

붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트

장대흥[†]

부경대학교 통계학과

Bootstrap C_{pp} Multiple Process Performance Analysis Chart

Jang, Dae-Heung[†]

Department of Statistics, Pukyong National University

Key Words : Control Chart, Multiple Process Performance Analysis Chart, Bootstrapping

Abstract

Pearn et al.(2002) supposed the C_{pp} multiple process performance analysis chart. This chart displays multiple processes with the process variation and process departure on one single chart. But, this chart can not display the distribution of the process variation and process departure and is inappropriate for processes with non-normal distributions. With bootstrapping method, we can display the distribution of the process variation and process departure on the C_{pp} multiple process performance analysis chart.

1. 서 론

공정능력이란 공정이 관리상태에 있을 때 그 공정에서 생산되는 제품의 품질변동이 어느 정도인가를 나타내는 양이다. 이러한 공정능력을 정량화하는 방법으로서 우리는 주로 공정능력지수를 사용한다. 양쪽 규격(규격하한 LSL , 규격상한 USL)이 있고 제품의 품질특성의 분포가 양쪽 규격의 중앙에서 치우침이 없이 대칭적이면 다음과 같은 공정능력지수 C_p 를 주로 사용한다(Kane(1986)).

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \tag{1.1}$$

여기서 $d = \frac{USL - LSL}{2}$ 이고 σ 는 공정표준편차를 나타낸다. 품질특성치의 분포가 양쪽 규격의 중앙에 위치하지 않고 한 쪽으로 치우쳐 있는 경우는 공정능력지수 C_{pk} 를 주로 사용한다(Kane(1986)). C_p 는 규격공차에 상대적인 공정변동만 고려한 공정능력지수이다. C_{pk} 는

공정변동 뿐만이 아니라 공정평균 μ 도 고려한 공정능력지수이다. 규격의 중심값에 집중되는 정도를 측정할 수 있는 공정능력지수로서는 공정정확도지수 C_a 를 사용한다.

수치적 측도들 C_p, C_{pk}, C_a 는 모두 품질특성의 산출 결과에 기초한 공정능력지수이므로 공정타겟팅(process targeting)을 설명하지 못한다. 즉, 공정생산물 품질특성이 목표값 T 에 얼마나 가까운지를 설명하지 못한다. 그래서 Chan외 2인(1988)은 공정생산물 품질특성의 공정변동뿐만 아니라 공정생산물 품질특성이 목표값 T 에 얼마나 가까운지를 동시에 고려한 공정능력지수 C_{pm} 을 다음과 같이 제안하였다.

$$C_{pm} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

품질특성치의 분포가 양쪽 규격의 중앙에 위치하지 않고 한 쪽으로 치우쳐 있는 경우는 공정능력지수 C_{pmk} 를 주로 사용한다(Pearn외 2인(1992)). Chan외 2인(1988)은 비대칭공차를 갖는 공정에 대하여 공정능력지수 C_{pm}^* 을 다음과 같이 제안하였다.

[†] 교신저자 dhjang@pknu.ac.kr

$$C_{pm}^* = \frac{D}{\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

여기서 $D = \frac{\min(d_L, d_U)}{3}$ 이고 $d_L = T - LSL$ 이고 $d_U = USL - T$ 이다. C_{pmk}^* 에서 공정생산물 품질특성이 목표값 T 로부터 벗어나는 정도를 손실로서 반영한 C_{psk} 를 Benson(1994)이 제안하였다. Benson(1994)은 C_p , C_{pm} , C_{pk} , C_{pmk} , C_{psk} 를 모두 통합시킨 $C_{psk}(U, V, W)$ 를 제안하였다.

비정규공정에 대한 공정능력의 측도로서 Wright 1995)는 왜도에 민감한 공정능력지수 C_s 를 제시하였다. 신뢰도공학이나 생존분석에서 쓰이는 분포들은 주로 오른쪽으로 치우친 분포이다. 그러므로 Nahar와 2인(2001)은 왜도가 양의 값일 때는 공정능력을 증가시키고 왜도가 음의 값일 때는 공정능력을 감소시키는 공정능력지수 C_{sm} 을 제시하였다.

Greenwich와 Jahr-Schaffrath(1995)는 공정능력지수 C_{pm}^* 의 공급의 역수인 비공정능력지수(process incapability index) C_{pp} 를 정의하였다. C_{pp} 는 다음과 같이 C_{ip} 라는 공정비정밀도지수(process imprecision in dex) 와 C_{ia} 라는 공정비정확도지수(process inaccuracy in dex) 두 개의 항의 합으로 표현할 수 있다.

$$C_{pp} = C_{ip} + C_{ia} = \left(\frac{\sigma}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mu - T}{D}\right)^2 \quad (1.2)$$

C_{ip} 는 규격공차에 대한 상대적인 변동을 측정하고 C_{ia} 는 목표값으로부터의 상대적인 이탈(departure)을 측정한다.

$\gamma = \frac{\sigma}{d}$, $\delta = \frac{\mu - T}{d}$ 라 하자. $d = 3D$ 를 만족하는 경우 C_{pp} 는 다음과 같이 γ 와 δ 의 함수로 나타내어 진다.

$$C_{pp} = C_{ip} + C_{ia} = 9(\gamma^2 + \delta^2) \quad (1.3)$$

Pearn과 Lin(2001)은 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 점추정과 점추정치의 성질에 대하여 언급하였고 Pearn과 Lin(2002)은 C_{pp} 에 대한 추정량의 분포와 C_{ip} 에 대한 신뢰구간에 대하여 언급하였다.

신경식의 2인(1996)은 공정능력지수 C_{pmk} 의 공급의 역수인 비공정능력지수 C_{pmk}^* 를 정의하였다. 김진수의 2인(1999)은 공정능력지수 C_{psk} 의 공급의 역수인 비공

정능력지수 C_{psk}^* 를 정의하였다.

품질특성의 분포가 정규분포를 이루지 않는 경우를 고려하여 송서일과 이보근(1997)은 C_s 의 공급의 역수인, 왜도에 민감한 비공정능력지수 C_{ps}^* 를 제안하였다. C_{ps}^* 는 다음과 같이 C_{ip}^* 라는 공정비정밀도지수, C_{ia}^* 라는 공정비정확도지수, C_{is}^* 라는 왜도에 대한 지수 총 세 개의 항의 합으로 표현할 수 있다.

$$C_{ps}^* = C_{ip}^* + C_{ia}^* + C_{is}^* = \left(\frac{\sigma}{D^*}\right)^2 + \left(\frac{\mu - T}{D^*}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{|\mu_3|}{\sigma}}}{D^*}\right)^2 \quad (1.4)$$

여기서 $D^* = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3}$ 이고 $\mu_3 = E(X - \mu)^3$ 는 3차 중심 적률이다. C_{ip}^* 는 규격공차에 대한 상대적인 변동을 측정하고 C_{ia}^* 는 목표값으로부터의 상대적인 이탈을 측정하고 C_{is}^* 는 왜도를 측정한다. C_{is}^* 는 공정평균의 미세한 변화를 감지하는 항으로 왜도에 대한 페널티로 정의할 수 있다.

신뢰도공학이나 생존분석에서 쓰이는 분포들은 주로 오른쪽으로 치우친 분포이다. 그러므로 우리는 왜도가 양의 값일 때는 공정능력을 증가시키고 왜도가 음의 값일 때는 공정능력을 감소시키는 공정능력지수 C_{sm} 을 이용하여 C_{psm} 의 공급의 역수인, 왜도에 민감한 비공정능력지수 C_{psm}^* 를 제안할 수 있다. C_{psm}^* 는 다음과 같이 C_{ip}^* 라는 공정비정밀도지수, C_{ia}^* 라는 공정비정확도지수, C_{is}^* 라는 왜도에 대한 지수 총 세 개의 항으로 표현할 수 있다.

$$C_{psm}^* = C_{ip}^* + C_{ia}^* + C_{is}^* = \left(\frac{\sigma}{D^*}\right)^2 + \left(\frac{\mu - T}{D^*}\right)^2 + \frac{\mu_3}{D^{*2}} \quad (1.5)$$

C_{ip}^* 는 규격공차에 대한 상대적인 변동을 측정하고 C_{ia}^* 는 목표값으로부터의 상대적인 이탈을 측정하고 C_{is}^* 는 왜도를 측정한다. C_{psm}^* 는 C_{sm} 으로부터 만들어지는 측도이므로 C_{sm} 이 가지는 장점을 가지고 있다.

공정능력지수의 평가를 베이지안 접근을 하거나 (Pearn과 Wu(2005), Lin(2006), Wu(2008)) 그림으로 평가하고자 하는 노력(Tang의 2인(1997), Deleryd와

Vannman(1999), Chen외 2인(2003), Vannman(2005), Chen외 2인(2005)이 여러 학자들에 의하여 추진되어 오고 있다. 공정능력을 평가하기 위한 전형적인 그래픽 방법으로는 (μ, σ) 그림이나 (δ, γ) 그림이 있다. Pearn 외 2인(2002)는 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 를 하나의 그림에 나타내는 C_{pp} 다공정 수행분석차트(multiprocess performance analysis chart(MPPAC))를 제시하였다.

Pearn외 2인(2002)이 제안한 C_{pp} 다공정 수행분석 차트에서는 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 통계적 추론을 위하여 통상적으로 품질특성의 분포를 정규분포로 가정한다. 그러나 품질특성의 분포가 정규분포를 이루지 않는 경우 도 많으므로 품질특성의 분포를 정규분포로 가정할 필요가 없는 방법이 필요하다. 이 때 붓스트랩(bootstrap) 방법을 사용할 수 있다. 공정능력지수에 대한 신뢰구간을 구할 때 붓스트랩 방법으로 해결하려는 시도가 여러 학자에 의하여 계속되고 있다. 가장 최근의 시도로 Chou 외 3인(2006)을 들 수 있다. 본 논문에서는 Pearn외 2인(2002)이 제안한 C_{pp} 다공정 수행분석차트 작성 시 하나의 공정을 평가할 때 n 개의 표본을 대상으로 하나의 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 추정치만을 이용하는 대신 붓스트랩 방법을 이용하여 B 개(B 는 대략 500~1,000개)의 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 추정치들 \widehat{C}_{pp} , \widehat{C}_{ip} , \widehat{C}_{ia} 을 구하고 이 값들을 이용하여 \widehat{C}_{pp} , \widehat{C}_{ip} , \widehat{C}_{ia} 에 대한 붓스트랩분포를 구한 후 이러한 정보를 이용하여 C_{pp} 다공정 수행 분석차트를 작성하는 방법을 제시하고자 한다. Chou외 3인(2006)은 C_{pp} 에 대한 붓스트랩신뢰구간만을 구하였으나 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 그리기 위해서는 세 가지 붓스트랩분포(\widehat{C}_{pp} , \widehat{C}_{ip} , \widehat{C}_{ia} 에 대한 붓스트랩분포)가 필요하게 된다.

2. 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트

2.1 C_{pp} 다공정 수행분석차트

Pearn외 2인(2002)이 제안한 C_{pp} 다공정 수행분석 차트의 작성은 다음과 같이 크게 두 단계로 나뉜다.

(단계 1) C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 점추정을 시행한다.

(단계 2) C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 점추정치를 이용하여 C_{pp} 다공정 수행분석차트에 타점하고 분석을 행한다.

(단계 1)과 (단계 2)를 좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다.

(단계 1)에서 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 추정치를 찾기 위하여 n 개의 품질특성치를 측정하여 그 값을 x_1, x_2, \dots, x_n 이라 하자. 우리는 $C_{ip} = \left(\frac{\sigma}{D}\right)^2$ 에 대한 추정치로서 $\widehat{C}_{ip} =$

$$\frac{s^2}{D^2}$$

을 이용할 수 있다. 여기서 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ 이고 $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ 이다. 또한 우리는 $C_{ia} = \left(\frac{\mu - T}{D}\right)^2$ 에 대한 추정치로서 $\widehat{C}_{ia} = \frac{(\bar{x} - T)^2}{D^2}$ 을 이용할 수 있다.

(단계 2)에서 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 추정치를 이용하여 C_{pp} 다공정 수행분석차트에 타점한 후 C_{pp} 다공정 수행분석차트 보는 방법을 주지하며 분석을 시행한다.

C_{pp} 다공정 수행분석차트 보는 방법은 다음과 같다.

- (1) 타점한 점이 원점(차트의 가운데점)에 가까우면 가까울수록 공정 수행은 점점 좋아진다.
- (2) 반원 형태의 등고선 $C_{pp} = k$ (k 는 $k \geq 0$ 을 만족하는 상수) 안쪽에 타점이 되면 C_{pp} 의 값이 k 보다 작게 되고 $C_{pp} = k$ 바깥쪽에 타점이 되면 C_{pp} 의 값이 k 보다 크게 된다.
- (3) 고정된 $C_{pp} = k$ 에서 좌우 45도 각도 안쪽에 타점이 되면 공정능력은 주로 공정변동에 의한 것이고 좌우 45도 각도 바깥쪽에 타점이 되면 공정능력은 주로 목표값으로부터의 공정 이탈에 의한 것이 된다.
- (4) 타점한 점에서 수평축과 나란히 그어 만들어진 직선과 원점과의 길이가 C_{ip} 가 되고 이 값의 크기가 공정비정밀성의 측도가 된다.
- (5) 타점한 점에서 수직축과 나란히 그어 만들어진 직선과 원점과의 길이가 C_{ia} 가 되고 이 값의 크기가 공정비정확성의 측도가 된다.

C_{pp} 의 판정기준은 다음 <표 2.1>과 같다.

<표 2.1> C_{pp} 의 판정기준

C_{pp} 의 범위	공정능력의 등급
$C_{pp} \geq 9.00$	공정능력이 매우 없음
$4.00 \leq C_{pp} < 9.00$	공정능력이 없음
$1.00 \leq C_{pp} < 4.00$	공정능력이 있으나 부족함
$0.57 \leq C_{pp} < 1.00$	만족함
$0.44 \leq C_{pp} < 0.57$	좋음
$0.25 \leq C_{pp} < 0.44$	매우 좋음
$C_{pp} < 0.25$	탁월함

2.2 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트

Pearn의 2인(2002)이 제안한 C_{pp} 다공정 수행분석차트에서는 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 통계적 추론을 위하여 통상적으로 품질특성의 분포를 정규분포로 가정한다. 그러나 품질특성의 분포가 정규분포를 이루지 않는 경우도 많으므로 품질특성의 분포를 정규분포로 가정할 필요가 없는 방법이 필요하다. 이 때 붓스트랩 방법을 사용할 수 있다. 또한 하나의 공정을 평가할 때 n 개의 표본에 대하여 각각 하나의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 추정치만을 이용하면 $\widehat{C}_{pp}, \widehat{C}_{ip}, \widehat{C}_{ia}$ 에 대한 분포를 알 수 없으므로(품질특성의 분포를 정규분포로 가정할 경우를 제외하고) 우리는 이 때 붓스트랩 방법을 이용하여 대략 500~1,000개의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 추정치들을 구하고 이 값들을 이용하면 $\widehat{C}_{pp}, \widehat{C}_{ip}, \widehat{C}_{ia}$ 에 대한 붓스트랩분포를 알 수 있게 된다.

붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트의 작성은 다음과 같이 크게 두 단계로 나뉜다.

(단계 1) 원 자료에 대하여 붓스트랩 기법을 이용하여 붓스트랩 표본을 만든 후 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 점추정치들을 구하고 $\widehat{C}_{pp}, \widehat{C}_{ip}, \widehat{C}_{ia}$ 에 대한 붓스트랩분포를 구한다.

(단계 2) (단계 1)에서 구한 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 점추정치들을 이용하여 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 그리고 분석을 행한다.

(단계 1)과 (단계 2)를 좀 더 자세히 설명하면 다음과 같다.

단계 1

n 개의 품질특성치 측정값 x_1, x_2, \dots, x_n 을 대상으로 다음과 같이 붓스트랩 방법을 이용하여 $\widehat{C}_{pp}, \widehat{C}_{ip}, \widehat{C}_{ia}$ 에 대한 붓스트랩분포를 구한후 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 구한다.

- (1) n 개의 품질특성치 측정값 x_1, x_2, \dots, x_n 을 모집단처럼 취급하여 이 모집단에서 n 개의 표본을 복원추출로 추출한다.
- (2) (1)에서 생성된 붓스트랩 표본을 이용하여 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 점추정치 $\widehat{C}_{pp}, \widehat{C}_{ip}, \widehat{C}_{ia}$ 을 구한다.

(3) (1)번과 (2)번을 B 번(B 는 통상적으로 500~1,000번) 반복하여 시행한다.

(4) $\widehat{C}_{pp}, \widehat{C}_{ip}, \widehat{C}_{ia}$ 에 대한 붓스트랩분포를 구한다.

(5) C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 구한다.

C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 구하는 방법들 중 많이 사용하는 방법으로서 표준 붓스트랩(standard bootstrap, SB) 신뢰구간, 백분위수 붓스트랩(percentile bootstrap, PB) 신뢰구간, 편의-수정한(bias-corrected) 백분위수 붓스트랩(percentile boots trap, BCPB) 신뢰구간, 편의-수정하고 가속화시킨(bias-corrected and accelerated, BCa) 신뢰구간 등이 있다.

단계 2

(단계 1)에서 구한 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 추정치들을 이용하여 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 그리는 데 세 가지 방법이 있다.

1. B 개의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 추정치들 모두 타점하는 방법
2. B 개의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 추정치들과 이들의 평균과의 Mahalanobis거리를 이용하여 B 개의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 추정치들 중 평균에서 가장 가까운 점들(B 개의 $100(1-\alpha)\%$)만 타점하는 방법
3. C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 신뢰구간을 이용하여 $100(1-\alpha)\%$ 공동신뢰영역을 그리는 방법

(단계 1)에서 구한 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 붓스트랩 점추정치들을 이용하여 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 그리고 분석을 행한다.

붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 그린 후 이 차트를 보며 공정능력을 평가한다. 우리는 하나의 공정이 아닌 여러 개의 공정들을 하나의 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트에 그려 서로 평가하여 볼 수 있다.

3. 수치 예

수치 예를 보기 위하여 다음과 같이 2가지 경우로 나누어 시뮬레이션을 행하였다.

(1) 공정이 다공정이고 각 공정에서 품질특성치의 분포가 정규분포인 경우

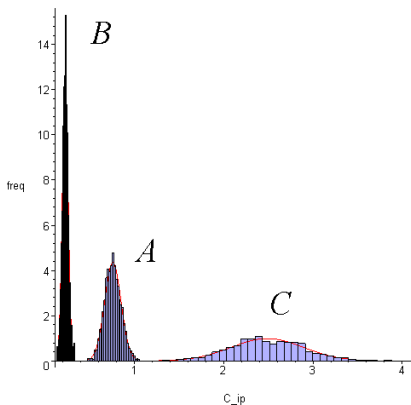
세 가지 공정이 있다고 하고 각 공정은 정규분포를 이룬다고 가정한다. 이 공정의 분포와 규격은 아래 <표 3.1>과 같다.

<표 3.1> 각 공정의 분포와 규격

공정	분포	T	공차(%)	LSL	USL
A	$N(223,3^2)$	220	± 5	209.00	231.00
B	$N(1.99,0.003^2)$	2	± 1	1.98	2.02
C	$N(100.01,0.06^2)$	100	± 0.1	99.90	100.10

품질특성치의 분포가 양쪽 규격의 중앙에 위치하지 않고 한 쪽으로 치우쳐 있는 경우를 고려하지 않고 분석하여 보기로 한다. 각 공정별로 각각 난수 100개를 만든 후 이 들 각각 100개씩의 품질특성치 측정값들을 이용하면 두 단계로 나누어 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행 분석차트를 작성할 수 있다.

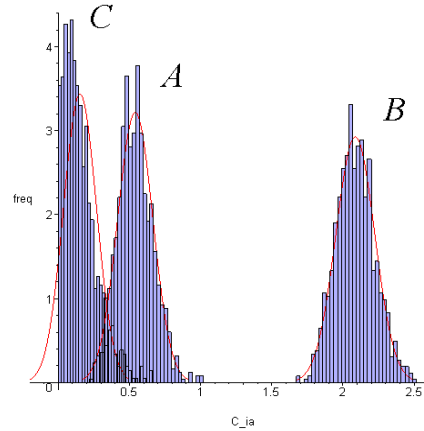
(단계 1)에서 세 가지 공정에 대하여 \widehat{C}_{ip} 붓스트랩분포를 히스토그램으로 그리면 다음 <그림 3.1>과 같다. Pearn와 Lin(2001)은 품질특성의 분포가 정규분포를 이루면 \widehat{C}_{ip} 의 분포가 중심카이제곱분포가 됨을 증명하였는데 우리는 붓스트랩 기법을 통하여 이를 확인할 수가 있다. 공정 C가 상대적으로 평균과 산포 모두 큼을 알 수 있다.



<그림 3.1> \widehat{C}_{ip} 붓스트랩분포(히스토그램)

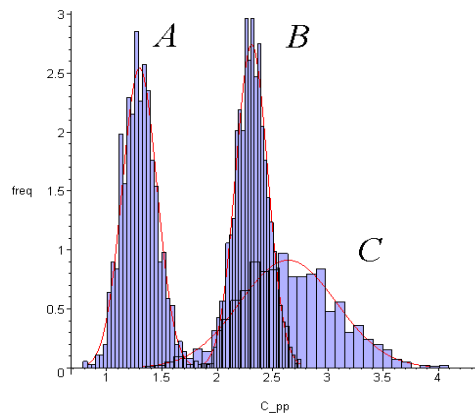
세 가지 공정에 대하여 \widehat{C}_{ia} 붓스트랩분포를 히스토그램으로 그리면 다음 <그림 3.2>와 같다. Pearn와 Lin

(2001)은 품질특성의 분포가 정규분포를 이루면 \widehat{C}_{ia} 의 분포가 비중심카이제곱분포가 됨을 증명하였는데 우리는 붓스트랩 기법을 통하여 이를 확인할 수가 있다. 공정 B가 상대적으로 평균이 큼을 알 수 있다. 공정 C는 오른쪽으로 치우친 비대칭분포를 이룸을 알 수 있다.



<그림 3.2> \widehat{C}_{ia} 붓스트랩분포(히스토그램)

세 가지 공정에 대하여 \widehat{C}_{pp} 붓스트랩분포를 히스토그램으로 그리면 다음 <그림 3.3>과 같다. Pearn와 Lin(2001)은 품질특성의 분포가 정규분포를 이루면 \widehat{C}_{pp} 의 분포가 비중심카이제곱분포가 됨을 증명하였는데 우리는 붓스트랩 기법을 통하여 이를 확인할 수가 있다. 공정 C가 상대적으로 평균과 산포 모두 큼을 알 수 있다.



<그림 3.3> \widehat{C}_{pp} 붓스트랩분포(히스토그램)

세 가지 공정에 대하여 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 95% 붓스트랩 신뢰구간을 백분위수 붓스트랩 신뢰구간으로 구하면

다음 <표 3.2>와 같다. 우리는 붓스트랩 방법을 이용하면 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 하나의 점추정치 대신 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 신뢰구간을 구할 수 있게 되는 것이다.

세 가지 공정에 대하여 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 95% 붓스트랩 신뢰구간을 BCa 붓스트랩 신뢰구간으로 구하면 다음 <표 3.3>과 같다. <표 3.2>에 제시한 95% 백분위수 붓스트랩 신뢰구간보다 신뢰구간의 폭이 모두 작음을 알 수 있어 BCa 붓스트랩 신뢰구간이 백분위수 붓스트랩 신뢰구간보다 더 좋은 신뢰구간임을 알 수 있다.

<표 3.2> 95% 백분위수 붓스트랩 신뢰구간

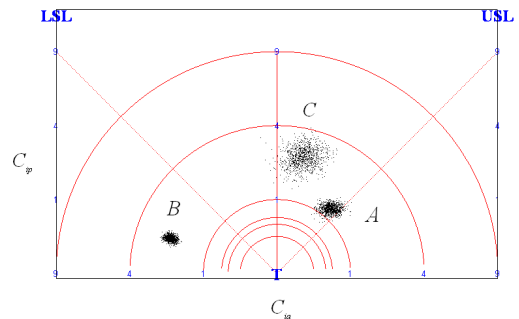
공정	C_{ip}	C_{ia}	C_{pp}
A	(0.417, 0.810)	(0.633, 1.197)	(1.151, 1.889)
B	(0.112, 0.200)	(1.688, 2.136)	(1.853, 2.275)
C	(2.296, 4.039)	(0.00011, 0.299)	(2.279, 4.047)

<표 3.3> 95% BCa 붓스트랩 신뢰구간

공정	C_{ip}	C_{ia}	C_{pp}
A	(0.487, 0.807)	(0.670, 1.156)	(1.254, 1.844)
B	(0.123, 0.198)	(1.725, 2.087)	(1.895, 2.246)
C	(2.483, 3.953)	(0.00025, 0.231)	(2.476, 3.938)

(단계 2)에서 식 (1.2)를 이용하여 세 가지 공정에 대하여 각각 1,000개의 C_{pp} , C_{ip} , C_{ia} 에 대한 붓스트랩 추정치를 모두 타점하는 방법으로 세 가지 공정에 대한 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 그리면 <그림 3.4>와 같다. 세 가지 공정 모두 대부분의 점들이 $C_{pp}=1$ 과 $C_{pp}=4$ 사이에 존재하므로 이 세 공정들은 모두 공정능력이 있으나 부족함을 알 수 있다. 공정능력을 향상시키는 노력이 필요함을 알 수 있다. 공정 A에 대하여는 대부분의 점들이 45° 각도(좌우로 벌어진 점선표시) 직선에 걸쳐 있거나 45° 각도 안쪽으로 약간 치우쳐 있으므로 공정능력을 향상시키기 위하여 공정변동과 공정이탈 양쪽에 가중치를 같이 주거나 공정변동 쪽에 약간의 가중치를 더 주거나 하는 노력이 필요함을 알 수 있다. 공정 B에 대하여는 대부분의 점들이 45° 각도(좌우로 벌어진 점선표시) 바깥쪽에 있으므로

공정능력을 향상시키기 위하여 공정변동과 공정이탈 양쪽 중 공정이탈 쪽에 더 비중을 두어 공정평균이 목표값 T 에 다가가도록 하는 노력이 필요함을 알 수 있다. 공정 C에 대하여는 목표값 T 수직축에 가까이 있으므로 공정능력을 향상시키기 위하여 공정변동과 공정이탈 양쪽 중 공정변동 쪽에 더 비중을 두어 공정변동을 최대한 줄이도록 하는 노력이 필요함을 알 수 있다. 점들로 표현된 C_{ip} 와 C_{ia} 의 붓스트랩결합분포에서 B, A, C 순서로 산포가 커짐을 알 수 있고 공정 C의 산포가 가장 큼을 알 수 있다. 또한 A, B, C 순서로 C_{pp} 가 커짐을 알 수 있다. Pearn외 2인(2002)이 제안한 기준의 C_{pp} 다공정 수행분석차트에서는 A, B, C 세 가지 공정들이 각각 하나의 점으로 표시되어 수행분석이 이루어지나, A, B, C 세 가지 공정들 각각에 대응되는 \hat{C}_{ip} , \hat{C}_{ia} , \hat{C}_{pp} 의 분포를 우리는 알 수가 없다. 반면 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트를 통하여 우리는 \hat{C}_{ip} , \hat{C}_{ia} , \hat{C}_{pp} 의 분포를 알 수 있게 된다.



<그림 3.4> 붓스트랩 C_{pp} 다공정 수행분석차트

(2) 품질특성치의 분포가 비대칭 분포인 경우

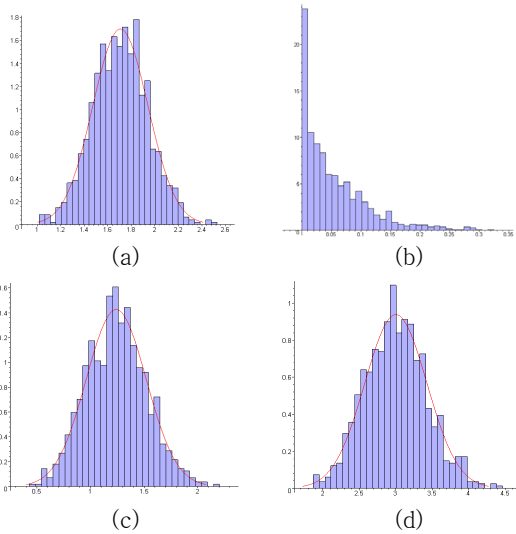
임의의 공정에서 품질특성치의 분포가 정규분포를 따르는 것이 정상이나 여러 가지 이유로 인하여 품질특성치의 분포가 모양모수(shape parameter)가 4이고 척도모수(scale parameter)가 1/965인 감마분포로 바뀌었다고 가정한다. 이 분포는 오른쪽으로 치우친 전형적인 비대칭분포이다. 물론 모양모수와 척도모수를 다양하게 바꾸어 여러 가지 비대칭분포를 만들 수 있다. 이 공정의 규격은 $T=0.005$, $USL=0.01$, $LSL=0$ 이라 하자.

비공정능력지수로서 우리는 식 (1.4)를 사용할 수 있다.

우리는 $C_{ip} = \left(\frac{\sigma}{D^*}\right)^2$ 의 추정치로서 $\widehat{C}_{ip}^* = \frac{s^2}{\widehat{D}^{*2}}$ 을 이용할 수 있고, $C_{ia}^* = \left(\frac{\mu - T}{D^*}\right)^2$ 에 대한 추정치로서 $\widehat{C}_{ia}^* = \frac{(\bar{x} - T)^2}{\widehat{D}^{*2}}$ 을 이용할 수 있다. 또한 $C_{is}^* = \left(\frac{\sqrt{\frac{m_3}{\sigma^3}}}{D^*}\right)^2$ 에 대한 추정치로서 $\widehat{C}_{is}^* = \frac{\left|\frac{m_3}{s}\right|}{\widehat{D}^{*2}}$ 을 이용할 수 있다. 여기서 $\widehat{D}^* = \frac{USL - \bar{x}}{3}$ 이고 $m_3 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n}$ 이다.

난수 100개를 만든 후 이 100개의 품질특성치 측정값들을 이용하여 비공정능력지수들을 구하면 $\widehat{C}_{ip}^* = 1.731$, $\widehat{C}_{ia}^* = 0.037$, $\widehat{C}_{is}^* = 1.283$, $\widehat{C}_{ps}^* = 3.051$ 이다.

우리는 이 100개의 품질특성치 측정값들을 이용하여 두 단계로 나누어 붓스트랩 C_{ps}^* 다공정 수행분석차트를 작성할 수 있다. (단계 1)에서 \widehat{C}_{ip}^* , \widehat{C}_{ia}^* , \widehat{C}_{is}^* , \widehat{C}_{ps}^* 의 붓스트랩분포들을 히스토그램으로 그리면 다음 <그림 3.5>와 같다.



<그림 3.5> 비공정능력지수들의 붓스트랩분포(히스토그램):

(a) \widehat{C}_{ip}^* (b) \widehat{C}_{ia}^* (c) \widehat{C}_{is}^* (d) \widehat{C}_{ps}^*

\widehat{C}_{ip}^* , \widehat{C}_{is}^* , \widehat{C}_{ps}^* 의 분포들은 정규분포를 이루나 \widehat{C}_{ia}^* 의 분포는 오른쪽으로 매우 치우친 비대칭분포임을 확인할 수 있다. 이러한 사실들은 붓스트랩 방법을 통해서 알 수 있게 된 사실이다.

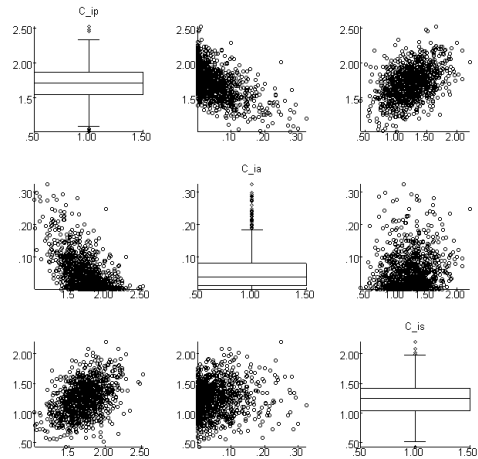
C_{ip}^* , C_{ia}^* , C_{is}^* , C_{ps}^* 에 대한 95% 붓스트랩 신뢰구간을

백분위수 붓스트랩 신뢰구간으로 구하면 다음 <표 3.4>와 같다. 물론 우리는 2절에서 언급한 다른 3가지 종류의 붓스트랩 신뢰구간을 구할 수가 있다. 우리는 붓스트랩 방법을 이용하면 C_{ip}^* , C_{ia}^* , C_{is}^* , C_{ps}^* 에 대한 하나의 점추정치 대신 C_{ip}^* , C_{ia}^* , C_{is}^* , C_{ps}^* 에 대한 신뢰구간을 구할 수 있게 되는 것이다.

비공정능력지수	신뢰구간
C_{ip}^*	(1.2506, 2.1694)
C_{ia}^*	(0.0002, 0.2148)
C_{is}^*	(0.7071, 1.8074)
C_{ps}^*	(2.1990, 3.8855)

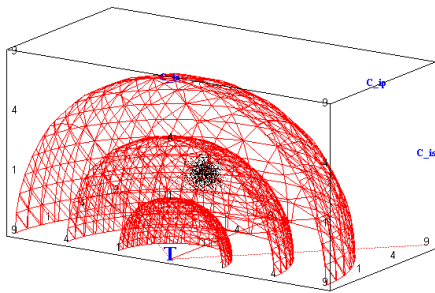
<표 3.4> 95% 백분위수 붓스트랩 신뢰구간

다음 <그림 3.6>은 1,000개의 붓스트랩 추정치를 이용하여 구한 C_{ip}^* , C_{ia}^* , C_{is}^* 에 대한 산점도행렬이다. C_{ip}^* , C_{ia}^* , C_{is}^* 서로 사이에 상관관계가 존재함을 알 수 있다. \widehat{C}_{ip}^* 와 \widehat{C}_{ia}^* 사이의 상관계수는 -0.554, \widehat{C}_{ip}^* 와 \widehat{C}_{is}^* 사이의 상관계수는 0.419 그리고 \widehat{C}_{ia}^* 와 \widehat{C}_{is}^* 사이의 상관계수는 0.119 이었다. 감마분포를 따르는 공정에서는 \widehat{C}_{ip}^* 와 \widehat{C}_{ia}^* 사이의 상관계수가 -0.554이어서 \widehat{C}_{ip}^* 와 \widehat{C}_{ia}^* 가 서로 종속관계를 이룸을 알 수 있다. 이러한 사실들도 붓스트랩 방법을 통해서 알 수 있게 된 사실이다.



<그림 3.6> C_{ip}^* , C_{ia}^* , C_{is}^* 에 대한 산점도행렬

$C_{ip}^*, C_{ia}^*, C_{is}^*$ 에 대한 붓스트랩 추정치를 이용하면 우리는 붓스트랩 C_{ps}^* 다공정 수행분석차트를 그릴 수 있다. 식 (1.4)를 이용하여 $C_{ip}^*, C_{ia}^*, C_{is}^*$ 에 대한 붓스트랩 추정치를 모두 타점하는 방법으로 붓스트랩 C_{ps}^* 다공정 수행분석차트를 그리면 <그림 3.7>과 같다. 대부분의 점들이 $C_{ps}^* = 1$ 바깥에 존재하므로 이 공정은 공정능력이 있으나 부족함을 알 수 있다. 공정능력을 향상시키는 노력이 필요함을 알 수 있다. 그리고 대부분의 점들이 목표값 T 수직축에 가까이 있으므로 공정능력을 향상시키기 위하여 공정변동과 공정이탈 양쪽 중 공정변동 쪽에 더 비중을 두어 공정변동을 최대한 줄이도록 하는 노력이 필요함을 알 수 있다. C_{ps}^* 값은 거의 공정변동을 나타내는 공정비정밀도 지수값 C_{ip}^* 와 왜도에 대한 패널티값 C_{is}^* 으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 공정이 여러 개 있는 경우 우리는 앞에서 설명한 붓스트랩 방법을 사용하여 <그림 3.7>과 같은 붓스트랩 C_{ps}^* 다공정 수행분석차트를 작성할 수 있다.



<그림 3.7> 붓스트랩 C_{ps}^* 다공정 수행분석차트

우리는 앞의 분석에 주의를 할 필요가 있다. 앞의 분석에서는 품질특성치의 분포가 정규분포를 따르는 것이 정상이나 여러 가지 이유로 인하여 품질특성치의 분포가 비대칭분포로 바뀌었을 때 행하는 분석이다. 만일 공정이 비대칭분포를 이루는 것이 자연스러운 현상일 때는 식 (1.4)를 사용하지 말고 식 (1.5)를 사용하여 공정능력을 평가하여야 한다.

4. 결 론

Pearn와 2인(2002)이 제안한 C_{pp} 다공정 수행분석차트에서는 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 에 대한 통계적 추론을 위하여

통상적으로 품질특성의 분포를 정규분포로 가정한다. 그러나 품질특성의 분포가 정규분포를 이루지 않는 경우도 많으므로 품질특성의 분포를 정규분포로 가정할 필요가 없는 방법이 필요하다. 이 때 붓스트랩 방법을 사용할 수 있다. 본 논문에서는 C_{pp} 다공정 수행분석차트 작성 시 하나의 공정을 평가할 때 n 개의 표본을 대상으로 하나의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 추정치만을 이용하는 대신 붓스트랩 방법을 이용하여 B 개(B 는 대략 500~1,000개)의 C_{pp}, C_{ip}, C_{ia} 추정치들을 구하고 이 값들을 이용하여 $\hat{C}_{pp}, \hat{C}_{ip}, \hat{C}_{ia}$ 의 붓스트랩분포를 구한 후 이러한 정보를 이용하여 붓스트랩 C_{ps} 다공정 수행분석차트를 작성하는 방법을 제시하였다. 이러한 붓스트랩 C_{ps} 다공정 수행분석차트를 통하여 우리는 공정들의 수행분석을 행할 수 있을 뿐만 아니라 공정능력지수들의 분포를 알 수 있게 된다.

참고문헌

- [1] 김진수, 김홍준, 전창희(1999), “공정능력 평가를 위한 비공정능력지수의 측도에 관한 연구”, 「대구산업대학교 논문집」, 16권, pp. 533-545.
- [2] 송서일, 이보근(1997), “치우침에 민감한 비공정능력 지수에 관한 연구”, 「동아대학교 부설 생산기술연구소 연구논문집」, 2권, 2호, pp. 101-109.
- [3] 신경식, 김성집, 강창욱(1996), “공정능력의 평가를 위한 개선된 비공정능력지수”, 「품질경영학회지」, 24권, 4호, pp. 90-102.
- [4] Benson, E. D.(1994), “Statistical Properties of a System of Fourth-generation Process Capability Indices $C_{psk}(U, V, W)$ ”, *Ph. D. dissertation, University of Maryland*.
- [5] Chan, L. K., Cheng, S. W., and Spiring, F. A.(1988), “A New Measure of Process Capability: C_{pm} ”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, pp. 162-175.
- [6] Chen, K. L., Chen, K. S., and Li, R. K.(2005), “Suppliers Capability and Price Analysis Chart”, *International Journal of Production Economics*, Vol. 98, pp. 315-327.
- [7] Chen, K. S., Pearn, W. L., and Lin, P. C.(2003), “Capability Measures for Processes with Multiple Characteristics”, *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 19, pp. 101-110.
- [8] Chou, C. Y., Lin, Y. C., Chang, C. L., and Chen,

- C. H.(2006), "On the Bootstrap Confidence Intervals of the Process Incapability Index C_{pp} ", *Reliability Engineering & System Safety*, Vol. 91, pp. 452-459.
- [9] Deleryd, M. and Vannman, K.(1999), "Process Capability Plots-A Quality Improvement Tool", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 15, pp. 213-227.
- [10] Greenwich, M and Jahr-Schaffrath, B. L.(1995), "A Process Incapability Index", *Journal of Quality & Reliability Management*, Vol. 12, pp. 58-71.
- [11] Kane, V. E.(1986), "Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, Vol 18, pp. 41-52.
- [12] Lin, G. H.(2006), "A Bayesian Approach Based on Multiple Samples for Measuring Process Performance with Incapability Index", *International Journal of Production Economics*, Vol 106, pp. 506-512.
- [13] Nahar, P. C., Hubele, N. F., and Zimmer, L. S.(2001), "Assessment of a Capability Index Sensitive to Skewness", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 17, pp. 233-241.
- [14] Pearn, W. L., Kotz, S., and Johnson, N. L.(1992), "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, pp. 216-231.
- [15] Pearn, W. L., Ko, C. H., and Wang, K. H.(2002), "A Multiprocess Performance Analysis Chart Based on the Incapability Index C_{pp} : An Application to the Chip Resistors", *Microelectronics Reliability*, Vol. 42, pp. 1121-1125.
- [16] Pearn, W. L. and Lin, G. H.(2001), "On the Reliability of the Estimated Process Incapability Index", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 17, pp. 279-290.
- [17] Pearn, W. L. and Lin, G. H.(2002), "Estimated Incapability Index: Reliability and Decision Making with Sample Information", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 18, pp. 141-147.
- [18] Pearn, W. L. and Wu, C. W.(2005), "A Bayesian Approach for Assessing Process Precision Based on Multiple Samples", *European Journal of Operational Research*, Vol. 165, pp. 685-695.
- [19] Tang, L. C., Than, S. E., and Ang, B. W.(1997), "A Graphical Approach to Obtaining Confidence Limits of C_{pk} ", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 13, pp. 337-346.
- [20] Vannman, K.(2005), "The Circular Safety Region: a Useful Graphical Tool in Capability Analysis", *Quality and Reliability Engineering International*, Vol. 21, pp. 529-538.
- [21] Wright, P. A.(1995), "A Process Capability Index Sensitive to Skewness", *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Vol. 52, pp. 195-203.
- [22] Wu, C. W.(2008). "Assessing Process Capability based on Bayesian Approach with Subsamples", *European Journal of Operational Research*, Vol. 184, pp. 207-228.

2010년 5월 12일 접수, 2010년 5월 28일 1차 수정, 2010년 6월 8일 2차 수정, 2010년 6월 10일 채택