의 파라독스가 간과한 것은 두 내포량을 합할 때, 각각의 내포량의 비중이 그 평균을 구하는 결정적인 역할을 한다는 수학적 원리인 것이다.

아래의 [그림 9]와 같이 지레의 원리에 의한 조작적 학습법은 심프슨의 파라독스의 직관적 이해를 도울 수 있는 도식인 것이다.

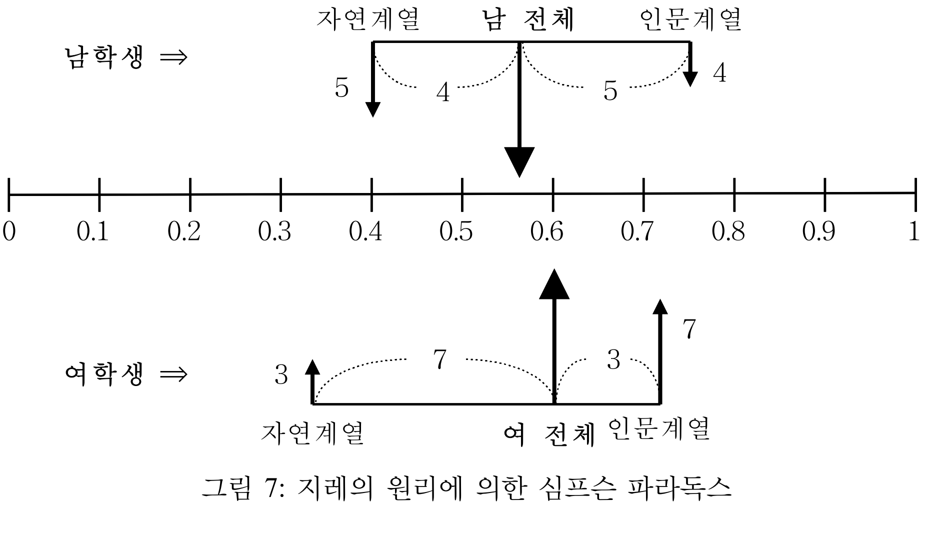

그림 7: 지레의 원리에 의한 심프슨 파라독스

4 지레의 원리를 이용한 조작적 학습법

초등학생을 비롯한 수학의 형식화에 길들여져 있지 않은 학생들 대상으로 하는 수업에서는 지레의 원리를 이용한 조작적 방법으로 학생들의 이해를 도운 후에 III장에서의 공식을 적용한 수식의 전개를 펼칠 수 있을 것이다.

이 조작적 학습법을 이용한 농도와 온도에 관한 두 문제의 풀이를 소개하면 아래와 같다.

예2) 【농도】

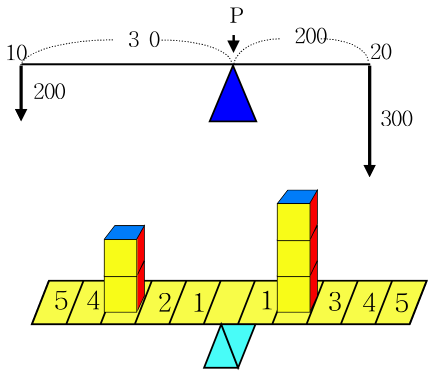

그림 8: 지레의 원리의 적용 1

위의 [그림 8]에서 보듯이 10과 20을 3 : 2로 내분하는 점 P에서의 값이 두 내포량의 평균이므로 계산을 하면 아래와 같다.

$$10 + 10 \times \frac{3}{5} = 16$$

즉, 평균 농도는 16%가 된다.

예6) 【농도】

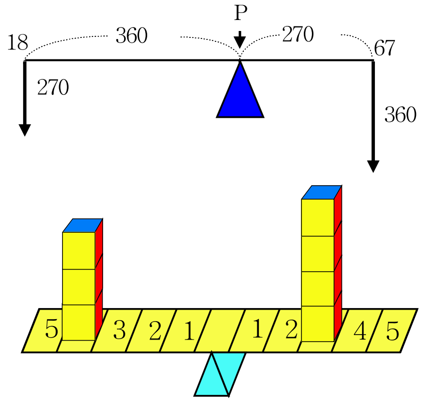

그림 9: 지레의 원리의 적용 2

위의 [그림 9]에서 보듯이 18과 67을 4 : 3으로 내분하는 점 P에서의 값이 두 내포량의 평균이므로 계산을 하면 아래와 같다.

$$18 + 49 \times \frac{4}{7} = 46$$

즉, 평균 온도는 46(°C)가 된다.

학생들이 어릴 때 시소를 타면서 경험했던 것을 이용한 지레의 원리는 학생들의 직관적 이해를 도울 것이며, '내포량의 평균 공식'을 유도하는 과정뿐만 아니라 그렇게 얻어진 공식에의 활용에 있어서 학생들이 보다 쉽고 친근하게 접근할 수 있게 도와줄 것이다.

5 결론

본 논문은 속도, 온도, 농도, 밀도, 단가, 일인당 국민소득 등의 내포량의 평균을 구할 때, 내포량마다 다른 공식을 적용하여 구해야 하는 불편함을 해소하기 위하여 지레의 원리를 이용하여 두 내포량의 평균공식, $M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}$를 유도하였고, 이 공식의 관계적 이해를 돕기 위해 지레의 원리를 이용한 조작적 학습법을 제시하였다. 비가 적용되는 현실적인 여러 가지 다양한 양들의 계산에 있어서 보다 쉽고 친근하게 접근할 수 있는 양팔저울의 균형을 맞추는 실험을 통하여 학생들이 형식화하는 데 도움을 줄 수 있을 것이다.

수학뿐만 아니라 물리학을 비롯한 여러 학과에서 다양한 내포량이 나오고 그 내포량들의 다양한 공식을 한 가지의 원리에 의하여 한 가지의 공식으로 평균을 구할 수 있게 된

것이 이 논문이 가지는 가치일 것이다. 두 양뿐만 아니라 여러 양을 단 한 번의 공식에의 적용으로 해결할 수 있도록 한 이 내포량 평균 공식 $M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N}$ (단, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N$)은 새로운 공식이 아니라 가중평균을 구하는 공식이었다. 그 동안의 가중평균은 매우 다양한 여러 변량들을 몇 개의 계급으로 나누어 도수분포표를 구하고 각 계급의 계급값에 도수를 곱해서 구하는 경우에서 나오는 평균이었다. 즉, 웨이트가 다른 이산량들의 평균을 구하기 위해서 이용되어 왔던 것이다. 그것을 이 논문에서는 내포량의 평균을 구하는 데에도 적용할 수 있음을 보였다. 또한 지레의 원리를 이용한 조작적 학습법에서 평균을 구하는 것뿐만 아니라 첨가량을 구할 때나, 잔존량을 구할 때에도 유용하게 적용됨을 보였다.

또한 통계학에서 의문거리였던 하위 제표의 방향성과 다른 모습을 보이는 상위제표의 통계자료에 대한 심프슨의 파라독스의 의문점을 조작적 학습법을 통하여 해결하였다. 이는 단순히 확률적 사고의 특성이라고 치부되어온 부분을 가중평균의 원리를 이용하여 밝힌 것이다.

참고 문헌

[1] 강지형, 김수환, 라병소, 박성택, 이의원, 이정재, 정은실, 『초등수학교육론』,동명사, 1999.

[2] 고정화, 《학령 초의 활동주의적 수 개념 구성에 관한 연구》, 대한수학교육학회 논문집 17(2007), No.3, 309-331.

[3] 김명운, 《맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈 지도》, 학교수학. 11(2009), No. 4, 대한수학교육학회, 2009.

[4] 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 『수학교육과정과 교재연구』, 경문사, 2006.

[5] 박성택, 신택균, 양인환, 손용규, 이정재, 『수학교육』, 동명사, 1997.

[6] 서성보, 『수학 및 수학교육 용어 사전』, 교문사, 1000.

[7] 송인명외 2인, 『물리 II』, 교학사, 1998.

[8] 교육부, 『초등학교 교사용지도서 수학 6-1』, 국정교과서주식회사, 1998.

[9] 유현주, 『유리수 개념의 교수현상학적 분석과 학습-지도 방향에 관한 연구』, 서울대학교 대학원 박사학위논문, 1995.

The Mean Formula of Implicate Quantity

Bumin Elementary School Kim Myung Woon

This study presents one universal mean formula of implicate quantity for speed, temperature, consistency, density, unit cost, and the national income per person in order to avoid the inconvenience of applying different formulas for each one of them. This work is done by using the principle of lever and was led to the formula of two implicate quantity, $M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2}{f_1 + f_2}$, and to help the understanding of relationships in this formula. The value of ratio of fraction cannot be added but it shows that it can be calculated depending on the size of the ratio. It is intended to solve multiple additions with one formula which is the expansion of the mean formula of implicate quantity. $M = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N}$, where $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = N$.
For this reason, this mean formula will be able to help in physics as well as many other different fields in solving complication of structures.

Key Words: mean of implicate quantity, rate, fraction of the meaning of ratio, principles of lever

2000 Mathematical Subject Classification:
ZDM Subject Classification:

접수일 : 2010년 7월 22일 수정일 : 2010년 8월 20일 게재확정일 : 2010년 8월 23일