韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 08. 제 49권, 제 3호, 353-373.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2010, Vol. 49, No. 3, 353-373.

GSP를 활용한 삼각함수에서 학습부진아의 수학화 과정에 관한 사례연구

문 혜 령 (단국대교육대학원)
고 상 숙 (단국대학교)†

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

우리나라와 같이 주입식의 수업환경에서는 학생들이 학교수학에서 배우는 수학의 유용성을 수동적인 자세로 받아들이게 되는 경우가 많다. 수동적으로 학습하는데 익숙한 학생들은 수학이 어디에, 어떻게 사용되는지 의문을 품는다 해도 이를 과감하게 질문하여 답을 얻고자 하지 않는다. 이는 본 연구자가 학창시절 지녔던 모습이고 지금 학교를 다니는 학생들 역시 이와 크게 다르지 않으리라 생각한다. 이런 학습자의 수동적인 자세를 개선할 방법은 없는 것인가? 이에 대한 방안으로 수학이 우리 실생활과 밀접히 관련되어 있다는 점에 초점을 맞추고 스스로 수학을 할 수 있는 학습 환경으로써 테크놀로지 환경이 모색될 필요가 있다.

오늘날 수학교육의 현장, 특히 고등학교의 경우 입시를 위한 결과로서의 수학을 배우게 되어 호기심과 흥미를 유발시키는 수학이 아니라 의무감만을 갖고 학습하고 있다. 이러한 문제점을 수정·보완하기 위해 학생의 창조적이고 능동적인 활동을 통해 수학이 습득되는 교수-학습이론에 집중해야 한다. 개정 교육과정 고등학교 해설서(교육과학기술부, 2008)에서 수학의 교수-학습은 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 단계를 발견하고 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 해야 한다고 하였다. 즉, 수학은 현실과 동 떨어져 있는 학문이 아니라 실생활의 필요에 의해 발전하고 또 실생활에 적용시킬 수 있는 것임을 알고 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 깨달아 수학 학습의 심미적 부분까지도 영향을 줄 수 있을 것이다.

또한, NCTM(2000)은 변화하는 세상에서 미래를 만드는데 좀 더 많은 선택권과 기회를 갖기 위해, 상황에서 수학을 경험하는 것이 중요하다고 하였다. 이는 수학은 확실성을 추구하는 인간의 정신적 활동이라 하여 현실을 바탕으로 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 수학화라고 주장한 Freudenthal(1991)과 관련이 깊다. 그는 학습자가 효과적으로 수학을 학습하기 위해서는 교사의 안내와 학습자 스스로의 활동이 필요하다고 주장하였다. 즉, 수학 학습을 학습자가 일방적으로 받아들이는 것이 아니라 학습자 스스로 지식을 구조화 시켜야한다는 것인데 이것은 수학화 이론을 적용한 RME(Realistic Mathematics Education)이론으로써 역시 현실 문제를 통해 학습자 스스로 발명하고 조직하는 것을 강조한다.

그러므로, Freudenthal의 수학화 이론에 근거한 RME 이론을 통해 GSP(Geometer′s Sketch Pad)를 사용하여 삼각함수 단원을 학습부진아 대상으로 학습자의 호기심과 흥미를 유발하고 학습자의 능동적인 개념 발달과정을 연구하고자 한다. GSP는 추상적인 수학지식을 시각적 형태로 표현하여 제시할 수 있으며 학습자 스스로 탐구하여 추론에 대한 반성이 이루어지고 개념이해를 돕는 학습 도구로써 사용이 가능하다(강현수, 2003; 정인철, 2005).

---

* 접수일(2010년 7월 27일), 수정일(2010년 8월 18일), 게재확정일(2010년 8월 18일)
* ZDM분류 : C34
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 학습부진아, 삼각함수, 수학화(수평적, 수직적, 응용적), 학습자료, 테크놀로지, GSP,
† 교신저자

Freudenthal은 수학적 이해를 유발하고 증진시키기 위해 계산기와 컴퓨터를 어떻게 활용할 것인지에 대해 수학교육의 주요 문제 중의 하나로 설정하여 수학교육에서 공학적 도구의 활용을 강조하였으며(고상숙과 고호경, 2008; 장진희, 2008), 2000년에 발행된 NCTM의 "학교수학을 위한 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics)" 은 다음과 같은 테크놀로지의 원리를 제시한다.

> 테크놀로지는 수학을 가르치고 배우는 데 필수 도구이다. 수학적 사고를 시각적으로 표현할 수 있게 해주며 자료를 정리하고 분석하는 일을 쉽게 해준다. 또한 효율적이고 정확한 계산을 가능하게 한다...중략... 교사는 특정한 학생의 필요에 맞추어 교수-학습 상황을 바꿀 수 있다...중략...기초절차에 어려움이 있는 학생도 수학적 이해를 키우고 입증할 수 있으며 그 결과 그 절차를 학습하는데 도움을 받을 수 있다(NCTM, 2000, pp. 24-25).

GSP의 사용으로 학생들의 개념 이해를 촉진시키고 일반화와 추상화 그리고 의사 결정, 문제해결에 도움이 되는 장점이 있다(신인선과 류희찬, 1998). 테크놀로지를 활용과 관련된 많은 연구에서는 학습도구로써 시각적이고 역동적인 수학의 성질을 쉽게 관찰하고 탐구할 수 있는 환경으로 인해 긍정적인 효과가 있다고 보고되었다. 특히 천규섭(2006), 장진희(2008)의 연구에서 GSP를 활용한 수업에서 학습자가 직접 작도하여 문제를 해결하고 정확하게 이해하며 수학에 대한 흥미와 호기심, 의지, 통찰력 등의 긍정적 변화를 가져왔다. 한편, 수학은 위계성이 강한 학문이기 때문에 학년진급이 되어도 이전 단계 혹은 기초단계의 지식 없이 학습 진행은 어렵다. 즉, 연속적인 학습 결핍으로 인한 학습부진아가 발생되기 쉽고 이것에 대한 수학적 성향, 발생원인, 교수-학습지도 방법 등의 연구가 이루어졌지만 테크놀로지를 활용한 학습부진아의 삼각함수 개념 이해에 대한 연구는 그리 많지 않다. 물론 컴퓨터를 활용한 수학 교수-학습 방법에는 학습의도를 벗어나는 메타 인지적 이동 등의 부정적인 측면(Brousseau, 1984)도 나타날 수 있으므로 적절한 지도와 통제를 계획하여 지도하는 것이 필요하다. 따라서 교사는 교수-학습 방법 연구 및 계획 시 GSP의 활용을 학습자가 흥미 유발에 그치지 않도록 학습목표를 성취하는데 학습도구로써 학생의 학습을 돕도록 안내해야 한다.

본 연구에서는 GSP를 활용하여 제시된 삼각함수에서 학습부진아의 수학화 과정을 연구하여 수학 수업에서 컴퓨터 활용 수업의 활성화와 이를 통한 학습부진아의 향상된 수학적 사고력을 기대한다.

2. 연구문제

본 연구에서는 고등학교 1학년 삼각함수 단원을 GSP를 사용하여 RME 수업 이론을 토대로 학습자의 삼각함수의 개념 이해를 위해 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

1) 테크놀로지 환경에서 학습자의 삼각함수에 대한 수학화 과정은 어떻게 발달하는가?

2) GSP 활용은 수학 학습을 통해 학습자의 삼각함수 개념 형성에 어떤 역할을 하는가?

3. 용어의 정의

1) RME(Realistic Mathematics Education)

1970년대 초부터 '활동으로서의 수학'을 기본 전제로 Freudenthal의 아이디어를 지지하는 사람들이 연구해온 수학교육의 한 사조이다. RME 수업에서는 학습자의 상상력이 발휘될 수 있는 적절한 상황을 강조하고 있으며, 이러한 체험된 수학을 통해서 학습자는 수학을 생의 일부로 유용하게 인식하게 된다(정영옥, 1999).

2) 학습부진아

지능발달이 정상적이고 학습자 스스로 할 수 있는 것보다 잘하고 있지 않은 즉, 학습을 할 수 있는 잠재능력이 있으나 학생의 학습태도, 학습동기, 내·외적 교육적인 학습 환경, 기초 학습 능력 부족, 선수 학습 결핍, 교수방법의 결함, 학습방법의 등으로 최저 학업 성취 수준에 도달하지 못한 학생으로 정의한다.

3) GSP(Geometer Sketch Pad : 기하탐구소프트웨어)

GSP는 미국의 과학재단(National Science Foundation)의 VGP(Visual Geometry Project)사업의 한 부분으로 개발된 동적 기하 소프트웨어인 The Geometer's Sketch Pad 이다. 본 연구에서는 2001년 개발되어 '수학사랑'이

번역한 GSP 4.0을 사용하였다. 동적 기하는 물론대수, 해석의 수업에도 사용할 수 있다. 또한 가변색 기능으로 변수에 따라 색을 달리하여 다양한 그림을 구현할 수 있다.

4. 연구의 제한점

첫째, 연구에서 수행하는 수학 학습지도 구성은 고등학교 1학년 삼각함수 단원이지만 학습부진아를 대상으로 삼각함수의 개념을 지도하는 것이기 때문에 삼각함수 응용단원은 포함하지 않았다.

둘째, 본 연구는 사례연구로써 학습자 개개인의 질적 측면에 주목한 연구이기 때문에 연구결과를 우리나라 전체 학습부진아에 대해 일반화 시키는데 제한점을 갖는다.

셋째, 본 연구는 컴퓨터를 사용하여 진행하기 때문에 학습자 개개인의 컴퓨터 활용 능력에 따라 다른 연구결과가 나타날 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 현실적 수학교육(RME)의 기본 원리

1) 안내된 재발명 방법

Freudenthal(1991)은 사고는 정신적으로 지속되는 행동이며, 행동을 학습하는 최선의 방법은 그것을 수행하는 것이라고 하여, 학습자에게 수학적 활동의 재발명을 경험시키는 학습지도 방법을 주장한다. 수학적 개념, 구조, 아이디어는 물리적・사회적・정신적 세계의 여러 가지 현상을 정리하는 수단으로 발명된 것으로 보고 있으므로 그에게 수학은 그러한 현상의 정리수단으로 학습되어야한다. 수학적 사고는 수학화, 곧 수학적 활동이 일어나는 실제적 과정을 재현하여 경험시킴으로써 배울 수 있다는 것이다. 이를 위해 학습자의 현실 내에서 수평적 수학화에 적절한 학습상황을 선택하고, 수직적 수학화를 위한 수단과 도구를 제공하며, 교사와 학생, 학생들 사이의 상호작용을 통한 지도를 하고, 풀이뿐만 아니라 문제를 재발명할 수 있도록 하며, 학습 가득이 서로 관련되도록 지도할 것을 요구한다.

또한 Freudenthal은 대화를 통하여 현상의 본질을 인식시키는 Socrates의 산파법의 가치를 강조한다. 그러나 탐구와 학습을 선재적 지식의 회상으로 보는 Platon의 회상설은 수용하지 않으며 재발견이라는 용어보다 재발명이라는 용어를 선호한다. 그가 말하는 재발명은 결국 교사의 주도 아래 수학의 역사적 발달과정을 단축된 형태로 재현시켜야 한다는 발생적 입장이 된다. 그는 선조들의 발명과정을 현재의 학습자의 상황에서 재해석하여 재발명시킬 것을 요구한다. 그리고 그는 재발명 방법에 의한 지도에 앞서 수학의 역사 발생을 패러다임으로 삼아서 가상적인 학생을 상대로 가르치고 학생의 반응을 상상하며 대응방안을 준비하는 '사고실험' 을 할 것을 제기한다. 훌륭한 교사의 지도 아래 어떻게 수학이 학생의 마음속에서 발생될 수 있는가를 알고자 한 것이다. 수학 교과서는 일반적으로 기성 산물로서 기술되어 있으나 Freudenthal은 이를 재발명하면서 실제로 행하는 수학으로 변형하기를 기대하며, 독자들에게 그들이 눈앞에서 수학이 창조되고 있다는 환상을 주는 형식으로 수학 교과서를 집필하기를 기대하는 것이다. 교과서는 가르치는대로 써야하며 실제의 교수경험과 사고실험을 출판하여야 할 것이라고 주장하고 관찰, 인지적 갈등, 토론, 반성을 야기시키는 상호작용과 협동이 보다 효율적으로 이루어질 수 있도록 하기 위해서 이질적인 학급 편성을 하고, 학습된 내용을 새로운 문맥에서 반성하고 횡적・종적으로 비교하고 통합하는 회고 학습을 할 기회를 충분히 제공하는 것이 바람직하다고 강조하고 있다.

2) 역사 - 발생적 원리

인류의 대역적인 학습과정을 단축된 형태로 반복하게 함으로써 수학적 사고 경험을 시키려는 것이 역사 - 발생적 방법이다. 그러나 역사 - 발생적 원리는 '재현의 법칙' 이라는 생물학적 원리에 따른 형식적인 관점으로 개인의 특성에 따른 학습요인을 고려하지 않고 고정된 교재구조를 주장한다는 점에서 비판의 여지가 있는 바, Freudenthal은 수학의 역사적 발생과정은 수학화 과정의 패러다임이지만 이를 학습자의 현재의 정신구조에 연결시켜 수정해야 한다고 말하고 있다. 어떤 내용을 역사 - 발생학적으로 지도한다는 것은 모든 우회로와 막다른 길을 잘라버린다고 하더라도 발생된 순서대로 교재가 구성되어야 한다는 뜻은 아니며, 수학이 훌륭한 교사의 지도

아래 어떻게 발생되는가를 역사에서 미루어 찾고, 그러한 방법에 따라서 지도하고자 하는 것이다.

3) 교수학적 현상학

Freudenthal은 수학적 구조는 물리적, 사회적, 그리고 정신적 세계의 여러 현상을 조직하는 수단으로 발명된 결과라고 보며, 수학 교수-학습 과정에서도 조직될 필요가 있는 현상으로부터 시작하여 학습자로 하여금 조직의 수단에 숙달하도록 해 주어야 한다는 관점에서 교수학적 현상을 도입하였다. 그에게 교수학적 현상학의 핵심적인 생각은 상대적 관계에 있는 현상과 본질이다. 본질은 현실 세계의 현상을 조직하는 수단이라 할 수 있는데, 우선적으로는 '심상' 으로 구성되어야 한다. 그리하여, 어떤 현상을 조직하는 수단은 1차적으로는 바로 이 심상 자체라는 것이다. 예를 들어, 실생활에서 탁자, 방문, 키보드, 책 등의 현상이 있을 때, 이러한 현상은 직사각형의 모양을 하고 있고 아동들은 이러한 현상으로부터 심상으로서의 직사각형을 형성하게 된다. 즉 아동이 분명하게 그리고 정확하게 표현하지는 못한다 할지라도 아동의 뇌에는 어렴풋하게나마 '무엇' 인가가 형성되어 있는 것이다. 이 '무엇' 에 해당하는 것이 바로 직사각형의 본질인 심상이라고 할 수 있다. 이와 같이 직사각형의 심상이 형성되어 있다는 것은 '이것을 직사각형이라고 한다'는 것을 받아들일 수 있는 심상이 형성되어 있다는 것이며, 모양이 다양한 직사각형에도 '이것이 직사각형이다' 라고 말할 수 있는 준비가 되어 있다는 것을 의미한다. 본질은 또 심상의 형성 후에 획득된 개념 그 자체를 의미할 수 있다. 그리하여 이 의미로 사용할 때 구조, 개념, 본질은 모두 교환 가능한 용어라고 할 수 있다. 그러나 어느 경우든 본질이라고 할 때는 심상의 형성을 전제로 하는 바 Freudenthal은 이 심상의 형성이 개념 획득보다 우선되어야 한다고 주장하는 것이다. 따라서, 그러한 관점에 선다면 수학교육에서 중요한 것은 무엇보다도 바로 이러한 심상의 형성을 가능하게 해주는 자료 즉, 현상을 제공해 주는 것이다. 현상과 본질은 절대적인 것이 아닌 상대적인 것이며 현상이 본질로 조직되고 나면 다시 그 본질이 현상이 되어 새로운 본질로 조직되게 한다. 예를 들어 수는 양이라는 현상을 조직하는 본질이지만 수라는 현상은 다시 십진 기수법에 의해 조직된다. 삼각형, 평행사변형, 마름모, 정사각형과 같은 도형은 형이란 현상의 세계를 조직하는 본질이지만 도형이라는 현상은 명제와 그 증명에 의해서 조직된다. 이와 같이 하여 수학의 가장 높은 수준까지 추상화가 거듭되면서 수학적인 현상이 새로운 수학적 개념으로 조직되어 간다. 이 계속적인 도약의 과정이 수학화이며 학습자는 수학의 교수-학습의 과정에서 바로 이러한 수학화를 연습해야 한다는 것이 Freudenthal의 수학교육론의 핵심적인 주장이다.

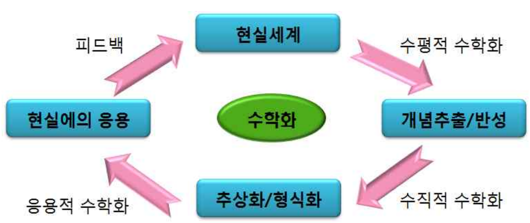
4) 학습수준 이론

Freudenthal에 의하면 수학은 인간의 정신적 활동이며 수학화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준 상승이 이루어지면서 조직화·구조화되는 불연속 과정이다. Freudenthal은 수학 학습 과정도 사고 수준간의 비약이 이루어지는 불연속성이 특징이라고 생각하였다. 따라서 학생들이 수학 학습을 통해서 수학화 과정을 재발명하도록 한다는 것은 이런 수준의 상승이 가능하도록 적절한 교수학적 조치를 취해 가면서 바닥수준에서부터 점진적으로 안내해 가는 것을 의미한다. 학생의 학습 과정은 이와 같이 바닥 수준의 활동이 탐구 수준에서 반성됨으로써 비로소 수학이 시작되는 것이며 이것이 아주 필수적인 것으로 보고 이것은 학생의 현실적 경험을 수학화하는 것이며 이런 바닥 수준에서 수학화 활동이 계속적인 수준의 상승에 의해 좀 더 세련된 수학으로 발달하는 것이다. Freudenthal이 제시하는 수준이론은 거시적인 수준의 비약을 위해서는 한 수준 내에서도 점진적이고 미시적인 수준의 상승이 이루어지도록 해야 함을 의미한다. 이런 점진적인 수학화가가 가능하도록 하기 위해서는 한편으로는 교수학적 현상학을 통해 학습자의 현실 내의 현상과의 부단한 관계를 맺으면서 수평적 수학화와 수직적 수학화가 교대로 일어나도록 하여 반성에 의한 수준 상승이 자연스럽고 자발적으로 이루어지도록 해야 한다.

5) 문맥수학

Freudenthal이 주장하는 재발명 방법은 수학이 발달해 온 역사적 경로를 그대로 답습하는 것이 아니라 그런 역사적 맥락을 재구조화하고 그것을 하나의 패러다임으

로 삼아서 학습자의 현상을 출발점으로 해서 좀 더 개선된 방법으로 재창조하는 것을 통해 수준 상승이 이루어지도록 하는 것을 의미한다. 따라서 재발명 방법을 통해서 수학화의 경험을 제공하기 위해서는 학습자의 현실에서 출발해야 하며, 학습자 주변에서 수학적 내용을 내포한 현상을 찾아내고 그 내용이 역사적으로 어떻게 발생되었으며 수학적을 어떻게 준비할 것인가 하는 것이 문제이다. 이런 문맥은 수학 학습지도의 출발점이어야 하며 그 안에서 수학적 아이디어나 개념이 추출되어 추상화·형식화됨으로써 다음 높은 수준의 수학으로 발달해 나갈 수 있도록 안내해야 하며 그것을 현상에 다시 응용해 봄으로써 현실 세계에 대한 이해의 폭을 확장시켜 나갈 수 있도록 해야 한다. 수학화를 중요시하는 근본 취지가 학생들에게 수학화 경험을 통해서 수학에 대한 좀 더 나은 이해와 자신의 세계를 이해하는데 수학적 수단을 사용할 줄 아는 응용가능성이라면, 처음에는 수학 그리고 현실 세계에의 응용이 아니라 처음에 현실 세계에서 출발해서 수학화 과정을 거치고 나서 다시 현실 세계에 돌아올 수 있도록 수학적으로 정련된 문장의 문제보다는 구체적인 문맥을 제고하는 것이 중요하다. 문맥을 '어떤 구체적인 수업 과정에서 학생들에게 열려있는 수학화가 되어야 할 현실의 영역'이라고 볼 때 이런 문맥을 제공하는 대표적인 방법은 놀이, 이야기, 프로젝트, 주제, 신문 발췌와 이 외에도 희곡, 게임, 그래프, 이들의 결합으로 제시할 수 있다.



<그림 1> 수학화 과정(김연식, 정영옥, 1997, 재인용)

6) 구조적 조직화

Freudenthal은 수학교육에서의 발견학습의 문제점을 학습과정의 수준문제로 설명하고 있다. 특히 Z. P. Dienes의 놀이를 통한 수학적 개념학습 실험에서 아동들의 활동은 기초수준, 곧 전수학적인 수준에 머물러 있으며, 이 수준의 아동의 활동은 성인 수학자의 눈으로 볼 때에는 수학적 활동으로 잘못 해석될 수 있지만 아동은 그것을 의식하지 못한다고 비판하고 있다. 그 다음 수준에서만 논의되고 수준을 높여 좀 더 높은 수준으로 나아가는 데 적용되지 못하고 있는 것이 문제점이라는 지적이다. 처음부터 곧바로 도형을 제시함으로써 비수학적인 대상을 도형으로 파악하게 하여 수학화 기회를 빼앗거나, 도형의 형식적인 정의를 제시함으로써 정의를 발명할 기회를 빼앗아서는 안되지만, 수학의 학습과정이 낮은 수준에서의 활동에 머물러 그 다음 수준에서 분석의 대상이 되는 수학화 수준에 이르지 못하는 것도 문제인 것이다. 이러한 입장에서 그는 Bruner와 Dienes가 공동 연구하여 제시하고 있는 발견 학습 방법을 비판하는 것이다.

Freudenthal의 재발명 방법은 수학 학습 수준 이론에 따른 '국소적 조직화' 를 거치는 수학화로서 구체화되고 있다. 국소적 조직화란 참인 것으로 보이는 영역에서 시작하여 수학적 사고를 부분적으로 조직하는 것이다. Freudenthal은 수학을 응용하든가 창조하든가 하는 것은 국소적 조직화의 활동이라고 생각하고 학생들에게 자명하다고 생각되는 것을 국소적 조직화에서 출발의 기준이 되도록 하여 학생들이 자발적이고 창조적인 활동이 가능하게 되기를 바라는 것이다. 그는 국소적 조직화의 전형적인 예로서 기하학습을 들고 있는데, 수학적으로 조직된 기하학적 지식으로 기하 학습을 시작할 것이 아니라 공간적인 형상인 도형을 조직하는 것으로 출발하며, 형식적인 정의를 제시할 것이 아니라 도형의 성질을 조직화하는 수단으로 도형을 정의하는 재발명 활동을 시키고 정리를 가르칠 것이 아니라 도형의 성질의 논리적인 국소적 조직화 활동을 시킬 것을 요구한다. 그는 기하를 대수화한 선형대수나 엄밀한 공리체계로서의 기하, 곧 기성의 공리적 수학을 가르치는 것에 반대하지만, 국소적 조직화를 거친 다음의 공리화를 통한 형식적 수학의 학습은 공리의 의미, 엄밀성과 암묵적 정의에 대한 교육의 기회를 제공할 수도 있을 것으로 보고 있다.

2. 현실적 수학교육(RME)의 수업 원리

현실적 수학교육은 수학화를 실제에 적용하기 위한

노력의 결과로, 수학을 인간의 활동으로 생각한다. 활동이란 구체물을 조작하여 어떤 개념이나 구조를 습득하는 것을 의미하는 것이 아니라 주어진 개념과 구조를 주관적인 입장에서 재창조하는 사고활동을 일컫는다.

현실적 수학교육에서의 활동은 수학화를 통한 재발명을 의미한다. 재발명이란 학습자들로하여금 새로운 것을 발명하게 하는 것이 아니며, 감춰져 있던 것을 발견해내게 하는 것도 아니다. 그렇다고 해서 역사적으로 인류의 학습과정을 있는 그대로 보다는 과거의 사람들이 오늘날 우리가 알고 있는 것을 조금 더 알았더라면 했을 것 같은 방식으로 반복하는 것을 말한다(Freudenthal, 1991). 그러나 학습자의 입장에서 수학을 스스로 재발명 하기엔 어려우므로 결국 교사에 의해 안내된 재발명으로, 이 과정에서 학습자들은 수학을 활동으로 경험하게 된다.

현실적 수학교육이란 결국 활동으로서의 수학을 학습자들에게 경험시키고자 하는 하나의 움직임으로 현실적인 문제들로부터 시작하여 수학화를 통해 수학을 재발명함으로써 완성되는 것이다. Treffers(1987)는 현실적 수학교육의 주요 원리인 수학화를 구현하기 위해 더 구체적인 지침으로 다섯 가지의 교수원칙들을 제안하였다. 이 다섯 가지 원칙을 통해 교사가 어떤 방법으로 학습자를 재발명의 과정으로 인도할 것인가에 대한 시사점을 얻을 수 있다.

1) 현상학적 탐구

현실적 수학교육은 구체적인 맥락으로 시작된다. 맥락이란 '어떤 구체적인 수업 과정에서 학생들에게 열려있는, 수학화 되어야 할 현실의 영역'을 의미한다.(Freudenthal, 1991). 이 단계에서 수학화를 염두해 두면서 여러 가지 개념과 구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념을 모으는 데 있다. 이 때, 문맥의 역할이 매우 중요하다. 현실적 수학교육에서 맥락 문제는 학습자가 형식적인 수학을 이해할 수 있게 해주는 재발명의 과정을 지원해 주기 위한 것이고, 이러한 접근은 주로 교수 설계의 시각에서 기술된다. 교사는 전통적인 수학이 재발명될 수 있는 과정을 만들어 내고자 한다. 그러한 재발명의 과정은 점진적인 수학화를 위한 기회를 학습자에게 제공하는 문맥 문제에 의하여 구성된다. 문맥문제는 그 문제 상황이 학생들에게 경험적으로 현실인 문제로 정의한다. 현실적 수학 교육에서 문맥 문제는 처음부터 문제 상황이 학생들에게 경험적으로 현실적인 문제로 정의되고, 학생 스스로 수학을 재발명하게 하기 위한 기점으로서의 기능을 하는 것에서 출발한다. 또한 수학은 여러 문맥 내에서 지도되어야 하고, 아무리 추상적인 수학이라 할지라도 현실적이고 구체적인 문맥에서 시작되어야 함을 의미한다.

2) 수직적 도구에 의한 연결

전통적인 수학교육에서는 수학의 추상적인 개념을 우선 구체물을 제시하는 것으로 시작된다. 그러나 구체물은 교사가 선택하고 이 과정에서 학습자들의 비형식적 지식은 간과되기 쉽다. 결국 구체물의 활용은 교사에게는 해당 개념을 추출하기 위한 적절한 활동일 수 있지만 학습자에게는 그 개념이 수용되지 않는 단순한 활동에 머무를 수 있다. 수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 수직적 도구라는 의미는 처음 수준에서의 직관적, 구체적, 비형식적 문맥에 결합된 조직과 반성적, 추상적, 형식 체계적 조작 사이의 수준 차를 연결하는데 도움이 되도록 처음부터 여러 자료, 화살표와 같은 시각적 모델, 상황 모델, 스키마, 다이어그램, 그리고 기호와 같은 수학적 도구들이 제공되고, 탐구되고, 개발된다는 것을 의미한다. 이 단계에서는 이런 수학적 도구들이 그대로 부과된다기보다는 학생들이 그 문맥에 맞는 자신의 생각을 표현할 수 있는 도구들을 만들어 보는 단계가 포함되어야 한다. 예를 들면, 수식을 나타낼 때도 x, y와 같은 고정된 문자로 시작하기보다는 그 문맥에서 사용되는 용어의 약어나 암호와 같은 도구들을 사용할 기회를 주는 것이 바람직하다.

점진적인 수학화의 관점에서 이것은 한 번의 비약이라기보다는 오히려 한 단계씩 전진하는 것이다. 수학화 과정의 수평적 성분들은 문제가 드러나는 현실 상황의 다양성과 개념 형성에 필요한 여러 관념을 풍부하게 표현해 주는 반면 수직적 성분은 학습 과정에 필요한 체계적이고 주제 지향적이고 형식적인 지식과 능력을 표현해 준다.

따라서 수학화는 점진적으로 이루어지는 과정이기 때문에 학습자에게 현실적인 상황들은 현상과 본질의 교대

작용을 통해 수준이 향상되면서 수학적 개념으로 추상화되어 간다. 그러나 현실적 수학교육에서는 반드시 '구체물→반 구체물→ 상징' 의 순서를 거칠 것을 요구하지 않는다. 또한 교사가 이 과정을 주도하는 것도 원치 않는다. 교사는 학생들이 학습목표의 도달에 이르는 과정에서 미궁으로 빠지지 않도록 하면서 목표에 이르는 길을 발견할 수 있도록 안내해야 한다.

3) 학습자 자신의 구성과 산물

수학화는 수준의 점진적인 상승을 전제로 하기 때문에 한 수준에서 다른 수준으로의 상승을 위해서 '반성적 사고(reflective thinking)'가 중요하다. 반성적 사고란 자신의 행동과 사고를 의식화해서 객관적으로 분석하는 과정으로 수학적 사고수준 상승의 결정적 수단이 된다. 이런 반성적 사고를 가능하게 하고 학생들의 창조적 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 문맥을 다루는 것도 중요하지만, 어떤 단계에 이르러서는 좀 더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다. 학습자의 구성 및 산물활동을 그들 자신이 그리고 교사가 살펴본 것은 학습과정을 반성하게 하고, 따라서 점진적인 수학화 과정을 진행할 수 있게끔 도와준다. 이를 위해 학습자들에게는 반성을 통한 구성 및 산물을 계속 경험할 기회가 주어져야 하며, 일정 단계에 이르면 다양한 해결책이 허용되는 문제들이나 모순이 되는 문제들, 그리고 불완전한 문제들이 제시될 필요가 있다.

현실과 관련된 또는 수학적인 문제로서 매우 다양한 해결책들과 때로는 수학화의 다양한 수준에 따른 해결책을 허락함으로써, 자료나 준거들을 스스로 보충할 것을 요구하는 불완전한 문제들을 해결하는 것과 다른 학생들을 위해 저술되는 어떤 주제 또는 어떤 과정에 대한 시험지 또는 문제집으로 자기 자신의 문제들을 고안하기 등을 들 수 있다. 이러한 활동을 통해 학생들은 수업에서 수학화 과정을 자신이 결정할 수 있다.

교수 학습 과정에서 학생들은 자신의 창작 활동을 통해서 첫째, 현실과 관련된 열린 문제 또는 불충분한 문제를 해결한다는 것은 수학적 도구에 의해서 현실의 여러 한상들과 그것들을 기술하고 조직화하는 것을 의미한다. 이런 연결이 지속되면 현실 상황을 수학화하는 수평적 수학화를 개발하는 데 도움이 될 수 있다. 둘째, 현실상황에서 직접 활동을 통하여 수학적 자료를 얻고 이것을 수학적 수단으로 조직함으로써 수학화의 기회를 극대화할 수 있다. 셋째, 학생들 자신의 창작 활동을 통해 잘못된 아이디어와 오개념을 드러냄으로써 교수 학습 과정의 반성과 예견의 이론적 기반을 제시해 준다. 이것은 진단적 가치를 더해주며, 올바른 진단은 학습과 교수의 성공적인 교정을 보장한다. 넷째, 용어, 기호, 기호법, 스키마 그리고 모델들을 만드는 것은 수평적, 수직적 수학화 모두에 공헌한다.

따라서 학생들은 자기 자신의 창작 활동을 통해 수학화 과정에서 핵심적인 역할을 수행하며, 좀 더 형식적인 수학적 관념, 연산, 구조 등으로 이동하는 것이 용이해진다. 하지만 교수 과정에서 중시해야 할 것은 출발 단계에서는 학생들의 비형식적 방법을 이용할 기회를 극대화시키는 것이고 자신들의 활동을 반성케 함으로써 단축과 간소화, 또는 자신에 대한 진단을 할 수 있는 기초를 제공할 수 있도록 해야 하며, 더 나아가서는 표준의 형식적인 절차와의 접목이 이루어지도록 해야 한다. 우리는 또한 이런 근원을 역사적인 수평적 그리고 수직적 수학화에 의해서 어떤 암시를 받을 수 있다.

4) 상호작용 수업

상호작용은 학습 과정을 단축시키거나 다른 학습자의 학습 과정을 통해 스스로를 향상시키는 것을 돕고 그들 자신의 산물에 대한 결점과 이점을 인식하게 자극할 수 있다. Treffers(1987)에 의하면 학습 과정은 개별적 과업을 동료들의 의견 수렴과 그룹토의, 자신의 산물 표현, 여러 수준에서 다양한 구조의 평가 그리고 교사에 의한 설명과 결합시킨 상호 작용적 교수의 한 부분이다. 또한 상호작용적 수업이 실현될 때에는 학습자 자신이 풀이를 설명하고 정당화하고 다른 사람의 풀이를 이해하고 동의하거나 반대하면서 다른 방법을 찾아가면서 반성적 사고가 일어나야 한다.

현실적 수학 교육 수업에서는 개개인의 활동과 더불어 학생들 간의 상호작용과 교사와의 상호 작용이 이루어지는데, 각 학생은 개인적으로 탐구할 기회를 갖고 자신이 속한 집단 속에서 자기 자신의 탐구 계획을 구성할 기회를 갖는다. 수학 교수 학습에서 학습자들은 항상 서로 다른 인지 수준과 서로 다른 문화적 배경속에서 활동

하므로 서로 간의 인지적 갈등이 있게 마련인데 이 상황을 최대한 효율적으로 다루는 것이 교사의 임무이다. 따라서, 학습자는 상호 작용을 통해서 자신의 생각을 반성할 기회를 갖을 수 있다.

5) 학습가닥의 연결

수학을 학습한다는 것은 단편적인 지식이나 기술을 배우는 것이 아니다. 수학학습은 지식과 기능을 전체적인 하나의 구조로 조직하여 새로운 지식이나 기능을 기존의 지식이나 기능에 동화시키거나, 새로운 지식이나 기능으로 기존의 지식이나 기능을 재조직해야한다. 따라서 수업을 설계할 때는 다양한 영역들의 전반적인 연계성, 즉 학습 가닥들이 서로 얽혀있음을 충분히 인식할 필요가 있다. 예를 들어, 비와 분수는 처음부터 함께 출발할 수 있다. 분리된 여러 대상을 시각적으로 비교하는 것은 하나의 대상을 여러 부분으로 비교해 보는 것과 같고 수직선과 비례표에 대한 이중의 비율 표현은 비와 분수를 서로 관련짓는 도구이며 같은 아이디어에 대한 다른 표현이 된다. 또한 이런 비는 비례 관계로 연결되고 이것은 또다시 일차 함수로 연결된다.

수학이 수직적으로 다양한 주제들이 분리되어 지도되고 횡적 연결을 무시한다면, 수학을 응용하기는 어렵다. 우리는 보통 대수 한 가지만 또는 기하 한 가지 만이 아니라 더 많은 것들을 필요로 한다. 학생들은 여러 다른 수학적 모델들을 비교하고 통합할 수 있어야 한다. 따라서, 횡적, 종적인 학습가닥의 혼합을 통해서 전체적인 구조화가 이루어져야 한다. 그리고 동시에 처음부터 응용과 순수 수학이 결합되어야 하며, 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용 영역이어야 한다.

학습 가닥의 혼합이 가능한 이유는 현상학적 출발 즉, 수학적 구조의 개념이 드러나는 실체 현상에 깊은 발생의 근원을 갖고 있다고 말할 수 있다. 그 이유는 한 가지 구조나 한 가지 개념만을 포함할 만큼 순수한 현상은 현실 세계에서는 드물기 때문이다.

따라서, 다시 한번 문맥의 중요성을 고려해야 하며 여러 가닥을 포함하고 있는 하나의 상황 모델로서 적용하는 문맥을 찾아내는 것이 중요하며 수업은 가능한 한 일찍부터 지속적으로 여러 영역들이 서로 얽혀있는 형태로 조직되어야 한다.

3. 수학교육에서 GSP의 활용

교사가 도형이나 함수 분야의 내용을 가르칠 때 개념의 한 표상을 시각적 자료로 제시하는 것은 학습자의 이해도를 높이는데 매우 유용한 방법이다. 하지만 교사가 분필로 정확한 그림과 그래프를 그려 학습자에게 제공하는 것은 어렵고 불가능한 경우가 많다. 이러한 단점을 보완할 수 있는 기하학습 프로그램인 GSP의 특징 및 장점과 사용 시 유의점은 다음과 같다.(강현수, 2003).

1) GSP의 특징

첫째, GSP를 이용하여 점, 선, 원을 그리는 것에서 출발하여 선분의 중점, 평행선, 주어진 선분의 길이와 같은 반지름의 원, 기하학적 관계를 나타낸 그래프 등을 그려 도형의 본질적인 관련성을 나타내는 그림을 빠르고 정확하게 그릴 수 있다.

둘째, 종이 위에 혹은 칠판에 그린 도형은 기하학적 관계를 나타내는 특정한 경우를 표현한 것인데 비해, GSP를 사용하여 그린 도형은 여러 가지 비슷한 경우를 표현하게 된다.

셋째, 도형을 스크립트로 기록하면 특정한 도형 자체가 아닌 도형 사이의 추상적 관계만이 추측되어 기록된다. 즉, 설정한 가설이 옳은지 그 반대인지 동적으로 확인이 가능하다.

넷째, 스크립트를 도구와 같이 사용하여 큰 스크립트를 만들어 아주 복잡한 도형을 손쉽게 그릴 수 있다.

다섯째, 도형의 모양을 여러 가지로 바꾸고 설정할 수 있으므로 동적이며 색을 입히고 이름 혹은 설명을 쓸 수 있다. 사용자와 상호작용하는 동적인 칠판으로 사용될 수 있다.

2) GSP 활용에 관한 선행연구

테크놀로지를 활용한 수학 교수-학습방법에 대한 연구는 컴퓨터 기술의 발달과 함께 이루어졌다고 해도 과언이 아니다. 그 중 GSP를 활용한 연구는 꾸준히 이루어졌던 바 이들 선행연구를 분석하여 본 연구에서 GSP의 활용목적에 방향을 얻고자 하였다.

NCTM(2000)에서 주장하는 6가지 원리 중 테크놀로지 원리를 포함하였는데 이는 테크놀로지는 수학을 가르

치고 배우는데 필수적인 요소로 테크놀로지는 가르치고 배우는 수학내용에 영향을 주고 학생들의 수학학습 능력을 높여주어야 한다고 주장하였다. 권성룡(2001)은 탐구형 기하 소프트웨어 학습 환경과 지필 환경에서 내면화한 수학적 지식을 비교하여 지필 환경보다 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서 학습자가 능동적인 탐구활동으로 개념 정의에 더 가까운 활동을 하고 그 활동의 결과에 대해 지필 환경에서 학습한 학습자들보다 더욱 자신감을 가졌다고 하였다. Marrades & Gutie'mez(2000)도 GSP 사용은 증명과제에 대한 시각적 표현을 가능하게 하여 학생들의 귀납적 탐구활동을 용이하게 하고 학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공함으로써 학생들의 증명학습을 도울 수 있다고 하였다. 이와 유사하게 조완영(2000)의 연구에서 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서 학습자는 역동성과 참여의 기회로 인해 수학에 대한 자신감과 흥미를 갖게 되고 증명에 대한 태도변화에 아주 긍정적인 변화를 미쳤다고 하였다.

한편 테크놀로지 사용에 대한 부정적인 연구결과로는 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 오히려 연역적 증명의 역할이나 필요성을 악화시키는 결과를 초래할 수 있다(신유경, 강윤수, 정인철, 2008)고 하였고, 또한, 단순한 계산도 머리로 하지 않고 바로 계산기를 사용하려는 경향이 나타났고 사고를 필요로 하는 문제를 쉽게 포기하는 경우 그리고 계산기는 분수를 표시하지 못하기 때문에 분수 개념형성에 부정적인 영향을 준다(Zheng, 1998)고 지적한 바 있다.

이상을 정리하여보면 테크놀로지의 역할이 연구목적에 비춰 매우 중요하다는 것을 알 수 있다. 이는 우선 연구자가 테크놀로지를 어느 위치에 놓느냐가 연구에 매우 중요한 영향을 미칠 수 있다고 사료되었다. 본 연구에서는 테크놀로지가 답을 해결해주는 해결사로써가 아니라 GSP처럼 '사용자 중심 소프트웨어'는 수학내용의 탐구적, 귀납적 과정을 도울 수 있다는 점에 주목해서 이 장점을 극대화하여 학생의 수학화를 돕고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

학습자의 수학학습 시 발생하는 수학적 사고활동은 어떠한 요소에 의해 자극받고 자신이 이해한 것을 토대로 논리적으로 표현하는 것을 포함한다. 본 연구는 학습부진아를 대상으로 연구자의 학습지도를 통해 GSP를 사용하여 함수적 사고 특징과 관련된 학습자 개개인의 삼각함수 개념형성 과정을 질적 사례연구방법을 이용하여 연구하고자 한다. 질적 사례연구는 자료를 수집하고 조직하여 분석하는 것을 포함하며 사례를 깊이 있게 분석하는 것이다. 이 연구에서 사례에 대한 정보는 가능한 다양한 정보원이 활용되어 완전한 형태를 이뤄져야 하기 때문에 면담자료, 활동자료, 관찰자료, 문서자료 등을 포함시켜야 한다.

사례연구는 연구의 초점, 대상, 과정, 상황에 따라 다양하게 적용될 수 있으며 결과보다는 과정에, 특정 변수보다는 전체의 연관성에, 확증보다는 발견에 관심을 두고 있기 때문에 교육문제에 관련된 연구에 적합하다(Macmillan & Schumacher, 1993). 또한 한 가지 사례를 집중적으로 관찰, 분석, 조사함으로써 관련된 요소들 사이의 상호작용을 발견하고자 한다.

본 연구는 먼저 학습내용을 선정한 후 연구대상자를 선정하여 실험에 들어가기 전, 선수 학습에 대한 이해정도를 면담을 통해 조사하였다.

1. 연구대상

본 연구에 참여한 대상은 서울에 위치한 K고등학교 2학년에 재학 중인 학생에서 다음과 같은 단계를 통해 선발되었다. 1단계는 K고등학교의 2009학년도 1학년 재학생들의 수학과 수준별 그룹 A, B, C 중 C반에 속했던 2학년 이과반 학생들을 선정하였다. 2단계는 1단계에서 선정된 학생 중 2009학년도 2학기 중간, 기말고사의 성적이 50점 이하인 학생들로 기준을 좁혀 선정하였다. 단, 선천적 결함으로 인한 기초 학력 수준 이하의 특수학급 학생은 제외하였다. 3단계는 2단계의 학생 중에서 교사의 추천을 받아 연구자와의 면담을 통하여 연구에 관심을 보이고 참여의지를 표현한 학생 2명을 최종 선정하여 부모님의 동의를 얻은 후 진행되었다. 두 학생의 학습특성은 다음과 같다.

학생A : 평소 매우 활발하고 통솔력이 강하여 주변에 많은 교우들이 있다. 또한, 자신의 의사를 뚜렷하게 표현하고 모르는 것은 자신있게 질문하는 성향이다. 공부를

해야 하는 이유에 대해서 자신의 장래에 세운 계획을 위해선 꼭 필요한 것이라고 생각하고 열심히 하려고 하지만 관심있고 자신이 잘 할 수 있는 부분만 공부하려는 경향이 강하다. 집중력은 강하여 장시간의 학습시간에도 끝까지 이해하고 자신이 틀린 이유를 밝히고 해결하려는 태도를 갖고 있다. 수학에 대한 생각은 자신이 이과에 속하면서도 실용성이 떨어지지만 사고력을 높여주는 학문이라고 생각한다. 초등학교 이후 학원에 다닌 경험은 없으며 수학에서 단순계산문제에선 큰 문제가 없었으나 응용문제에서 어려움을 가지고 있었으며 이것을 극복하기위해 노력해본 적이 있으나 큰 성과가 없었다.

학생B : 학생A에 비해 자신의 의사를 타인에 매우 소극적으로 표현하며 수줍음을 많이 타는 성향이다. 그래서 모르는 것을 질문하여 이해하고 해결하려고 하지 않으며 새로운 것에 대한 호기심은 있지만 집중력이 약해 다른 학생과 동일한 학습내용과 학습시간에도 불구하고 이해수준이 현저히 낮았다. 역시 초등학교 이후 학원을 다닌 경험이 없으며 수학에 있어, 단순계산문제에선 속도가 빨랐지만 응용문제에서 어려움을 호소하였으며 교사의 학습지도에도 불구하고 전혀 접근조차 하지 않는 경향이 강하다고 하였다.

위 두 학생에서도 알 수 있듯이 수학학습부진아들은 수감각과 수계산을 주로 다루는 초등학교 교육과정에선 부진을 나타내지 않다가 중학교부터 문자사용을 통해 추상화와 일반화, 또한 특수화가 점점 심화되는 과정에서 실생활과 수학과 괴리, 선수학습의 결여로 현재 진행되는 학습에서 부진을 경험하게 된다. 본 연구에서는 이를 감안하여 학습의 초기과정인 수평적 수학화에 교수적 배려가 더욱 많이 필요함을 알 수 있었다.

2. 연구절차

2010년 4월~5월에 매주 2번씩 2명의 학생을 대상으로 연구가 실시되었다. 연구시작 전 학습자의 수학에 대한 견해와 삼각함수에 대한 선수학습 유무를 파악하기 위해 사전 면담을, 교수실험 과정에서 학습자가 학습내용을 이해한 정도 및 GSP를 활용한 교수-학습방법에 대한 견해를 얻고자 사후 면담을 실시하였다. 또한, 교수실험 과정에서 교수와 학습자 사이에서의 상호작용을 통한 비형식적 면담을 포함시켰다. 이 때 연구자는 관찰자로서 뿐만 아니라 참여자로서 학생의 GSP를 사용하는 학습활동을 도왔는데 컴퓨터는 각각 1대씩 학습자가 마주하였고 연구자는 가운데에 위치하여 학습자의 활동을 관찰하고 면담기법으로 연구를 진행하였다. 전체 교수실험 과정을 오디오 녹음을 통해 보관하였고 현장감을 놓치지 않기 위해 녹음 후 삼일이내 전사(transcription)자료를 얻는 것을 원칙으로 하였다. 또한, 교사의 매 차시별 관찰한 내용을 기록한 관찰지와 학생의 학습활동지도 수집되었다.

3. 연구도구

1) 단원 설정

연구대상자가 고등학교 2학년이지만 1학년 2학기에 배운 내용 중 삼각함수 단원을 선정하였다. 학습자와의 면담을 통해 이 단원의 내용을 학교 또는 사교육을 통해 학습이 이루어지지 못한 상태임을 학습자의 대답을 통해 확인하였으며 삼각함수의 기본적인 개념을 지도하는 방법으로 연구를 진행하였다.

2) 연구 지도안(학습자료)

<표 1>은 고상숙외(2005)에 따라 삼각함수 내용을 적용하여 RME의 수업원리를 토대로 재구성하였으며 선수 학습의 기본 개념을 지도하기 위하여 GSP를 활용하였다. 이런 시각화 자료를 사용하여 관찰, 실험, 귀납, 유추 등의 경험적 접근 방법을 통해 문제 상황을 수학적인 방법을 이용할 수 있도록 변형하는 과정 즉, 그래프 또는 기호화를 통해 수학으로 향하는 길을 여는 수평적 수학화를 용이하게 안내한다. <표 2>는 고상숙외(2006)의 연구를 토대로 삼각함수의 개념형성 시 Freudenthal이 주장한 현상에서 수학적 본질을 조직할 수 있도록 1차시에서 실세계에 있는 바이오 리듬, 1일 해수면의 높이 변화와 같은 다양한 현상을 학습자에게 제공하여 주기에 대한 심상을 형성하여 수평적 수학화 과정을, 2차시에서 6차시까지는 수평적 수학화와 수직적 수학화를 통해 7차시에서 응용적 수학화까지 수준 비약이 이루어질 수 있도록 구성하여 지도하였다. 특히, 2차시에서 6차시까지 기본 내용 학습 후 학습자의 학습에 대한 호기심 자극, 기본 학습내용의 확인, 삼각함수 그래프의 정확한 형태,

학습자의 문제해결을 위한 탐구를 위해 GSP를 주로 사용하였다. 수업 진행 전 GSP의 간단한 도구 사용법을 안내하고 수업을 진행하면서 학습에 필요한 혹은 학습자의 자유로운 탐구를 위해 그 밖의 기능을 소개하였다.

<표 3>은 이희숙(2009)의 연구에서 사용한 수학화 분석 준거와 고상숙, 고호경(2008) 연구에서 학생들 자신의 구성과 산물 내용을 재구성한 표로써 <표 2>의 차시 별 진행되는 학습 내용에 따른 수평적 수학화, 수직적 수학화 그리고 응용적 수학화에 해당되는 수학화 활동을 기술한 분석틀이다.

Ⅳ. 연구결과

본 연구는 GSP를 활용한 삼각함수 개념 학습에서 RME 이론을 바탕으로 고등학교 2학년 에 재학 중인 2명의 학생을 연구대상으로 하여 연구를 진행하였다. 차시 별 수업을 통해 RME 수업 이론을 통해 삼각함수 개념의 이해에 대한 수학화 과정은 어떻게 발달하는지 그리고 GSP의 활용이 학습자의 삼각함수 개념 형성 과정에 어떠한 역할을 하는지 다음과 같이 조사 분석되었다.

1. 삼각함수에서 수학화 발달과정

본 연구의 차시 별 연구를 통해 형성된 전체적인 수학화 과정은 <그림 2>와 같다. 수평적 수학화를 통해 나타난 학습자의 구성과 산물이 수직적 수학화를 형성할 수 있는 발판이 되었다. 이러한 과정이 반복되면서 학습자는 실세계의 상황을 삼각함수의 개념으로 설명하고 해석하는 수직적 수학화 단계의 수준까지 비약할 수 있었다. 이는 점진적 수학화의 양상을 띈다고 볼 수 있다.

수평적 수학화의 경우 학습자와 거리감이 느껴지지 않는 범위안에서 현상을 제시하였고 이를 통하여 귀납과 유추를 통해 규칙을 발견하여 수학적 모델을 형성하고 기호화할 수 있었다. 이 과정에서 GSP의 사용은 역동적인 수평적 수학화 과정을 용이하게 하였다. 이러한 수학화 과정은 학습자의 흥미 유발 및 집중력을 높였다. 왜냐하면 GSP를 활용하여 삼각함수의 직관적이고 시각적인 모델을 제시함으로써 수직적 수학화와 연결하는 역할을 하였다. 수직적 수학화는 이러한 수직적 도구의 사용으로 시도되지만 그 개념을 인지하고 나아가 확고히하는 재인지 과정이 필요하였다. 이 과정이 시간을 요하는 부분이기도 하였다.

<표 1> RME 수업요소

	RME의 수업요소
현상학적 탐구	학습자 주변에서 주기별로 변화하는 상황을 찾는 활동등을 하여 그 특징을 살펴보고 주기에 대한 개념을 인식하도록 한다.
수직적 도구에 의한 연결	삼각함수의 개념을 이해하기 위해 삼각비, 일반각과 호도법, 삼각함수의 정의, 삼각함수 사이의 관계, 삼각함수의 그래프, 삼각함수의 성질을 GSP를 학습자가 직접 사용하여 시각적 모델을 구현하고 학습내용을 명확히 이해하여 점진적 수학화 활동을 하고 형식적 수준까지 도달한다.
학습자 자신의 구성과 산물	교사의 안내, 학습자의 학습활동과 그 결과에 대해 학습자의 반성적 사고가 이루어짐으로써 처음에 제시되었던 현상과 수직적 도구에 의한 연결을 통해 삼각함수의 개념을 직관적으로 인식했던 상태에서 삼각함수의 정의, 그래프, 성질을 재창조하여 삼각함수에 대한 내용을 직접 발견할 수 있게 된다.
상호작용 수업	교사와 학습자, 학습자와 동료학습자, 학습자와 컴퓨터(GSP)간의 상호 작용이 수학 학습에 어떤 영향을 주는지 관찰한다.
학습가닥의 연결	삼각비를 이해하고 단위원 위에서 시초선과 동경이 이루는 각에 따른 삼각비의 값을 대응시켰을 때 함수관계가 성립하고 그 자취를 그래프로 나타낸 삼각함수의 그래프와 삼각함수의 성질을 GSP를 활용하여 이해할 수 있다.

하지만 GSP를 활용으로 인해 안내된 재발명 과정에서 학습내용을 자유롭게 반복할 수 있고 동료 학습자의 설명을 통해 반성적 사고과정과 학습자 스스로 수학화를 결정할 수 있는 상황을 거치면서 교사가 제시한 문제를 해결할 수 있는 수직적 수학화로 이끌었다. 이 후, <그림 3>, <그림 4>에서 학생A와 학생B에게서 공통적으로 관찰할 수 있었던 것은 주어진 실세계에 대한 정보를 차근차근 정리하여 삼각함수의 개념을 바탕으로 정보를 수집한 것이 가능해지면서 연구자에게 질문하는 횟수가 많이 줄어든 것이다. 이것은 두 학생 모두 스스로 해결할 수 있으므로 수학을 재발명하는 과정이 경험되었다는 것을 의미한다. 학생A의 경우 차분히 자신의 풀이과정을 자세히 기술하려고 노력하였으며 학생B의 경우 설명을 자세히 기술하지 않았지만 대수적 기호의 사용으로 실세계에서 주어진 정보들을 활용하여 문제를 해결하였다.

따라서, 교사가 제시한 실세계 상황에서 삼각함수의 개념을 스스로 강화하여 주어진 상황을 삼각함수의 수학적 기호로 나타내고 공식을 사용하여 해결 및 설명하는 수직적 수학화 단계로 수준의 향상이 이루어졌다고 할 수 있다.

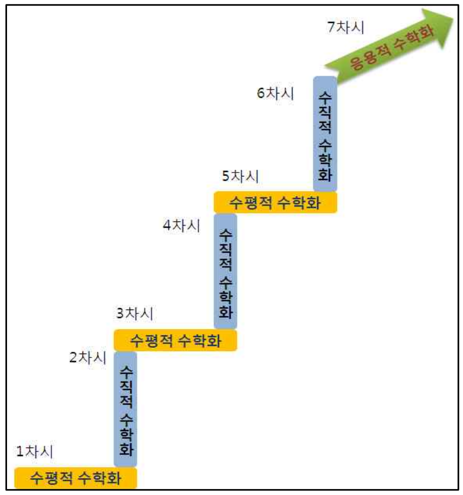
또한 이렇게 습득된 수학내용을 바탕으로 실세계 문제로 전환하는 과정인 응용적 수학화도 자연스럽게 이루어졌다. 특히 초기에 학습의 어려움을 가지고 있었기 때문에 새로운 개념의 적용이 필요한 문맥보다는 배운 내용을 그대로 반영할 수 있는 실세계 문제로 접근하였을 때 학생들은 그림 3과 4에서처럼 잘 해결하였다.

<표 2> 차시 별 학습내용과 Freudenthal의 수학화 단계

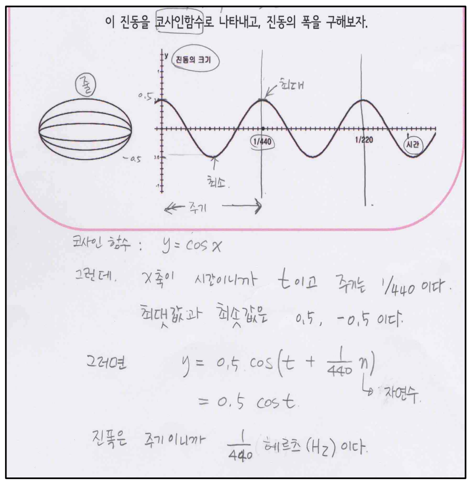
차시	소단원	학습내용	학습 시간	수학화 단계
사전 조사	-	학습자 면담 및 GSP 소개 및 간단한 도구 사용법 안내	30분	-
1	현상제시	주변에서 주기를 갖고 변화하는 현상들을 살펴본다.	30분	수평적 수학화
2	삼각비	삼각비의 뜻을 이해하고 GSP를 활용하여 직관적인 이해를 통해 다양한 직각삼각형의 삼각비를 구한다.	40분	↓ 수직적 수학화
3	일반각과 호도법	일반각과 호도법의 뜻을 이해하고 육십분법과 호도법의 관계를 이해하여 각을 표현한다.	40분	수평적 수학화
4	삼각함수 정의	일반각에 대한 삼각함수의 정의를 GSP를 활용하여 이해하고 각 사분면에서의 삼각함수의 부호를 알 수 있다.	50분	↓ 수직적 수학화
5	삼각함수의 그래프	① 삼각함수의 정의대로 그래프를 직접 그려보고 그 방법을 이해하여 각 삼각함수와 그 그래프의 성질을 이해한다. GSP를 활용하여 정확한 삼각함수의 그래프를 구현한다. ② 주기함수의 뜻을 이해하고 삼각함수가 주기함수임을 알 수 있다.	60분	수평적 수학화
6	삼각함수의 성질	① θ가 $2n\pi+\theta, -\theta, \pi\pm\theta, \frac{\pi}{2}\pm\theta$ 일 때 삼각함수의 값을 구할 수 있다. ② 삼각함수표를 이용하여 삼각함수 값을 구할 수 있다.	40분	↓ 수직적 수학화
7	실제에 적용	교사가 제시한 실생활에서 볼 수 있는 삼각함수 문제를 탐구하고 해결한다.	30분	응용적 수학화

<표 3> 수학화 분석틀

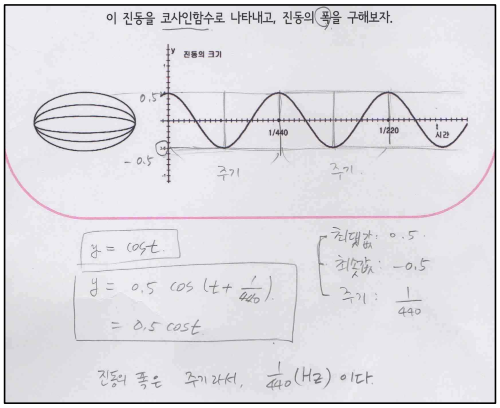
	수학화 활동
수평적 수학화	・일반적인 맥락에서 자신의 언어로 재구성하여 함수에 대한 심상 갖기 ・도식화 ・여러 가지 방법으로 문제를 형식화하여 시각화하기 ・표나 그림을 통해 관계 발견하기 ・표나 그래프 사이의 동형적인 측면을 인식하고 관계 발견하기 ・규칙 발견하기 ・다른 문제 사이에서 동형적 측면 인식하기 ・실세계 문제에서 수학적 문제로 전환하기 ・실세계를 잘 알려진 수학적 모델(함수적 관점)로 전환하기 ・표상간의 전이를 시도하기
수직적 수학화	・관계를 공식(삼각함수식)으로 표현하기 ・규칙을 증명하기 ・모델을 세련화하고 조정하기 ・다른 모델을 사용하기 ・모델들을 결합하고 통합하기 ・새로운 수학적 개념을 형식화하기 ・일반화하기
응용적 수학화	・형성된 삼각함수 개념을 주어진 현실 문맥에 적용하기 ・실세계 현상을 삼각함수 관점으로 바라보고 그것으로 나타내어 해석하기



<그림 2> 차시별 수학화 및 수준 비약



<그림 3> 7차시 학생A의 문제풀이 과정

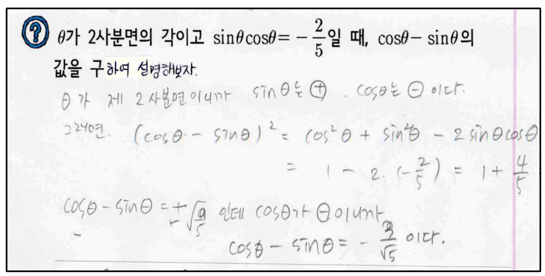


<그림 4> 7차시 학생B의 문제풀이 과정

2. 삼각함수 개념 형성에서 GSP 역할

먼저, GSP의 활용은 수평적 수학화와 수직적 수학화를 연결하는 수직적 도구이다. 수평적 수학화를 통해 학습되고 나타나는 학습자의 구성과 산물은 GSP를 활용하여 수직적 수학화로 연결하게 된다. 즉, GSP로 수평적 수학화에 도움을 주거나 학습한 내용들을 GSP로 작도하여 나타냄으로써 즉각적이고 시각작인 자료를 통해 학습자의 반성적 사고를 이끌고 이로 인해 수준의 상승을 꾀할 수 있었다. 다음은 3차시에서 나타난 학생의 반응이며 이와 유사한 반응이 연구과정에 자주 나타났다.

연구자 : 삼각함수 사이에 어떤 관계가 있었지?
학생 A : $\sin^2 x + \cos^2 x$... 이거요?
연구자 : 맞아. 계속 애기해볼까?
학생 A : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이고, $\tan x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 에요.
학생 B : 어? $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 아니에요?
연구자 : 맞아. B가 옳게 애기했어.
학생 A : 아, 맞다!
연구자 : GSP로 삼각함수 사이의 관계를 나타내보자. 단위원 위의 점P가 시계반대방향으로 움직일 때 삼각함수 값의 변화를 살펴보고 우리가 방금 애기한 삼각함수 사이의 값을 확인해보자.
(GSP로 작도하여 애니메이션 기능으로 통해 삼각함수 값의 변화를 살펴보고 삼각함수 사이의 관계, 즉 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 임을 확인하였다.)
학생 A : 어? 정말 $\sin^2 x + \cos^2 x$이 1이네? 신기하다!
학생 B : 선생님, 만약에 원을 더 크게 해도 이 값은 변하는 게 아니죠?
연구자 : 그렇지. 예전에 배운 삼각비에서 변의 길이에만 변화를 줬을 때 삼각비의 값은 일정했잖아? 마찬가지야. 삼각함수 값이 일정하고 그렇기 때문에 삼각함수 사이의 관계식도 항상 일정하지.
학생 A : 그러면 값이 일정하니까...공식이네요.
학생 B : 이걸로(GSP) 바로 확인할 수 있으니까 좋은 것 같아요.
연구자 : 어떤 부분을 확인했니?
학생 B : 음... 써져있는 걸로(학습자료) 보면 외우게 되는데 이걸로(GSP)로 보니까 왜 그런지 확인할 수 있는 것 같아요.
연구자 : 그랬구나. 그러면 지금 알게 된 내용으로 뒷장 문제를 해결해볼까?
학생 A : 선생님, 이 문제 2사분면이니까 삼각함수 부호랑 관련된거죠?
연구자 : 맞아. θ가 제 2사분면일 때 $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 부호를 알고 문제를 풀어야 해.
학생 A : 선생님, $\cos\theta \sin\theta$ 값이 마이너스니까 $\cos\theta$이 마이너스이죠?
연구자 : 그렇지.
학생 A : 선생님, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이것도 사용해야 되요?
연구자 : A가 전개한 식에서 $\sin^2\theta + \cos^2\theta$를 찾아볼까?
학생 A : 아~있어요! 알겠다!



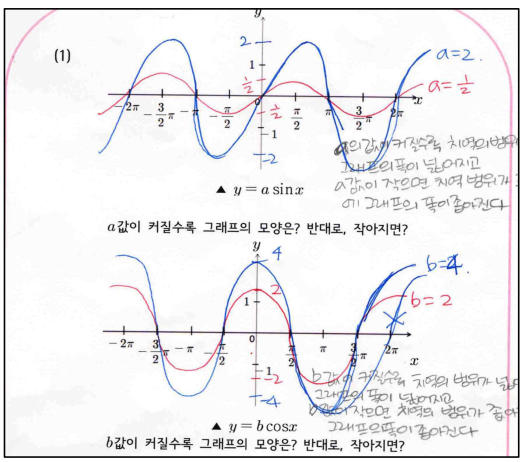
<그림 5> 3차시 학생A의 수직적 수학화 예

<그림 5>은 3차시 삼각함수 사이의 관계 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$를 GSP의 시각화 자료로 활용하여 직접 그 관계식의 성립을 확인하였으며 연구자가 제시한 문제를 자신이 이해한 삼각함수 사이의

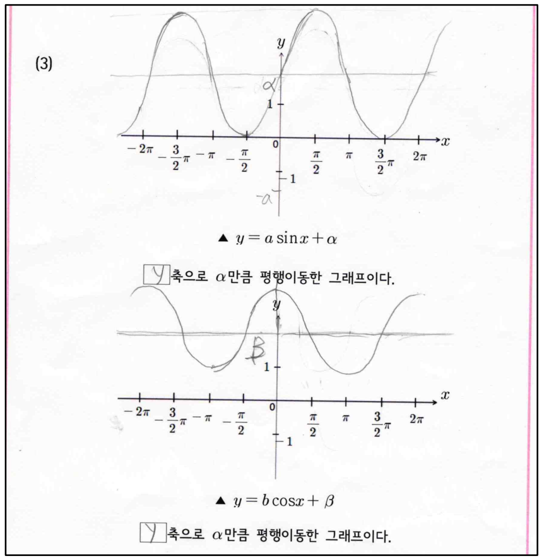
관계를 사용하여 문제해결을 할 수 있었다. 이는 삼각함수 사이의 관계를 이해하는 데 있어 GSP의 활용이 수평적 수학화와 수직적 수학화를 연결하는 그 사이에 위치하여 학습자의 이해를 돕고 개념 확립 및 대수적 기호를 사용하여 문제를 해결할 수 있게 하였다.

둘째, GSP를 활용한 탐구활동을 통해 삼각함수의 개념이 구체화된다. GSP를 활용하여 학습하게 된 개념은 활동을 통해 개념간의 관련성을 명확하게 할 수 있었다. 예를 들어, 삼각함수에서 주기가 의미하는 것이 무엇인지 GSP를 활용하여 동적으로 확인이 가능하고 삼각함수식에 변화가 있을 때 그 그래프를 직접 작도하여 나타냄으로써 성질을 파악할 수 있다. 즉, 학습자는 능동적 탐구활동을 바탕으로 개념의 의미를 재확인할 수 있었다.

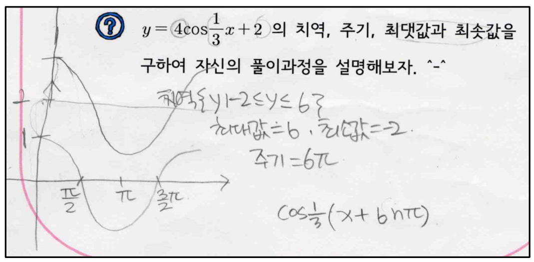
특히, 4차시에서 <그림 6>에서와 같이 삼각함수의 그래프를 학습할 때 두 학습자는 수업 초반에 주어진 각에 따른 삼각함수 값을 연구자의 안내에 따라 직접 구해보고 수업 후반에는 연구자의 안내 없이 자신이 직접 GSP를 활용하여 주어진 각에 대한 삼각함수 값의 추측 및 그래프를 작도하여 그 성질을 학습하였다(<그림 7> 참조). 그 후, <그림 8>에서와 같이 학습자 스스로 GSP를 활용하여 삼각함수의 적용문제를 형식화하기가 가능하였고 주어진 문제를 자신 있게 해결하였다. 그 과정에서 GSP를 활용한 탐구활동이 삼각함수 문제풀이와 학습자의 능동적인 학습 자세를 키우는 계기가 되었다.



<그림 6> 4차시 연구자와 함께 GSP를 활용하여 그린 삼각함수 그래프



<그림 7> 학습자 스스로 GSP를 활용하여 탐구한 후 형식화하기



<그림 8> 5차시 주기함수에 대한 수직적 수학화

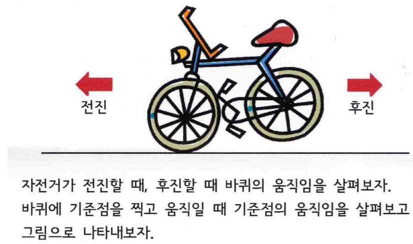
셋째, GSP 활용은 상호작용을 활성화시키는 촉진제 역할을 한다. 학습자는 스스로 GSP를 활용한 학습내용을 자신의 사고과정 혹은 풀이를 설명함으로써 동료 학습자와 교사와의 상호작용을 더욱 활성화시킨다. 예를 들어, 3차시 삼각함수의 부호에서 동료 학습자의 설명을 듣고 자신의 풀이나 이해한 내용을 객관적으로 비교하는 반성적 사고를 할 수 있게 하였다. 이 과정에서 학습자는 정당화과정을 거치는 설명하는 과정에서 자신감을 얻을 수 있었다. 또한, 교사와 학습자와의 상호작용에서 교사가 정확한 시각자료를 제시하고 적절한 질문을 함으로써 교사와 학습자 사이에서 생길 수 있는 수준의 괴리를 축소시키고 수업을 더욱 탄력적으로 이끌 수 있었다.

연구자 : A야! 제 3사분면에서 $\tan\theta$가 마이너스일까?
학생A : 어...아니에요?
연구자 : 다시 한번 생각해볼까?
학생A : 맞는 것 같은데요.
연구자 : B는 구했니? 부호가 뭐야?
학생B : 플러스요.
[학생A가 제 4사분면에서 삼각함수의 부호를 구하지 못하였다.]
연구자 : 맞았어. A에게 설명해볼까?
학생B : 네? 못하는데...
연구자 : 못하긴. 너가 이해한대로 설명하면 돼.
학생B : [웃기만 한다.]
연구자 : B야, A한테 제 4사분면에서 삼각함수 부호 설명해볼까? 한 번 천천히 해봐.
학생B : 아, 네. 저 이건 잘 알아요. 하하. 제 4사분면에서는 x값은 플러스, y값은 마이너스잖아.
학생A : 응.
학생B : 그런데 빗변은 길이기 때문에 항상 양수이고 높이인 y가 음수니까 $\sin\theta$는 마이너스이고, $\cos\theta$는 음수분의 음수니까 플러스고, $\tan\theta$는 양수분의 음수니까 마이너스야.
학생A : 아~!
학생B : 어머! 내가 한 말 알아들었어? 하하.
연구자 : 설명 잘 했어. 그런데 용어를 정확하게 구사했으면 더 좋았을 것 같아.

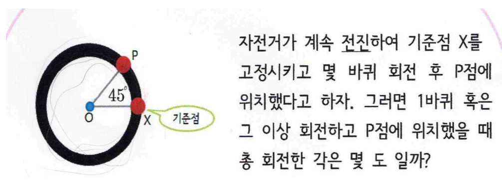
3. 삼각함수 학습과정에서 교수학적 원리

현실적 수학교육을 바탕으로 한 수학학습이 학습부진아의 삼각함수 개념 형성과정에서 관찰한 교수학적 원리는 다음과 같다.

첫째, 현실에서 출발하여 그 현상을 탐구하고 재발명함으로써 삼각함수에 대한 심상을 갖게 한다. 맥락을 통해 현상을 탐구하여 배우게 될 학습내용에 대한 재발명의 과정을 지원해주고 이러한 과정을 통해 점진적인 수학화가 이루어지는 초석을 다지게 되는 것이라고 할 수 있다. 예를 들어, 3차시에서 일반각과 호도법을 학습할 때 <그림 9>처럼 실생활에서 볼 수 있는 자전거 바퀴를 제시했다. 자전거 바퀴 둘레 중 한 곳에 기준점을 두고 바퀴가 회전하였을 때 회전한 크기를 수치로 나타내는 과정에서 두 학생 모두 기준점을 생소하게 받아들였다. 이들이 학습부진아인 점을 감안하면 기준점에 대한 기초지식이 없는 것은 그리 이상한 일이 아니다. 하지만 기준점을 정해야 회전으로 인한 각을 측정할 수 있다는 것을 '자전거 바퀴의 회전'을 통해 알게 되었고, 그 후 <그림 10>을 제시하여 바퀴의 회전으로 기준점이 회전한 각의 크기에 대한 심상이 형성되었다. 즉, 이러한 현상을 탐구하는 것은 형식적이고 추상적인 수학을 이해할 수 있는 수준으로의 비약할 수 있는 발판이 된다.



<그림 9> 3차시의 자전거 바퀴

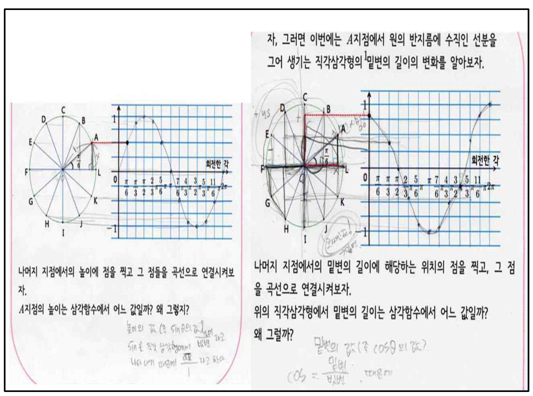


<그림 10> 3차시 회전한 각에 대한 심상형성

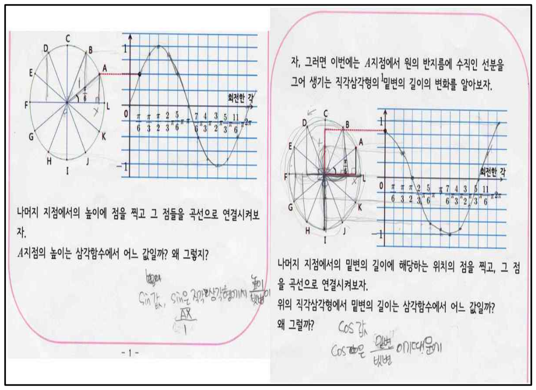
둘째, 수평적 수학화 상태에서 수직적 도구는 수직적 수학화를 연결하여 삼각함수 개념 형성 시 중요한 역할을 한다. 학습자에게 제시하는 현상은 교사가 설정하는 것이기 때문에 학습자가 그 현상을 통해 수평적 수학화가 이루어지고 수직적 도구의 사용으로 수직적 수학화로 연결시켜준다. 이 과정에서 실세계를 수학적 모델로 전환하고 그 개념을 형식화하기 위해 GSP를 활용하였다. 특히 GSP는 수평적 수학화가 이루어져 있는 상태에서 학습자 스스로 활동을 통하여 수학적 기호로 식을 표현하고 그 관계를 파악하는 데 있어 안내된 재발명을 할 수 있는 수직적 도구가 되었다. 예를 들어, 삼각함수의 관계에서 GSP의 기능인 애니메이션을 사용하여 각의 변화가 있어도 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 임을 직접 확인하고 그 관계를 공식으로 표현하고 형식화할 수 있었다. 이에 대해선 본문의 연구결과의 GSP 역할에서 상세히 언급한 바가 있다.

또한, <그림 2>는 차시 별 수평적 수학화, 수직적 수학화 그리고 응용적 수학화가 이루어지는 것을 나타낸 것이다. 수평적 수학화와 수직적 수학화 사이에 GSP를 활용한 시각적 모델, 자신이 만든 기호를 사용하여 표현하는 학습활동이 포함되어 있으며 응용적 수학화 단계에서는 형성된 삼각함수의 개념을 통해 실세계 문제를 해결한다. 전체 학습과정에서 두드러진 특징은 수평적 수학화와 수직적 수학화를 연결하는 수직적 도구의 사용 시 교사는 학습자가 학습목표와 다른 방향으로 빠지지 않도록 하되 최소한의 안내를 통해 학습자 스스로 수직적 도구를 사용하여 수직적 수학화에 더욱 다가갈 수 있었다.

셋째, 각 수학화 단계별로 학습자의 구성과 산물은 달랐다. 수평적 수학화에서는 현상에서 알고자하는 내용을 추출하고 그것을 자신의 언어로 나타내기, 좌표평면 위의 단위원에서 각의 크기가 변화하면서 달라지는 삼각함수 값의 자취를 그래프로 나타내기, 그래프를 통해 성질을 발견하기이다. <그림 11>, <그림 12>는 두 학생이 삼각함수 그래프를 직접 그린 것이다. 학생A의 경우 코사인함수를 그릴 때, 학생B는 사인함수를 그릴 때 어려움을 호소한 것이 특이한 점이었고 이를 해결하기 위해 서로에게 설명해 주는 방법으로 반성적 사고를 하여 그래프를 완성할 수 있었다.



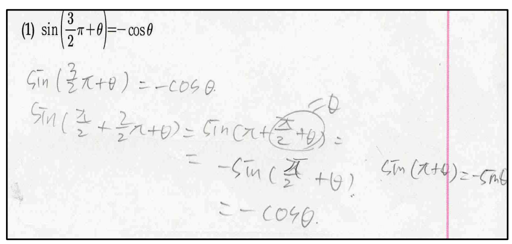
<그림 11> 5차시 학생A의 사인함수와 코사인함수의 그래프



<그림 12> 5차시 학생B의 사인함수와 코사인함수의 그래프

수직적 수학화에서는 <그림 13>와 같이 삼각함수의 관계를 공식으로 나타내거나 삼각함수 성질을 사용하여 증명하기, 관계를 삼각함수식으로 표현하거나 일반화하기와 같이 삼각함수 개념을 형식화하는 것이다. 특히 6차시에서는 GSP로 삼각함수의 성질에 따른 그래프와 그 내용을 학습하였는데, 학생A의 경우 문제해결 속도가 다소 느렸지만 학습한 내용에 대한 원리를 인지하기 위해 스스로 탐구하려는 자세가 돋보였다. 또한, 학생B의 경우 학생A보다 속도가 빨랐으며 대수적 기호의 사용으로 기술하는 것에 대한 불확실성이 현저히 감소하였다.

마지막 응용적 수학화에서는 본문 374쪽의 <그림 3>, <그림 4>와 같이 삼각함수 개념을 강화하여 새로운 실세계에 적용하고 자신이 결정한 방법으로 문제를 해결하기, 실세계 상황을 함수적 사고로 해석하고 표현하기이다.



<그림 13> 6차시 증명하기

넷째, 상호작용을 통한 학습은 학습자의 반성적 사고를 촉진시키고 삼각함수의 개념을 더욱 강화시킨다. GSP를 활용한 수업이었기 때문에 학습자와 컴퓨터의 상호작용도 주목할 점이었다. 학습자들이 컴퓨터를 활용하여 수학 학습을 전혀 해보지 못한 상태였기 때문에 컴퓨터의 활용은 학습자의 학습내용에 대한 관심을 충분히 유발할 수 있었고 더욱 집중할 수 있었다. 학습자가 직접 학습내용을 시각화하여 나타내고 그 원리를 파악하여 그 내용을 정리하여 동료 학습자와 교사에게 설명하였고, 이러한 활동을 통하여 자신의 풀이나 설명을 정당화하고 동료 학습자의 풀이를 이해하거나 반문을 갖고 질문하여 서로 상호작용함으로써 반성적 사고가 일어나게 된 것이다. 특히, 수평적 수학화 과정에서 컴퓨터와 학습자, 학습자와 동료 학습자, 교사와 학습자 사이에서 활발한 상호작용이 이루어졌다. 자신의 언어로 표현하고 관계를 파악하는 과정에서 학습자와 동료 학습자는 서로의 풀이를 통해 그리고 교사의 질문을 통해 의사소통을 활발히 하였으며 그 때 서로의 풀이를 되돌아보는 반성적 사고가 일어났음을 알 수 있었다.

다섯째, 학습자는 차시 별 수업이 진행됨에 따라 학습 가닥의 연결을 이해하고 스스로 그 가닥을 연결하려는 모습을 보였다. 6차시 삼각함수의 성질에서 학생A의 경우 임의의 각에 대한 삼각함수 값을 구하여 비교하고 각 삼각함수의 그래프를 GSP를 활용하거나 자신이 직접 그려봄으로써 삼각함수의 성질을 식으로 표현하였다. 학생B는 몇 가지 각에 대한 삼각함수 값을 직접 구하고 GSP를 활용하여 삼각함수의 그래프로 앞에서 구한 삼각함수 값 사이의 관계를 비교하였으며 나머지 각에 대한 삼각함수의 그래프와 그 값을 추측하여 나타내었다. 이는 다양한 표상들을 횡적·종적으로 연결하여 전체적인 구조를 이루게 된 것이다. 이러한 연결 과정은 학습 가닥의 연결이며 이것은 좀 더 복잡하거나 다양한 상황을 이해하고 수학적 수단으로서 표현하고 형식화할 수 있다는 것을 의미한다.

V. 결 론

본 연구는 GSP를 활용한 삼각함수에서 학습의 부진을 가지고 있었던 학생들의 수학화 과정을 연구하였다. 수학화 과정에서 교사는 학습자에게 적절한 현상을 제시하고 학습자는 그에 따른 수학화 과정을 통해 수학적 수단으로 본질을 조직하며 현상과 본질의 교대작용을 통해 수준의 상승이 이루어진다. 학생 A의 경우 적극적인 태도로 학습하였으나 수업 초반에 수학기호로 학습내용을 전혀 표현하지 못했고 이해속도가 느렸다. 하지만 수업이 계속 진행되면서 수학화에 의해 자신의 생각이 투명해지면서 논리적으로 기술하고 타인에게 자신있게 설명하며 복잡한 과제도 배운 내용을 적용시켜 해결하였다. 학생 B는 수업에 소극적인 태도를 보였으나 학생 A에 비해 이해속도가 빨랐다. 수업 초반에 학습한 내용을 표현하고 설명하는 것에 어려움을 호소하였지만 수업이 진행되면서 상호작용 능력이 향상되었고 학생 A와 마찬가지로 대수적 기호의 사용과 제시된 문제에 삼각함수의 성질을 적용하여 해결할 수 있었다. 이 가운데 학습자의 삼각함수의 개념형성에 수직적 수단이며 상호작용을 촉진하는 GSP의 활용은 특히 부진아인 두 학생의 수학화 과정에 절대적인 도움을 주었다고 할 수 있다.

또한, 본 연구에 이론적 배경을 제공하는 수학화 교수법과 이를 구체화한 7차시 학습자료 역시 그 의도가 학생의 수학화를 안내하는 것이므로 학습의 부진을 해소하는 효과적인 학습의 경로를 제공하였다고 할 수 있다. 많은 연구가 교수학적 이론의 소개 또는 이를 바탕으로 한 학습자료 소개만을 다루는 경우가 많은데 본 연구에서는 수학화를 위한 수업모형을 구성하고 이를 실제로 수행한 학습과정과 결과를 제공하였으므로 현장의 수학 수업에 아이디어를 제공하고 효과적으로 이를 보급할 수 있는 일례를 보였다고 할 수 있다.

끝으로 본 연구에 따른 후속 연구를 위해 다음과 같은 제언으로 마무리하고자 한다. 첫째, 학습부진아를 대상으로 RME 수업 이론을 기초로 삼각함수에 관한 연구이기 때문에 좀 더 다양한 수학 영역에서 학습부진아의 학습향상과정을 설명하는 연구가 더 많이 이루어져야 한다. 둘째, 소수의 학습부진아를 대상으로 한 연구이기 때문에 다수의 학습부진아를 대상으로 본 연구방법을 적용하였을 때 어떤 특징들로 분류될 수 있는지 파악하여, 실제 학교의 수학 교과교실에서의 수업 즉, 다양한 학습환경에 따라 적용시킬 수 있는 프로그램(학습자료)으로 더욱 확대 개발될 필요가 있다. 셋째, 본 연구는 GSP를

활용한 삼각함수에서 학습자의 수학화 과정이 주된 초점이었기 때문에 학습자의 의사소통에 직접적인 초점을 두지 않았다. 물론 테크놀로지에 의한 상호작용 수업에 관해 학생의 언어의 사용이 식으로 바뀌는 과정 등 언급되었지만 학습자 간 또는 학습자와 교사간의 의사소통(대화)의 수준의 변화와 의사소통의 요소간의 분류를 통해 의사소통의 활성화에 대한 구체적인 연구가 자세하게 조사될 필요가 있다.

참 고 문 헌

강현수 (2003). Van Hiele 이론을 바탕으로 GSP를 활용한 학습자료 개발 연구. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.

고상숙・고호경 (2008). 중학교 함수의 수학화 과정에서의 성차 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 47(3), 273-290.

고상숙・장덕임 (2005). 수학화에 의한 도형지도에서 학생의 학습과정 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 44(2), 159-167.

고상숙・최경화 (2006). 수학사를 활용한 중학교 방정식에서 학생의 수학화, 한국수학교육학회, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 45(4), 439-457.

교육과학기술부 (2008), 고등학교교육과정 해설서. 서울: 교육과학기술부.

권성룡 (2001). 타구형 기하 소프트웨어 학습환경에서의 지식의 내면화에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원, 박사학위 논문.

김연식・정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 대한수학교육학회 논문집, 7(2), 1-23.

신유경・강윤수・정인철 (2008). GSP가 중학생들의 증명학습에 미치는 영향: 사례연구. 한국학교수학회논문집, 11(1), 55-68.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출반부.

이희숙 (2009). 과학탐구활동을 통합한 삼각함수단원의 수업자료 개발 및 적용에 관한 사례연구, 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

장영수 (2006). 삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도방안에 관한 연구, 한국교원대학교대학원 석사 학위 논문.

장진희 (2008), GSP가 학습부진아들의 수학적 성향에 대한 사례연구 - 중학교 2학년 일차 함수를 중심으로, 공주대학교 교육대학원 석사학위 논문.

정영옥 (1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰-초등학교의 알고리즘 학습을 중심으로. 대한수학교육학회지, 수학교육학 연구, 9(1), 111-119.

정인철 (2005). 테크놀로지 환경에서의 수학적 발견 탐구학습: Joy의 닮은 사각형. 한국학교수학회논문집. 8(3), 411-422.

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구, 한국교원대학교 대학원 박사 학위 논문.

천규섭 (2006). GSP활용을 통한 학생의 기하사고 수준발달에 관한 연구, 단국대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

Brousseau, G. (1984). THe Crucial role of didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In Steiner, H. G., *Theory of Mathematics Education*(TME) (ICME 5-Topic Area and Mini-conference: Adelaide, Australia, 110-119), Bielifeld, F. R. Germany.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education : China lectures.* Cordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics.(2000). Principles and Standard for School Mathematics. Reston, VA: Author.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions : A model of goal and theory description in mathematics instruction: The Wiskobas project.* Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Macmillan, J. H., & Schumacher, S. (1993). *Research in Education: Conceptual Introduction*(3rd ed). Harper Collins College.

Marrades, R. & Gutie'mez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Zheng, T. (1998). Impacts of using calculator in learning mathematics. *The 3rd Asian Technology Conference on Mathematics* (ATCM'98).Accessed at http://www.atcminc.com/mPublications/EP/EPATCM'98/index.html

A Case Study on Slow Learners' Mathematization of Trigonometric Functions, Using GSP

Moon, Hye Ryung
Dankook University
E-mail : mhrbabo@dankook.ac.kr

Choi-Koh, Sang Sook†
Dankook University
E-mail : sangch@dankook.ac.kr

This research was to help slow learners to be motivated and to make their outcome productive, using GSP based on the mathematization theory for learning mathematics, as a way of encouraging the learner-centered approach. With 2 of the second graders in a high school, who had not yet understood trigonometric functions in their first grade period, 7 units of lesson plans were designed for the research. The results showed that first, understanding real life contexts and analyzing properties by observation, and experiment using GSP, to build the concept of trigonometric functions could be a foothold on which learner's organization and outcome from a horizontal mathematization led to vertical mathematization. Despite the delay during the level-up-stage for a while, the learners could attain the vertical mathematization stage and moreover the applicative mathematization through effective use of GSP and the interaction between the learners or a teacher and the learners. Second, using GSP was a vertical tool of connecting horizontal mathematization with vertical mathematization in forming the concept of trigonometric functions and its meaning could be understood by their verbalizing and presenting the outcomes through their active performance. Using GSP is helpful for slow learners to overcome learning difficulties, based on the instructional materials designed by Realistic Mathematics Education.

* ZDM Classification : C34
* MSC2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Slow learner, Trigonometric function, Mathematization(Horizontal, Vertical, Applicative), Instructional material, Technology, GSP.

† Corresponding Author