한국수학사학회지 제23권 제3호 (2010년 8월) 75–90

함수 개념의 현상학

경북대학교 사범대학 수학교육과 유윤재
yjyoo@knu.ac.kr

함수 개념을 실제로 사용되고 있는 측면에서 분석하면 인과, 명명, 연산, 변화, 도형, 형태, 변수, 범함수, 작용소 등 적어도 9가지의 양상이 존재한다. 이러한 분석을 통하여 함수 개념은 현재 3단계로 성장해 왔다는 것이 밝혀졌다.

주제어: 함수 현상, 함수

1 서론

현대 함수 개념은 Dirichlet에 의하여 제안되고 Bourbaki 학파에 의하여 정의된 Dirichlet-Bourbaki 함수 정의를 사용하고 있는데 여기서 이것을 표준 함수 정의라고 하자. 표준 함수 정의는 수학에서 나타난 모든 함수 현상을 추상하여 만든 정의이다. 그 결과 이 개념은 함수 개념의 지표를 축조하기 위한 원리적이고 선언적 정의이지 실제 사용하기 위하여 제시된 정의는 아니라는 점이다. 즉 수학자는 함수 개념을 다룰 때 이런 추상적 정의 보다는 보다 실체 상황에 적합한 함수 개념을 다룬다. 이 점을 좀 더 구체적으로 말하면 다음과 같이 비유할 수 있다. 사람이 말을 할 때 음소로 환원하여 말하는 것이 아니라 의미 중심으로 말하는 것처럼 수학적 개념이 논리학이나 집합론의 언어로 환원될 수 있다고 해도 수학자가 실제로 수학적 탐구를 할 때 수학적 개념을 집합론이나 논리학으로 환원된 언어를 사용하지는 않는다. 수학적 대상을 생각한다는 것은 그 대상에 담겨 있는 수학적 의미를 생각하는 것이지 그 의미를 담고 있는 형식을 생각하는 것이 아니기 때문이다. 마찬가지로 함수와 관련되어 생각할 때도 함수의 표준 정의를 의식하기 보다는 실제 함수 현상이 일어나는 맥락과 관련지어 생각한다.

그러면 여기서 함수와 관련된 사고를 할 때 수학자는 어떤 맥락에서 함수를 바라보게 될까? 사람들은 함수 개념이 적용되는 조건, 기능과 역할이라는 맥락성에 기초를 두고 생

각한다. 그러므로 사람들이 함수 개념을 어떻게 사용하는가를 관찰하기 위해서는 함수의 표준 정의보다는 함수 개념의 현상학적 측면을 주목함으로써 함수 현상을 바르게 볼 수 있다.

본 연구는 함수의 현상학적 분류로서 함수의 형성 과정, 사용하는 맥락, 기능과 역할을 중심으로 기술하려고 한다. 실제로 본 연구에 의하면 함수 개념의 단일 표준 정의에 비하여 현상학적 함수 개념은 적어도 9개 이상으로 존재한다는 것이 밝혀졌다. 함수의 현상학적 분류에 대한 선행 연구는 그리 많지 않다. 예를 들면 물리적 현상을 중심으로 분류한 Freudenthal([7])의 연구가 알려져 있으나 현재까지 나타난 모든 함수 현상을 포괄적으로 분류한 것은 보이지 않는다. 이에 대하여 본 연구에 제시된 분류는 현재까지 나타난 함수 현상의 모든 것을 포함하고 있다고 본다.

2 표준 정의의 문제점

여기서는 인지심리학과 해석학의 관점에서 함수 개념의 형식적 정의가 가진 문제점을 논의한다. 먼저 인지심리학의 관점에서 논하기 위하여 1970년대에 발표된 인지심리학의 혁명적 이론이라고 평가되고 있는 개념에 관한 두 가지 이론을 논의할 필요가 있는데 하나는 개념의 본질에 관한 것이고 다른 하나는 개념의 인지적 우월성에 관한 것이다.

전통적으로 개념이란 속성들의 집합의 필요충분조건이라는 Aristoteles의 속성기반 견해가 1970년대 까지 이어 왔었다. 그러나 Rosch([16],[17]), Rosch & Mervis([18],[19])의 연구에 의하면 개념은 속성이 아니라 유사성에 기초한다는 이론이 제시되었는데 이것을 개념에 대한 유사성 기반 견해라고 한다. 유사성 기반 견해는 초기 이론으로서 두 가지 이론이 있는데 하나는 원형 이론(prototype theory)이고 다른 하나는 본보기 이론(examplar theory)이다. 원형 이론에 의하면 개념은 어떤 대표성을 띠는 추상적인 특징 속성에 의하여 범주화된다는 것이다. 예를 들어 새의 원형은 날개가 있고 딱딱한 부리가 있고 다리가 두 개이고 날라 다니는 어떤 것이다. 한편 본보기 이론은 관찰자가 어떤 사례들을 마음속에 가지고 있고 새로운 대상이 나타났을 때 그 대상을 마음속에 이미 가지고 있는 사례들과 비교하여 범주화한다는 이론이다. 이 두 이론은 세부적으로 차이가 있지만 모두 fuzzy 개념을 가지고 있다.

개념의 인지적 우월성이란 대상은 다양한 이름을 가질 수 있지만 실제로 사람들이 대상의 이름을 부여할 때 나타나는 명명 작용은 임의적이지 않고 어떤 일관성이 나타난다는 점이다. 예를 들면 길이가 10인 세 변을 가진 삼각형을 보고 도형, 삼각형, 정삼각형, 예각

삼각형 등 다양하게 부를 수 있다. 그러나 실제로 이 경우에 대부분의 사람들은 삼각형이라고 말하고 약간은 정삼각형 또는 예각삼각형이라고 말하기는 해도 그것을 도형이라고 부르는 사람은 극소수라는 점이다. 여기서 가장 많이 부르게 되는 이름을 기본수준(basic level)이라고 한다. 삼각형이라는 이름이 바로 기본수준에 해당된다. 앞에서 3가지 층위, 즉 도형(상위수준), 삼각형(기본수준), 정삼각형(하위수준)을 제시하였는데 개념적 우월성을 갖는 층위는 바로 기본수준으로서 지식의 구성은 바로 기본수준에서 시작된다([18]). 이러한 이유 때문에 Lakoff & Johnson([11],[12])은 기본수준을 그의 체험주의(experientialism) 인식론을 전개하는 요소로 간주했다. 기본수준 이론에 의하면 함수의 기본수준은 일차함수, 이차함수, 삼각함수, 지수함수 등이고 대응은 상위수준에 해당된다. 앞의 논의에 따르면 대응 개념은 기본수준이 아니기 때문에 함수 관련 지식을 '실질적으로' 구성하는 단초를 제공한다는 점은 근거가 없다. 실제로 수학사를 보더라도 대응 개념은 이전의 모든 함수 현상을 통합하기 위한 개념으로 사람들이 먼저 인식한 함수 개념이 아니었다. 이러한 관찰은 함수 개념의 학습의 발판이 어디에서부터 시작되어야 하는가에 대한 인지적 근거를 제공한다.

한편 여기서 하나의 반론이 제기된다. 수학 용어라는 것은 엄격하게 정의된 것이 아닌가? 기본수준이나 유사성 기반 견해들은 사전적 개념과 같이 자연발생적으로 나타난 개념에만 적용될 수 있고 수학적 개념은 속성기반 견해에 의한 것이 아닌가라고 반문할 수 있다. 이 점은 두 가지 사실에 의하여 아니라고 할 수 있다. 먼저 예비 실험에 의하면 학생들은 수학적 상황에서도 기본 수준에서 가장 높은 반응을 보였다. 한편 학교수학의 진술은 일상 언어에 의하여 축조되어 있다. 예를 들면 '합집합', '공통집합', 극한에서 '가까이 간다,' …등, 수학에서 수학적 개념들은 일상 언어에 기초되어 있고 이런 개념들은 학생들이 교실 '밖에서' 형성된 언어 체계를 통하여 이해하고 있다. Lakoff & Núñez([13])는 이러한 국면을 개념적 은유에 의하여 지탱되고 있다고 보았다.[1] 이에 의하면 아동의 수학적 개념 형성이란 형식적 수학에 대한 일상 언어에 의한 해석의 과정이며 이런 맥락에서 개념 학습은 인식론보다 해석학의 주제가 된다. Lakoff & Johnson([11],[12])의 주장처럼 일상 언어가 은유에 의하여 부분적으로 구조화 되어 있다면 일상 언어에 의한 수학 학습은 소음이 필연적으로 수반된다는 것을 의미하고 이 소음에 의하여 생성되는 모호성으로 인하여 결국 속성기반 견해는 설 자리를 잃게 된다. 이런 현상은 Lakatos가 관찰한 지식의

1) 혹자는 이 점에 대하여 반대할지도 모른다. 그러나 우리가 집합에서 $x \in A$라고 할 때 '속한다'는 개념은 수학적으로 볼 때 '$\in$'는 무정의 용어이기 때문에 발화를 한 순간 일상 언어가 가진 기의를 차용한 것이며 . 따라서 수학적 개념의 원류를 되돌아보면 모두 무정의 용어로 환원되기 때문에

정당화 과정보다 훨씬 더 심각한 수준인 의미론적 문제를 학교수학에서 안게 된다는 것을 의미한다.

이제 표준 정의를 해석학적 관점에서 다루어보자. 함수 개념을 어떤 식으로 전개하든 궁극적으로 해석의 문제로 귀착된다면 이제 대응이라는 Dirichlet의 견해는 어떻게 해석될까? 도대체 Dirichlet가 말하는 대응이라는 게 무엇인가? 정상적인 수학을 배운 사람이라면 대응 개념을 이해하고 있고 이 기반에 기초하여 함수인 것과 함수가 아닌 것을 구별할 수 있다. Dirichlet의 대응 개념을 집합론적 언어로 정의한 것이 바로 오늘날 우리가 사용하고 있는 표준 정의이다. 표준 정의는 적어도 두 가지 문제점을 안고 있다. 하나는 표준 정의는 Dirichlet가 의도했던 의미를 완벽하게 표상하고 있는가? Dirichlet의 의도와 상관없이 일단 개념이 정의에 의하여 대치될 경우 일반적으로 부각되는 점과 은폐되는 점이 나타난다([12]). 전자는 정의에 의하여 개념이 명료해진다는 점이고 후자는 정의는 원래 개념이 가진 어떤 의미들이 제거된다는 점이다. 이것은 개념이 문자화 될 때 가지는 필연적 이중성이다. 다른 하나는 표준 정의는 원리적으로 무정의 용어에 기초하고 있기 때문에 의미를 가지지 않는다. 그런데 교사가 표준 정의를 형식적으로 인식하고 있더라도 학생들에게 설명하기 위해서는 집합론의 언어가 아닌 일상 언어를 사용해야 한다. 이때 사용하는 일상 언어는 사용자의 사회문화적 맥락이 개입된다. 즉 교사는 함수 정의를 이해시키기 위하여 형식적 언어가 아닌 일상 언어를 사용한다. 이때 대표적인 용어가 ‘대응’이다. 교사가 함수 개념의 표준 정의를 대응이라는 용어로 설명하겠지만 학생들이 ‘대응’ 개념을 이해할 때 교사의 정보 그대로 수용하지 않으며 대신에 학생 자신이 가진 대응 개념으로 받아드린다. 즉 교사의 대응 개념이 가진 기표와 학생이 가진 기표는 일치해도 그 두 기의들이 일치한다는 보장은 없다. 그러므로 교사의 정보가 학생에게 전달될 경우 그 기표에는 바람직하지 않는 소음이 추가되고 이것은 학생의 오개념으로 나타난다.

이런 소음은 함수 개념을 처음 배우는 학생들에게 즉각적으로 제거되지 않기 때문에 함수 개념의 이해를 위한 교수학적 처치가 필요하게 되었고 실제로 이러한 소음을 제거하기 위하여 수표, 화살표, 순서쌍, 대수식 등과 같은 다양한 “정신모델[2)]”이 제안되었으며 이들의 일부를 통하여 함수 개념을 도입하거나 이 방식이 충분하지 않다고 판단될 경우에는 모두를 사용하기도 한다. 그럼에도 불구하고 국내 수학교육의 교육과정 변천사를 볼 때 이러한 시도들도 여전히 미흡하다는 것이 드러났다. 예를 들면 함수 개념의 도입 과정에서 먼저 대응 개념을 도입하다가 문제가 있음을 발견하고 개선책으로 함수 사례를 먼저 도입

2) 이 용어는 Johnson-Laird([10])에 의하여 외부 상황을 이해하기 위하여 마음에 그리는 어떤 표상들을 의미한다. 정신모델은 심상이 될 수도 있고 구체적인 예가 될 수도 있는 포괄적인 개념이다.

했는데 여기서 다시 문제가 나타나 다시 대응 개념을 먼저 도입하고 있다.

그런데 앞에서 열거한 모형들은 결국 표준 정의의 학교용 해설판으로서 표준 정의를 약간 쉽게 설명할 수는 있어도 표준 정의가 가진 추상성 자체를 해체하지는 않는다. 그러므로 그런 모형들을 통한 교수적 접근은 함수 개념을 유연하게 사용하기 위한 학생들의 능력을 확보하는데 근본적인 한계를 가진다. 이에 대한 대안으로서 함수 현상이 원래 있던 곳에서 함수 개념을 획득하거나 구성하는 방식을 생각할 수 있다. 이것은 함수 현상이 태동한 그 사태를 직시함으로써 가능하다. 그러므로 이 접근법은 현상학적이다. 그러나 현상학적 접근이 즉각적인 학습 이론을 만들어 줄 수 있다는 것을 의미하는 것은 아니며 앞에서도 언급했다시피 학습 이론을 만들기 위하여 참조되어야 할 것이라는 점이고 전체적으로는 함수 개념에 대한 지도 패러다임의 변화를 모색해야 할 시점이라는 점이다.

3 함수의 현상학적 분류

여러 수학 문헌을 통하여 함수 개념은 인과, 명명, 연산, 변화, 도형, 구조사상, 변수, 범함수, 작용소 등 9가지 사태로 나타나고 이들은 다시 전 함수 층위, 표준 함수 층위, 상위 함수 층위 등 3가지 층위로 범주화 된다.

(1) **인과.** 함수 개념을 인과로 보는 경우는 원인과 결과의 관계성을 의미한다. 인과율은 서양 과학의 3대 기반이라고 할 수 있는 인과율, 기계론, 양화가능성 중의 한 가지를 차지한다. 원인은 우주 섭리에 의하여 나타나는 심리관 또는 자연관을 반영한 것으로서 함수란 우주를 지배하는 인과 규칙들이며 원인에 대한 결과는 인간에 의하여 결정되는 것이 아니라 자연 법칙에 의하여 나타나는 필연성을 가지고 있다. Davis & Hersh([3])는 자연의 내적 구조로 작용하는 수학을 무의식적 수학이라고 하였는데 이것이 인과성을 학습하게 해주는 자연적 학습 도구들이다. 인과로서의 함수 현상에서 함수의 정의역은 모든 원인들로 조직되나 그것이 명시될 수 있는 것은 아니기 때문에 정의역 개념은 본질적인 것이 아니다. 한편 이 함수 현상은 현상의 재현성에 의하여 귀납을 가능하게 하고 심리적 견고함을 가지게 한다. 수학에서 이 개념은 원인/결과 도식인 가정/결론, 문제/답 등과 같은 포괄적인 인지 과정을 인도하기도 한다. 연역에 의하여 인과성을 추론할 수 있기 때문에 연역은 인과 현상을 해명할 도구이다.

(2) **명명.** 이것은 대상에 이름을 부여하는 개념이다. 명명과 인과가 심리적 공통점이 있지만 다른 점은 인과가 자연에 대한 표상 작용이라면 명명 현상은 생명체가 세상에 적

응하기 위한 도구로 작용한다. 이런 맥락에서 명명 작용은 Lakoff & Johnson([11],[12])의 의미에서 체화(embodied)되어 있으며 명명에 대한 기본수준(basic level)의 연구가 이를 뒷받침한다. 예를 들면 삼각형의 그림을 제시하고 그 이름을 말하라고 하면 삼각형이나 가끔은 그 하위 개념인 정삼각형이나 직각삼각형 등으로 말하기는 해도 도형이라고 말하지는 않는 경향성을 가진다. Rosch & Mervis([18], [19])의 연구는 기본수준이 우리의 지식을 만드는 표상 수준이라는 것을 밝혔다. 한편 명명을 함으로써 범주화가 이루어지고 결국 집합이 구성된다. 즉 명명은 변수를 구성하는 최초의 정의역을 만든다.

(3) **연산.** 연산은 사칙 계산과 같은 한 개 또는 두 개의 수를 조작하여 다른 수로 산출하는 과정이다. 연산은 규칙을 따르며 그 규칙은 인간의 약속에 의하여 정립된다. 이런 점에서 연산은 앞에서 다룬 것과는 다르게 인위적이다. 연산 개념은 초기에 수의 직관에 의하여 조직되었으나 그 조직을 분석하게 되었고 이어 대수 구조라는 구조성을 연구하는 대상으로 발전하였다. 연산은 가장 근원적인 수학적 조작인 동시에 엄격한 절차 규칙이 요구되기 때문에 연산 과정에 내재된 엄격함이 이후 개념적 성장 과정에서 그대로 유지되어 수학을 엄격한 학문으로 보이게 되었다. Anderson([1])의 인지과정의 ACT-R 모형을 따르면 절차적 지식은 인지, 연합, 자율의 3단계로 습득된다고 하였는데[3] 연산이 수학에서 이런 과정을 설명할 수 있는 전형적인 사례이다. 역으로 한편 Piaget([15])는 아동의 연산 조작의 결과 절차적 지식이 개념적 지식으로 변하는 현상을 관찰하고 이에 대한 인지적 변화 과정을 연구하였는데 이것이 바로 반성적 추상화 이론이다.

(4) **변화.** 변화는 변수에 따른 함수값 변화를 주목한 것이다. 함수 개념이 변화로서 작동할 경우에는 정의역의 순서성이 주어져야 한다. 그러므로 변화 개념부터는 정의역의 역할이 드러나기 시작한다. 변화는 다시 두 가지 양상이 있는데 하나는 이산적 변화이고 다른 하나는 연속적 변화이다. 전자는 주로 대역적 변화에 초점을 맞추고 있으나 후자는 대역적 변화와 동시에 국소적 변화에도 초점을 맞춘다. 변화 사태에 주목할 수학적 관심은 Kepler에 의하여 제안된 연속성의 원리(principle of continuity)

3) 여기서 인지 단계란 규칙을 의식적으로 생각하면서 실행하는 것이고 연합 단계는 규칙을 일관성 있게 사용하는 단계이며 자율 단계는 속도와 정확성을 겸비하여 무의식적으로 자동화되는 단계이다. 이 점은 Dubinsky([6])의 APOS 이론이나 Sfard([20])의 구상화 이론(reification theory)에서 말하는 대상화 이전인 과정과 관련된 단계와 유사성을 보인다.

이다.[4] 변화 개념은 실세계와 관련된 인지과정이기 때문에 경험주의적이고 따라서 대상에 대한 표상의 정교성이 중요한 역할을 한다. 가장 어려운 인식론적 문제는 시간 축을 실수체로 대치할 수 있는가라는 문제이다. 이것은 양자론적 시간 개념과 모순되기 때문이다.

(5) **도형.** 이 사태는 함수를 그림 또는 도형으로 간주하는 경우이다. 이 개념은 좌표가 등장함으로써 본격적으로 수학적 관심이 되었다. 변화와 도형은 모두 전체성을 중요시하기 때문에 게쉬탈트적 인지라는 점에서 공통성을 가지나 변화는 역동적이고 도형은 정태적이라는 점에서 차이를 가진다. 따라서 변화가 그래프의 순서 구조를 중시하는 반면에 도형으로서의 함수는 그래프의 위상 구조를 중시하게 된다. 특히 사람이 보는 그대로 보여야 하기 때문에 함수의 정의역과 공역에 유클리드 위상[5]이 주어져 있어야 한다. 이 개념은 도형의 방정식에서 출발하여 다양체 개념으로 정립되었다. 인지적 관점에서 이 개념은 공간적 사고와 관련된다.

(6) **형태.** 함수를 형태로 보는 것은 정의역과 치역의 구조를 비교할 때인데 여기서 구조사상(morphism)을 통하여 두 구조의 관계를 비교한다. 따라서 이 측면이 주의 집중되기 위해서는 정의역과 치역이 먼저 수학적 구조를 가지고 있어야 한다. 유추란 두 구조 사이의 구조의 유사성[6]을 파악하는 인지 과정이기 때문에 이 개념은 유추적 사고와 관련된다. 구조 사상이라고 해서 반드시 인지적 복잡도가 높은 것만은 아니다. 실제로 구조 비교는 비교적 어린 나이에 발생하는데 바로 셈수 개념의 발달에서 찾을 수 있다. 수학을 구조의 학문으로 간주하는 Bourbaki 이념에 의하면 구조비교자는 두 집합의 관계성에 대한 모든 것을 규정하고 이것을 수학화 한 것이 MacLane([14])의 범주론이다.

(7) **변수.** 함수를 변수로 간주하는 것은 정의에 의하여 주어진 개념이 아니라 어떤 함수의 정의역의 원소가 되는 경우이다. 함수를 변수로 간주하는 경우, 함수들의 모임은 비구조적일수도 있으나 일단 수학적 구조가 조직되면 집합으로 불리지 않고 함수공간이라는 이름으로 불린다. 변수로서 정식화 된 최초의 함수 개념은 아마 미분방정

4) 항상성은 무한에도 작동한다는 원리. Kepler는 이 원리를 적용하여 평행선은 무한에서 만나는 것으로 간주했고 원은 무한 다각형으로 간주했다.
5) Euclid 거리에 의하여 생성된 위상이다.
6) 수학에서 이 사상은 동형사상이 된다.

식[7]이라고 보며 이 후 변분학 등에서 본격적으로 사용되었다. 한편 변수 개념 이후에 논의될 사태들은 기본적으로 함수들의 집합 위에서 정의된 함수가 된다.

(8) **범함수.** 함수를 범함수로 보는 것은 함수에 어떤 조작을 취하여 수와 결합하는 것이다. 미분계수 구하기, 극한값 구하기, 적분값 구하기, 통계량의 평균, 분산 등과 같은 경우로서 함수에 어떤 수를 대응한다. 한편 앞에서 예시한 것과 같이 범함수는 단일 대상일 수도 있는 경우는 조작을 하기 위한 규칙에 초점을 맞춘다. 예를 들면 범함수 간의 교환법칙, 범함수의 가법성과 승법성 등이 흔히 주의 집중된다. 한편 범함수들이 집합적으로 작용하게 되면 구조성을 부여함으로써 변수인 함수 와 범함수 의 관계를 다루게 되는데 여기서는 와 가 상보적 역할을 하기 때문에 함수와 변수의 절대적 구분을 무의미해진다. 여기서는 더욱이 범함수를 변수로 하는 함수도 생각할 수 있다.[8] 이와 같이 어떤 함수 공간과 그 위에 정의된 범함수들 집합의 상호 관계를 연구하는 분야가 함수해석학이다. 한편 범함수는 연산과 유사하기 때문에 그것이 기호로 주어질 때 procept 의미를 가지고 있다. 예를 들면 로 정의된 범함수 의 대수적 성질을 다룰 때는 가 개념이 되지만 극한값을 구하게 되면 과정이 된다.

(9) **작용소.** 함수를 작용소로 보는 것은 방정식에서 출발한 것으로서 정의역의 원소와 치역의 원소를 결합하는 과정이다. 방정식 개념은 이후 미분 연산자 또는 적분 연산자 등으로 발전하고 작용소 개념으로 정착된다. 이 개념은 수학에서 최고의 위치에 있으며 모든 수학적 지식을 요구한다.

이상을 종합하여 요약하면 다음과 같은 표가 주어진다.

이 분류들을 종합하면 보면 다음과 같은 특징이 나타난다. 먼저, 하나의 함수가 위의 분류 중에서 반드시 어느 하나에 속하겠지만 그 소속성은 사태에 민감하게 작용한다. 예를 들면 행렬은 일차 방정식의 문제에는 작용소로, Lie 군에서는 변수로, 두 선형 공간에서는 구조를 비교할 경우에는 구조사상으로 나타난다. 또 국소 적분가능 함수(locally integrable function)는 그 자체로서는 변화로 간주할 수 있지만 초함수[9]가 되면 범함수로 간주된다.

7) 예를 들면 2계 미분방정식은 $F(t, x, x', x'') = 0$으로 주어진다. F의 변수들은 t와 의 t함수들로 구성되어 있다.

8) 예를 들면 $\langle x^{**}, x^{*}\rangle = \langle x^{*}, x\rangle$로 정의되는 x^{**}는 범함수를 변수로 가진다.

9) 국소 적분가능 함수 f가 초함수라고 할 경우 시험 함수(test function) ϕ에 대하여 $\langle f, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx$로 주어진다.

층위	사태	사례[10]	특성
전함수	인과	가정/결론, 원인/결과	자연 법칙 무의식적
	명명	개념, 개념 정의, 집합의 구성[11]	일차적 변수의 구성 의식적
표준 함수	연산	사칙 계산 현표, 로그표 등 다양한 수표	규칙과 숙련 procept
	변화	꺾은금 그래프, 수열	연속성의 원리 정의역의 순서성 필연
	도형	히스토그램, 상관도, 꺾은금 그래프, 확률밀도함수, 분포함수, 도형의 방정식, (다양체)	게슈탈트 대역적 성질 국소적 성질
	형태	(준동형사상, 동형사상)	정의역과 치역의 구조성 유추
상위 함수	변수	확률변수, (test function, 변환군의 원소)	이차적 변수의 구성
	범함수	확률, 각도, 길이, 극한값, 미분계수, 적분값, 평균, 분산, (초함수)	procept 변수와 함수의 상보성 연산과 유사성을 가짐
	작용소	미분 작용소, 적분 작용소, (힐버트 변환, 코시 변환, 라플라스 변환, 푸리에 변환)	정의역과 치역의 결합

둘째, 함수 개념은 표준 정의에서 머물지 않고 계속적으로 확장되고 있다. 이런 현상은 표준 정의가 함수 개념을 표상하는데 충분치 않다는 것을 반영한다. 대한 예를 들면 Lebesgue 적분가능함수는 어떤 동치류이기 때문에 이미 표준 정의를 벗어나고 있고 초함수도 표준 정의의 특징인 점별 대응이라는 속성을 벗어나 있다.[12] 사실 위의 분석에서 (7), (8), (9)에 포함된 함수들은 표준 정의로 설명할 수 없는 것이 많다. 이와 같이 함수 개념의 확장 현상은 어느 시점이 지나면 현재의 표준 정의를 개선하거나 근본적으로 재정의해야 한다는 가능성을 담고 있다.

셋째, 위의 분석에 의하면 함수 개념은 어떤 층위를 조직하고 있다는 점이다. 실제로 위의 분류에서 알 수 있는 바와 같이 변수에서 함수가 정의되고, 그 함수는 다시 변수가 되는 현상이 나타난다. 위의 분석에 의하면 함수 개념은 적어도 전 함수 층위, 표준 함수 층위, 상위 함수 층위 등 세 가지 단계를 가지고 있는데 이들의 특징을 간략하게 살펴보자.

10) 여기서 괄호 안의 개념들은 학교수학의 대상이 아니다.
11) 집합을 구성하는 것을 표상하는 함수는 주어진 집합에 대한 특성함수이다.
12) 예를 들면 H를 Heaviside 함수라고 할 때 등식 $H' = \delta$는 표준 정의에 기초한 미분 공식이 아니다.

ⅰ) 전함수 층위. 위의 분류에서 인과와 명명이 여기에 속한다. Davis & Hersh([3])는 자연법칙을 무의식적 수학이라고 했는데 전 함수 층위는 무의식적 수학에 대하여 사람이 반응하는 심리 상태를 의미한다. 이 단계는 함수 개념이 암묵적임이도 불구하고 심리적 강건성에 의하여 함수 개념을 정초하는 결정적인 역할을 하는 인과율을 창출한다. 그러나 정의역이 구체화 되지 않기 때문에 정의역을 이루는 원소 간의 구조가 없는 것이 특징이다.

ⅱ) 표준 함수 층위. 위의 분류에서 연산, 변화, 도형, 구조사상이 여기에 속한다. 이 층위는 표준 함수 정의를 정착하는 단계로서 함수 개념이 의식화 되어 있고 정의역이 실질적인 역할을 한다. 이 층위의 특성은 함수의 기본 수준을 제공하는 개념 수준이다. 이 층위의 가장 초기 단계라고 할 수 있는 연산도 주어진 연산으로 할 수 있는 것과 할 수 없는 것이 구분된다. 표준 함수 층위에 있는 모든 사태들은 정확하게 표준 함수 정의에 부합된다는 점이다. 한 가지 예외라면 함수를 도형으로 나타나는 경우인데 이 경우에는 도형에 국소 좌표계(local coordinate system) 개념을 도입함으로써 해결된다.

ⅲ) 상위 함수 층위. 위의 분류에서 변수, 범함수, 작용소가 여기에 속한다. 이 층위는 함수가 변수로 나타난다는 점에서 표준 함수 단계와 다른 층위를 가진다. 또 이 층위의 함수 개념은 함수의 표준 정의를 만족하지 않을 수도 있다. 예를 들면 국소 적분가능 함수나 Dirac 함수들은 점별 대응으로 주어지지 않기 때문에 표준 함수 정의를 만족하지 않는다.

마지막으로 위의 분류에 의하면 과정적 지식이 선언적 지식으로 이행하는 양상을 보이고 있다는 점이다. 과정적 지식이 선언적 지식으로 이행되는 개념적 성장 과정을 대상화(encapsulation) 과정이라고 하는데 이 과정에 대한 연구는 먼저 Piaget([15])에 의하여 제안된 후 Davis([4]), Dienes([5]), Dubinsky([6]), Greeno([9]), Sfard([20]) 등이 주목하고 이 현상을 설명할 수 있는 이론들을 제안하였다.[13)]

현상학적으로 볼 때 함수 개념의 대상화 작용은 ‘사태 내 대상화’, ‘층위 내 대상화’, ‘층위 간 대상화’ 등의 세 가지 수준에서 나타난다.

13) Anderson([1],[2])이 제안한 ACT-R 모형은 선언적 지식이 과정적 지식으로 이행하는 과정을 묘사하고 있다. 한편 대상화 과정은 과정적 지식에서 선언적 지식으로의 이행을 설명한다. 이 둘을 결합하면 지식의 성장은 …–과정적 지식□선언적 지식□과정적 지식□선언적 지식□…등으로 이행하고 이 이행의 전체는 나선형 구조를 형성한다.

ⅰ) 사태 내 대상화 작용. 함수 정의는 각 사태에 따라 다른 양상을 보이겠지만 일반적으로 대응 조작에 초점을 맞추는 과정적 지식과 함수 자체의 성질을 규명하는 선언적 지식을 모두 가지고 있다. 예를 들면 명명에서는 Piage에 의하여 제안한 경험적 추상화와 반성적 추상화 과정에서, 연산에 대해서는 연산 기호의 이중성과 관련된 procept 현상으로([8]), 변화에는 Kepler에 의하여 제안된 연속성의 원리로, 도형에 대해서는 Descartes와 Fermat에 의한 해석기하로,[14] 구조사상은 적어도 Peacock과 Hankel에 의하여 제안된 형식불역의 원리에서 태동했다고 볼 수 있다. 한편 상위 수학 층위에서 범함수의 경우, 예를 들면 극한값 구하기 과정은 도함수 개념을 낳고 극한값 구하기 과정은 수렴과 발산이란 선언적 개념을 낳으며 통계량에 관련된 것들은 통계량을 계산하는 것과 통계량 자체의 특성을 규명하는 것으로 나타난다. 일반적으로 모든 범함수는 한편으로는 계산을 위한 것으로 되어 있지만 나중에는 개념적 대상이 된다. 마지막으로 작용소 사태에서 방정식 풀기라는 과정에서 방정식의 근의 존재성, 일의성과 같은 구조성을 다루게 된다.

ⅱ) 층위 내 대상화 작용. 전 함수 층위에서 인과에서 명명을 대상화 현상은 추론이라는 과정과 추론의 결과들 즉 추론 규칙이라는 대상이 나타난다. 또 범주화 과정이 변별과 유사성에 기초한 추론의 과정이고 개념은 그 결과이다. 표준 함수 층위에서 나타나는 대상화 작용을 보면 먼저 연산이나 변화는 과정적인 측면을 중심으로 성장하였다. 그렇지만 도형이나 구조사상은 하나의 대상으로서 다루는 경우가 많다. 한편 상위 수학 층위는 현재 형성되고 있는 과정이기 때문에 종합하기 이르다. 마지막으로 상위 수학 층위는 현재 발전하는 있는 분야이기 때문에 종합하기 어려운 면이 있지만 초등 범함수는 단순히 어떤 값을 구하는 것과 같은 과정적 지식으로 출발하였으나 작용소에 이르게 되면 선언적 지식의 특성이 강하게 드러난다.

ⅲ) 층위 간 대상화 작용. 위의 세 층위를 보면 먼저 전함수 층위에서 인과율이나 범주화 작용에 대한 무의식적 행동은 과정적 지식에 대응하는데 이에 대한 대상화로서 표준 수학 층위에서 말하는 함수 정의가 나타난다. 한편 표준 함수 체계에서 조작은 상위 함수 체계에서 변수라는 요소로 대상화 되고 그 위에서 정의된 새로운 함수가 형성된다.

14) 좌표를 통하여 운동 개념은 함수 개념으로 대체되었다.

4 교수학습에 적용

본체적 개념을 이용하여 함수 개념을 지도할 때 어떤 문제점을 가지고 있는가를 심리적, 역사발생적, 수학적, 교수학적 관점에서 살펴보자.

먼저 심리학적 관점에서 다루어 보자. 기본수준 연구에 따르면 사람들은 어떤 상황에서 직각삼각형이나 정삼각형이란 이름을 사용하는 경향은 있지만 그것을 두고 도형이라고 부르는 경향은 낮다. 그 이유는 도형이란 이름은 기본수준이 아니고 상위수준이기 때문이다. 마찬가지로 대응이라는 용어도 여러 함수 현상을 종합하여 마음속에 표상한 어떤 추상물로서 상위수준의 개념이다. 기본 수준 이론에 따르면 함수 현상을 접할 때 사람들은 상위수준에 해당하는 대응 개념으로 인지하지 않으며 기본수준에 해당하는 현상학적 이름으로 인지한다. 예를 들면 사람들은 이미 초등학교에서부터 연산이라는 2변수 함수를 사용해 왔고, 비례와 반비례식을 응용할 줄 알고, 방정식을 풀 수 있으며, 더 나아가 도형의 방정식을 세울 수 있고 수열의 극한을 구할 수 있는데 이 모든 것은 기본수준과 상호작용하는 양상이다. 그러므로 대응이라는 개념을 처음부터 도입한다는 것은 심리학적으로 타당하지 않다.

한편 이 문제를 역사발생적 관점에서 다루어 보자. 식물학자가 식물들을 관찰하고 유사성과 차이성을 통하여 개개의 식물을 분류한 후 그 전체의 윤곽을 그리다 보면 식물 분류표가 만들어진다. 이와 같이 식물 분류표란 여러 사람들이 가진 관찰 결과와 지식들이 종합된 최종적인 결과이다. 마찬가지로 함수 개념도 다양한 함수 현상을 경험한 후 나중에 각각의 사례들이 가진 공통성과 차이성을 통하여 궁극적으로 대응이라는 용어로 통합된 것이다. 그리고 통합과정은 처음에 대응으로부터 시작하여 그 하위 개념들을 흡수하는 방식이 아니라 구체적인 개별에서 출발하여 통합되고 추상화 되었다. 그렇기 때문에 대응이라는 용어를 사용하지 않아도 함수 현상은 충분히 이해되고 정확하게 조작할 수 있었다. 예를 들면 연산 개념은 고대의 수학에서 태동했지만 연산을 함수라고 부르지 않아도 이해하기 어려운 상황이 발생하거나 설명하기 어려운 사태가 발생하지는 않는다. 뿐만 아니라 위에서 열거한 모든 사태들이 함수라는 이름을 부여할 필요없이 각각의 사태에서 정확하게 작동한다. 대응이란 개념 또는 대응 개념에 대한 표준 정의는 모두 이런 다양한 함수 현상을 종합하는 것으로서 단순 정리한 것에 지나지 않는다. 즉 Freudenthal([7]) 의 말을 빌리면 대응은 기성수학(ready-made mathematics) 에 포함된 개념이지 활동수학(acted-out mathematics) 에 포함된 개념이 아니라는 점이다.

마지막으로 수학적 관점에서 논의하자. 앞에서도 언급했지만 화살표나 수표 또는 순서

쌍과 같은 함수의 표준 정의 또는 표준 정의의 해설판을 통하여 함수 개념을 정착시키려고 시도하는 이유는 그 체제가 일목요연하고 청결하기 때문이다. 함수 개념을 먼저 정의하고 그 정의에 따라 전개하는 것은 마치 실수를 처음부터 정의하고 전개하는 것과 같은 방식이다. 그러나 학교수학에서 처음부터 실수의 정의를 도입하는 시도는 하지 않는데 그 이유는 처음부터 그런 식으로 하면 복잡한 이론적 기초가 전제되어야 하기 때문에 실수 정의 자체를 이해시키기 위한 별도의 투자가 필요하기 때문이다. 마찬가지로 처음부터 함수를 정의하려는 접근법도 함수 정의 자체를 이해시키기 위한 별도의 투자가 필요하다는 문제가 발생한다. 사실 학교수학의 여러 부분에서 함수 정의 자체를 이해시키기 위하여 여러 가지 하위 개념들을 제시한다. 예를 들면 정의역, 치역, 공역, 역함수, 합성함수 등과 같은 개념이 그런 것들이다. 그러나 대응이라는 개념을 정의하지 않으면 이런 하위 개념들은 반드시 가르쳐야 할 개념은 아니다.

마지막으로 교수학적 관점에서 논의하자. 학교수학에서 함수의 정의는 정의역, 공역, 대응 관계를 설정하여 배우다가 미적분 단원에 들어서게 되면 대응 관계만 제시하는 경향이 있다. 이것은 함수의 수학적 관점이 현상학적 관점으로 변화된 상황이다. 이 상황에서 교사들의 혼란이 나타나는데 교사들은 표준 정의[15)]에 훈련이 되어 있기 때문에 학교에서 함수와 관련된 대상을 지도할 경우, 표준 정의에 의존하여 전개하려는 경향이 있다. 이것은 교사들의 함수 도식에는 정의역과 공역이 결합되어 있기 때문이다. 이런 이유 때문에 특정 단원에서 교수적 장애가 나타난다. 예를 들면 함수 $f(x)=e^x$의 정의역과 공역이 묵시적으로 실수체가 되어 있다고 간주하고 따라서 이 상태로는 f가 1대1 대응이 아니기 때문에 f의 역함수는 존재하지 않고 대신에 $y=x$에 대칭인 함수로서 $g(x)=\log x$를 제시하는 모호한 점이 발견된다. 이러한 현상은 정의역과 공역에 대한 결벽증 때문에 생긴 현상이다. 그러나 이런 문제를 현상학적으로 접근한다면 사태에 따라서 정의역이나 공역은 중요한 요소가 아닐 수도 있다. 예를 들어 단순히 함수의 미분계수를 구하는 사태라면 정의역이나 공역을 엄밀하게 설정하는 것이 필수 사항이 아니다. 학교수학에서 미적분 단원에서 정의역이나 공역을 지시하지 않고 함수의 식만 주목하는 것은 함수 정의가 가진 일부를 생략하려는 의도가 아니라 함수 개념을 현상학적으로 접근하기 때문이다. 결론적으로 함수 개념을 이해하기 위하여 방안으로써 '함수 정의의 추상성을 직접 공략하고 그것을 토대로 전개하자' 는 방법은 형식주의적 수학의 잔재이며 교육적으로 볼 때 함수 자체를 이해하는 것에 지나지 않는다.

15) 여기서 형식적 정의라는 것은 반드시 표준 정의를 의미하는 것은 아니지만 정의역, 공역, 대응 관계의 3요소를 반드시 갖추고 있다.

그렇다면 대안은 무엇인가? 함수 현상이 나타나는 곳을 그대로 두고 수학사에서 해왔던 방식을 그대로 답습하는 방법이다. 예를 들면 비례식이 나오면 비례식에 어울리는 방식으로, 방정식이 나오면 그냥 방정식으로, 연산이 나오면 계산으로, 각각의 사태에서 요구하는 것을 순수하게 수용하면 된다. 정의역과 공역이 필요한 요소가 되는 사태를 접하게 되면 그 때 도입해도 늦지 않다. 정의역과 공역이 필요한 경우는 특별히 그런 것을 다루지 않으면 전개가 힘드는 경우이다. 위에서 언급되었지만 정의 역과 공역이 모호하게 진술된 상태로 어떤 함수 f가 주어졌다고 하자. 이런 경우도 그것의 역함수를 말하는 것은 어려운 일이 아니다. 예를 들면 $f(x) = \sin x$에 대하여 그 역함수 $f^{-1}(s) = \sin^{-1} x$는 적당한 주치 아래서 모든 것을 전개할 수 있다. 사실 학교수학에서 함수 정의 자체를 설명해야 하는 상황이 아니라면 정의역과 공역을 언급하지 않더라도 곤란해지는 상황은 거의 없는 셈이다. 따라서 적어도 학교수학은 함수 현상을 다양하게 경험하는 것이 우선이지 함수 정의를 엄격하게 정의하고 함수 자체에 대한 하위 개념으로 심화하는 것은 형식주의의 잔재라고 볼 수밖에는 없다고 본다.

5 결론과 제언

함수 개념을 표준 개념에 의하여 도입하는 것은 대응 개념이 가지고 있는 추상성에 의하여 인지적 접근성이 떨어진다. 이에 대한 대안으로서 함수 현상이 실제 그대로 있던 상태를 그대로 가져와서 사용하는 방법이다. 이것은 심리학적으로, 역사발생적으로, 또 교육적으로도 타당하다. 현재 고등학교 과정에서 함수를 정의역, 공역, 대응 관계의 3 요소를 기반으로 전개하고 있는데 이것이 과연 타당한 접근인지를 검토해야 할 필요가 있다. 실제로 19세기 말까지도 이런 3요소를 기반으로 한 함수 정의를 사용하지 않았지만 풍부한 수학적 지식이 형성되었다. 수학교육의 여러 부분에서 형식주의적 수학의 폐단을 언급하면서도 정작 함수 개념에 대해서는 형식적인 접근을 견지하려는 현 상황을 반성할 필요가 있다.

한편 현상학적 분류는 완전한 것이 아니다. 앞에서 언급한 표에서 사례들은 편의상 일부분만 제시하였는데 각 사태에 적합한 상황극을 설계하고 이를 통한 교수학습을 설계할 과제가 남아 있다. 이 점은 바로 Freudenthal의 안내된 재발명 기법에 속한다.

참고 문헌

[1] Anderson, J. R., *The Architecture of cognition*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983.

[2] Anderson, J. R., *Cognitive Psychology and Its Implications*, New York : W. H. Freeman & Company, 1995.

[3] Davis, P. J. & Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Boston, NJ: Birkhäuser, 1981.

[4] Davis, R. B., *Complex mathematical Cognition*. In H. Ginsburg (Ed.) *The Development of Mathematical Thinking*, New York: Academic Press, 254-290, 1983.

[5] Dienes, Z. P.,*Building up mathematics*, London: Hutchinson Educational, 1960.

[6] Dubinsky, E., *Reflective Abstraction and Computer Experiences: A new approach to teaching theoretical mathematics*, In Lappan, Glenda, Even, & Ruhama, (Eds), Proceedings of the Eighth Annual Meeting of PME-NA, E. Lansing, MI: Michigan State University, 1986.

[7] Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1973.

[8] Gray E. M. & Tall, D., "*Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic*," The Journal for Research in Mathematics Education, 26(1994), No.2, 115–141.

[9] Greeno, J, *Conceptual Entity*. In D. Genter & A. L. Stevens(Eds.) *Mental Models*, 227–252,1983.

[10] Johnson-Laird, P. N, *Mental models*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983.

[11] Lakoff, G. & Johnson, M., *Philosophy in the Flesh: The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought*, New York: Basic Books, 1999.

[12] Lakoff, G. & Johnson, M., *Metaphors We Live By*, Chicago, IL: The University of Chicago Press, 2003.

[13] Lakoff, G. & Núñez, R., *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books, 2000.

[14] MacLane, S., *Categories for the working mathematician*, New York: Springer Verlag, 1971.

[15] Piaget, J., *The Principles of Genetic Epistemology*, London: Routledge & Kegan Paul, 1972.

[16] Rosch, E., *On the internal structure of perceptual and semantic categories*. In T. E. Moore(Ed.), Cognitive development and the acquisition of language, New York: Academic Press, 1973.

[17] Rosch, E., *Cognitive representation of semantic categories*, Journal of Experimental Psychology 104(1975), 192-233.

[18] Rosch, E.,& Mervis, C. B. "*Family resemblance: Studies in the internal structure of categories*," Cognitive Psychology 7(1975), 573-605.

[19] Rosch, E. & Mervis, C. B, "*Categorization of natural objects*," Annual Review of Psychology, 32(1981), 89-115.

[20] Sfard, A, *Two conceptions of mathematical notions: operational and structural*, Proceedings of PME XII Montréal, Canada(1988), 162–169.

Phenomenology of the concept of functions

Department of Mathematics Education, Kyungpook National University Yoon Jae Yoo

In this paper function concept is classified in the phenomenological aspect. According to the study, function concept is classified as causality, designation, operation, change, figure, morhism, variables, functional, and operator. This classifications are categorized as pre-level function, basic level function, and upper level function.

Key Words: phenomenology of function, function.

2000 Mathematical Subject Classification: 01A20, 97C90
ZDM Subject Classification: U24, H14, F54

접수일 : 2010년 5월 12일 수정일 : 2010년 5월 28일 게재확정일 : 2010년 6월 3일