영재교육연구 제 20 권 제 1 호
Journal of Gifted/Talented Education
2010. Vol 20. No 1, pp. 151~173

확률적 사고 수준과 영재교육

이 경 화

서울대학교

확률적 사고 수준의 의미를 밝히고 이를 고려하여 교육하는 관점에 대한 강조가 국내외 많은 연구자들에 의해 이루어져 왔다. 그러나 국내외 영재교육 연구에서는 확률 영역의 소재를 활용하는 경우가 매우 드물고, 영재아들이 확률적으로 어떤 수준에 있는지, 이를 어떻게 확인하고 교육에 반영할 것인지에 대한 연구도 거의 없다. 이 연구에서는 확률적 사고 수준의 의미를 살펴보고, 영재교육을 통해 확률적 사고 수준과 수준의 상승을 관찰할 수 있는지, 영재교육 담당 교사 연수에 참여한 교사들이 이에 대해 어떻게 파악하는지 알아보았다. 연구 결과, 영재아들은 선행연구에서 제시한 확률적 사고 수준보다 높은 수준을 보였으며, 문제를 해결하면서 수준의 상승을 보였다. 교사들은 확률 과제와 학생들의 반응을 세부적으로 분석하여, 확률 과제를 이용한 영재교육의 의미와 가능성, 관찰평가 방안 등에 대한 인식을 획득하였다.

주제어: 확률적 사고 수준, 영재교육, 확률 과제, 수준의 상승, 관찰평가

I. 서　론

확률 영역에서의 사고 수준을 파악하고 이를 고려하여 교육하는 관점에 대한 강조가 국내외 많은 연구자들에 의해 이루어져 왔다. 많은 연구자들은 확률적 사고가 수학적 사고와 다르다고 주장해왔다(Fischbein, 1975; Fischbein

---

교신저자: 이경화(khmath@snu.ac.kr)
* 이 연구는 서울대학교 신임교수 연구정착금으로 지원되는 연구에 의하여 수행되었음.

& Schnarch, 1997; Green, 1986; Jones, Langrall, Thornton, & Mogill, 1997; Shaughnessy, 1992, 2003; Tarr & Jones, 1997). 이들은 수학적 사고가 결정론적 관점을 가지는 반면, 확률적 사고는 비결정론적 관점을 가지기 때문에 오개념에 노출되기 쉽다고 주장하였다. 최종덕(1995)은 이를 우연 현상의 특징에서 비롯되는 것으로 설명하였다. 우연 현상은 규칙보다는 불규칙에 기초하기 때문에 수학의 전통적인 사고 방법인 연역보다는 귀납에 의해 다루어지는 것이 적절하다는 것이다. Fischbein과 Schnarch(1997)은 기존의 수학 학습에서 필요로 하지 않았던 새로운 직관, 곧 비결정론적이고 비인과론적인 사고에 의존하는 직관을 필요로 하기 때문에, 확률에서의 학습이 어려움에 처할 수 있다고 주장한다. 그러나 모호한 현상을 해석하고 비형식적인 추론에 근거하여 추측을 생성하고 정당화하는 경험은 수학적 발견의 가장 큰 원동력이므로 (Byers, 2007), 우연 현상에서 출발하여 확률적인 사고를 발전시키면서 정당화와 형식화에 이르도록 하는 것은 수학영재교육의 좋은 모델이 될 수 있다.

그 동안 수학 영재들을 교육하고 그 사례를 분석하여 영재아들의 수학적 사고 특성을 보고한 연구가 지속적으로 제시되어 왔다(김지원, 2003; 나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌, 2007; 박은정, 2006; 송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원, 2007; 이경화, 최남광, 송상헌, 2008). 그러나 나귀수 외(2007)를 제외한 대부분의 연구가 기하와 대수 영역의 소재를 이용하여 교육한 것이며, 확률 영역의 소재를 활용한 사례는 매우 드물다. 이 연구에서는 확률 영역의 과제를 활용하여 영재아를 교육할 때 어떤 특성을 발견할 수 있는지, 특히, 비결정론적인 관점을 어떻게 발전시키는지, 확률적 사고 수준의 상승을 관찰할 수 있는지 살펴본다. 또한, 영재교육을 담당하는 교사들이 학생들의 활동 자료를 분석하여 확률적 사고 수준의 향상을 어떻게 파악하고 기술하는지 등을 살펴본다.

II. 영재아들의 확률적 사고 수준

이 절에서는 확률적 사고 수준에 대한 선행 연구 결과를 살펴보고, 영재아를 위한 확률적 사고 수준에 대하여 논의한다. 이어서 서울 지역의 한 대

학부설 영재교육원 학생들 6명(이하 S1부터 S6까지로 표시)의 확률 과제 해결 양상, 특히, 확률적 사고의 수준이 어떻게 향상되는지 분석한 결과를 제시할 것이다. 이 연구에 참여한 학생들은 모두 중학교 3학년이었으며, 이 연구를 위하여 개발한 확률 과제에 대해 4시간 동안 탐구하였다. 영재아들의 확률적 사고 수준과 문제 해결에 따른 수준의 향상을 관찰하기 위하여 <부록>에 제시한 과제를 개발하였다[1]. 이 과제를 해결하는 과정에서 학생들이 적절한 수치적 모델을 생성하고 적용하여 문제를 해결하는지, 수준의 상승에 해당하는 반응이 있는지 살펴보았다. 특히, Jones 외(1997)가 제시한 표본공간, 사건의 확률에 대한 이해 수준을 중심으로 자료를 수집하고 분석하였다. 연구자는 수업을 진행하면서 학생들이 가능한 한 자세하게 사고 과정을 기록하도록 하였으며, 모든 활동지를 수집하여 분석하였다. 영재성의 발현을 심층적으로 관찰하기 위하여 학생들의 문제 해결 활동은 녹화하여 분석하였다(Assouline, 1997; Birch, 1984; Hekimoglu, 2004).

1. 확률적 사고 수준 관련 연구

확률적 사고 수준에 대한 연구는 확률 개념 형성 또는 발달과 관련하여 이루어졌다. Piaget와 Inhelder(1975)는 우연과 필연의 구분, 비율 추론을 거쳐, 조합, 치환 등에 대하여 이해하면서 확률 개념을 발달시키며, 치환의 의미를 알고 적용하는 단계에서 높은 수준의 확률적 사고를 할 수 있게 된다고 주장하였다. 이는 조합 추론에 기초한 확률 교육의 배경이 되었으며, 높은 수준의 확률적 사고는 높은 수준의 조합 추론 능력과 밀접하게 관련된다. Fishbein(1987)은 일차적 직관과 이차적 직관이라는 용어에 의하여, 자연발생적인 확률 직관과 교육의 결과로 형성한 확률 직관을 구분하였다. 이에 따라 적절한 이차적 직관을 개발하는 것이 확률적 사고의 수준을 향상시키는 중요한 도구로 부각되었다. Jones 외(1997)는 표본공간, 사건의 확률, 확률 비교, 그리고 조건부 확률에 대한 이해 수준을 1수준부터 4수준까

1) <부록>의 과제는 서울대학교 수학교육과 대학원 박사 과정에 재학 중인 오택근, 이동환과 함께 개발하였으며, 필자가 직접 수업을 진행하고 관찰하였다.

지로 각각 구분한 후[2]), 수치적인 모델을 이용하여 각각의 개념을 명확하게 이해하고 적용하는 4수준을 가장 높은 수준으로 보았다. 이는 확률적인 문제 상황에서 직관적이고 비수학적인 판단 근거를 이용하여 다양한 오개념 또는 오류를 만들어낸다는 Kahneman, Slovic, Tversky(1982)의 연구 결과와 일맥상통하는 결과이다. 학생들은 주관적인 판단에서부터 출발하여 다양한 확률적 사고를 발달시키며, 수치적인 모델을 이용할 수 있게 되면 가장 높은 확률적 사고 수준에 도달하는 것으로 보는 것이다.

확률적 사고의 특성과 수준을 구분하고 이를 교육에 활용하려는 연구들(Borovcnik & Bentz, 1991; Byrnes & Beilin, 1991; Tarr & Jones, 1997; Jones et al., 1997; Watson & Moritz, 2002)에서는 먼저 수준을 평가하는 틀을 개발하여, 다양한 연령의 학생들에게 적용하였다. 그러나 영재아들을 대상으로 확률적 사고 수준 평가틀을 개발하여 적용한 연구는 없었다. 국내에서는 나귀수 외(2007)에서 Jones 외(1997)가 구분한 조건부 확률에 대한 이해 수준 평가틀을 수정하여 적용한 사례가 보고된 바 있다. 이 연구에서는 사건의 독립과 종속 자체의 깊은 의미보다는 비복원 추출에 대한 이해만으로 제한한 평가틀 때문에 영재아들의 조건부 확률 사고 수준을 관찰하기 어려운 측면이 있다고 보았다. 그러므로 선행 연구에서 제시한 평가틀을 보완한 영재아용 확률적 사고 수준 평가틀을 개발하여 적용하려는 시도가 필요하다. 무엇보다 영재아들이 기존 연구에서 제시한 가장 높은 수준의 사고를 하는지 확인하고, 만약 그 이상의 수준에 해당하는 사고 특성을 관찰하거나 그것을 위하여 노력한다면 어떻게 할 수 있는지 살펴보고자 한다. 특히 영재교육을 담당하는 교사들이 기존에 개발된 평가틀을 벗어나는 반응을 관찰할 때, 이를 영재성 판별과 관련지어 어떻게 해석할 수 있는지 그리고 어떤 점에 유의하는 것이 필요한지 알아보려고 한다.

기존의 확률적 사고 수준 평가틀에서 제시하는 가장 높은 수준은 수치적

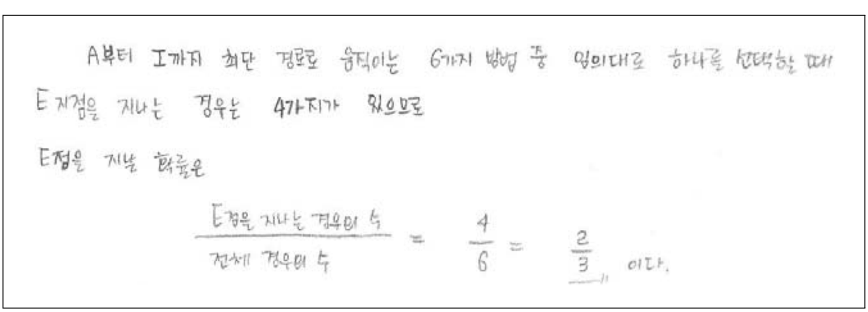
2) 표본공간, 사건의 확률, 확률 비교, 조건부 확률 각각에 대하여 다음 4개의 수준을 구분하여 제시하였다: 1수준은 주관적인(subjective) 확률적 사고, 2수준은 이행적인(transitional) 확률적 사고, 3수준은 비형식적인 양적(informal quantitative) 사고, 그리고 4수준은 수치적인(numerical) 확률적 사고라고 불린다.

모델을 사용하여 추론한다는 것이었다(Tarr & Jones, 1997; Jones et al., 1997). 이는 신피아제주의에 따른 발달 단계 또는 수준 이론의 관점에 의한 것(Biggs & Collis, 1991)으로 볼 수 있으며, 관계적 지식을 형성하고 이에 근거하여 새로운 지식을 생성하는 추론 능력의 획득과도 관련된다. 그런데 van Hiele의 기하 학습 수준 이론에서 가장 높은 수준은 서로 다른 공리 체계를 이해하는 단계(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2006)라는 것을 고려하면, 확률적 사고 수준과 관련해서도 수치적 모델을 사용하여 추론하는 것에 그치지 않고, 그 이상으로 나아갈 수 있음을 예측할 수 있다. 다음 절에서 영재아들의 반응을 토대로 이에 대하여 논의할 것이다.

2. 영재아들의 초기 확률적 사고 특성과 수준

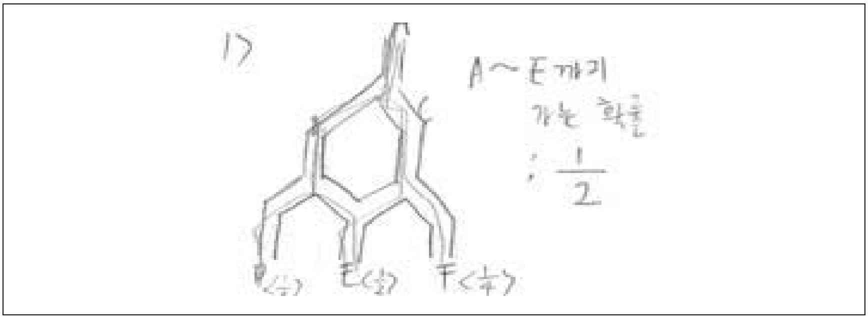
<부록>에 제시한 7개 문항에 대한 반응과 토론 내용을 토대로 영재아들의 확률적 사고 특성과 수준을 파악할 수 있었다. 특히, 문항 1에 대한 반응은 영재아들의 초기 확률적 사고 수준을 보여주었다. S2, S3를 제외한 4명의 학생들은 [그림 1]에 제시한 바와 같이 고전적 관점에 따른 확률의 정의, 곧 경우의 수의 비율이라는 수치적 모델을 적용하여 문제를 해결하였다. 이는 Jones 외(1997)가 제시한 4수준에 해당하는 사고 특성을 보인 것으로 볼 수 있다.

나머지 학생들과 다르게 S2, S3은 처음부터 다른 방식으로 확률을 계산


A부터 I까지 최단 경로로 움직이는 6가지 방법 중 임의대로 하나를 선택할 때
E지점을 지나는 경우는 4가지가 있으므로
E점을 지날 확률은

$$\frac{\text{E점을 지나는 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ 이다.}$$

[그림 1] S1의 1-(3) 문항에 대한 반응



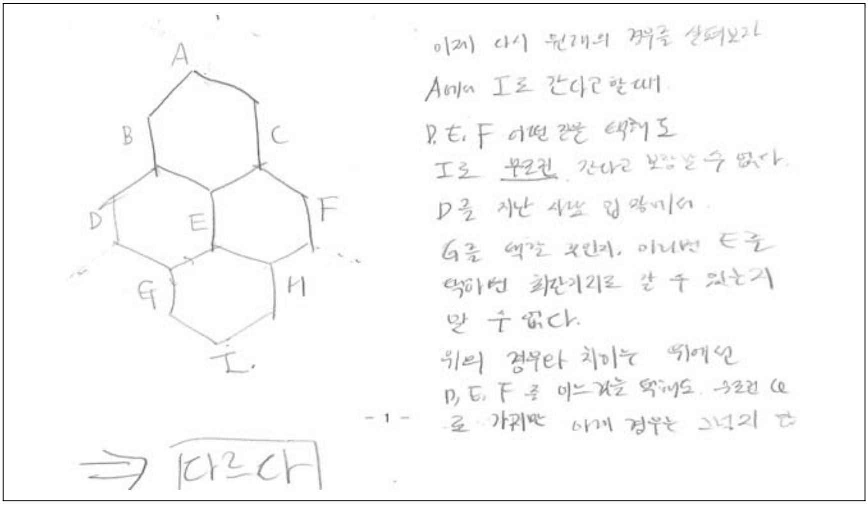
[그림 2] S2의 1-(3) 문항에 대한 반응 일부

할 수 있을 것이라고 생각하였다. 예를 들어, S2는 [그림 2]와 같이 생각하면 $\frac{1}{2}$로 계산될 수 있다고 생각하였으며, $\frac{2}{3}$가 될 수 있는 경우에 대해서도 설명하려고 노력하였다.

S3의 경우에도, 확률값을 할당하는 방법이 유일하지 않다는 것에 주목하였으며, 단순하게 $\frac{2}{3}$가 정답이라고 말할 수 없다고 주장하였다. 처음에 소극적으로 토론에 참여하였던 학생들은 S3에게 보충 설명을 요구하면서 적극적으로 어떤 것이 정답인지 알아내고자 하였다.

3. 영재아들의 반성적 사고와 토론에 의한 수준의 상승

2번 문항은 1번 문항을 해결하는 과정을 되돌아보도록 하는 것이었다. 이미 $\frac{2}{3}$가 아니라 다른 확률값이 가능할 수도 있다고 생각한 학생들이 많아졌고, 다른 학생들의 생각을 확인하면서 토론하도록 하였기 때문에 다양한 반응을 공유하게 되었다. 예를 들어, S4는 [그림 3]과 같이 문항 1에서 구한 6개의 경로를 선택할 확률이 모두 같다고 할 수 없음을 주장하고, 문항 1의 답과는 다른 확률값을 부여해야 한다고 주장하였다. 수치적 모델에 따라 확률값을 구하였지만, 이 때 기본적으로 각각의 경로를 선택할 확률이 모두 같다는 것, 곧 등확률성을 가정하였다는 점이 핵심적인 논점으로 떠올랐다. 영재아들은 6개의 경로에 부여되는 확률값이 동등하지 않다면 확률값



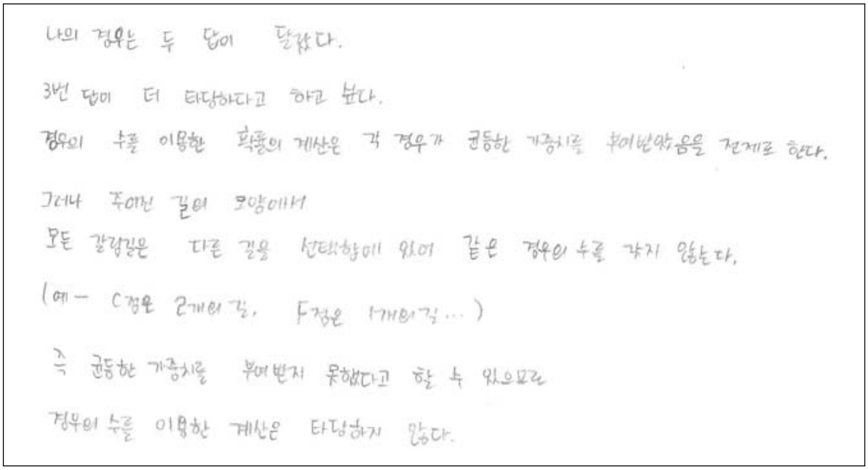
[그림 3] S4의 2번 문항에 대한 반응 일부

을 새로이 부여해야 함을 인식하고, 이를 위하여 확률의 공리에 해당하는 측면을 깊이 논의하는 모습을 보였다.3)

문항 2는 “문항 1에서 구한 각각의 경로를 선택할 확률은 모두 같은가?” 라는 매우 간단한 질문으로 구성되어 있다. 이는 영재아들이 무심코 채택하였던 고전적 관점에 따른 확률값을 대상으로 반성적인 사고를 하게 하였다. S1은 이러한 의도를 명확하게 파악하고 “앞서 나온 답 $\frac{2}{3}$는 각 경로를 선택할 확률이 같다는 전제 조건을 적용시킨 다음에 나온 것”이라고 주장하였다. 전제 조건을 어떻게 정하는가에 따라 다른 확률값이 나올 것이라는 점, 곧 확률값을 부여하는 여러 가지 방법이 가능하다는 것을 명확하게 설명하는 학생들 모습이 관찰되었다.

4번 문항은 앞서 확인한 두 확률값이 서로 다른 이유를 타당하게 설명하

3) 확률의 공리적 관점은 S가 표본공간, A는 사건을 나타낸다고 할 때, 다음 세 가지 공리가 만족되도록 P[A]를 할당할 수 있어야 한다고 가정하는 접근을 가리킨다. 첫째, $0 \leq P[A] \leq 1$이어야 하고, 둘째, $P[S]=1$이어야 한다. 셋째, 만약 A와 B가 동시에 일어날 수 없는 사건이라면, P[A 또는 B]=P[A]+P[B]이어야 한다(이경화, 1996).



나의 경우는 두 답이 달랐다.

3번 답이 더 타당하다고 하고 싶다.

경우의 수를 이용한 확률의 계산은 각 경우가 균등한 가중치를 부여받았음을 전제로 한다.

그러나 주어진 길의 모양에서

모든 갈림길은 다른 길을 선택함에 있어 같은 경우의 수를 갖지 않는다.

(예 - C점은 2개의 길, F점은 1개의 길 ...)

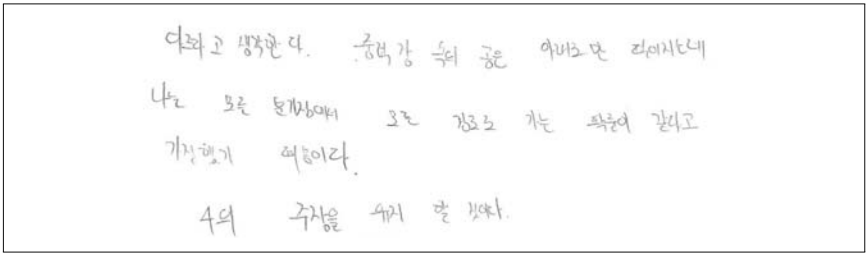
즉 균등한 가중치를 부여받지 못했다고 할 수 있으므로

경우의 수를 이용한 계산은 타당하지 않다.

[그림 4] S1의 4번 문항에 대한 반응

도록 한 것이었다. 영재아들은 [그림 4]와 같이 표본공간을 어떻게 구하고, 서로 다른 사건이 일어날 가능성의 크기를 어떻게 정해야 하는지에 대한 보다 분명한 설명을 시도하였다. 이때 “가중치”, “균등한”, “주어진 길의 모양”, “경우의 수를 이용한 확률의 계산” 등 설명을 위하여 다양한 의미 있는 표현들을 사용하였다. 현재 학교수학의 확률 단원에서는 다른 분야에 비하여 증명 또는 정당화를 거의 경험하지 못한다. 영재아들에게는 확률을 구한 과정이나 확률 계산 과정에 대하여 정당화를 요구할 수 있으며, 이를 통하여 학교수학에서는 경험하지 못한 증명 또는 정당화 경험을 강화할 수 있다. 이때 앞서 제시한 바와 같은 의미 있는 표현들을 얼마나 적절하게 연결하여 사용하는지에 따라 확률적 사고 수준이 다르다고 할 수 있다.

영재아들은 확률적 사고 과정에서 자신이 택한 모델의 의미를 지속적으로 탐구하고, 새로운 상황에 비추어 재해석하면서 발전시키는 모습을 보였다. 예를 들어, [그림 5]와 같이 “중력장 속의 공”이 떨어지는 상황과 “모든 분기점에서 모든 경로로 가는 확률이 같은 상황”을 구별하고, 둘 사이에 어떤 차이가 있는지 설명하려고 노력하면서 자신이 처음에 제기한 주장이 성립하는 조건을 명확하게 하였다. 이러한 특성은 하나의 관점에 고착되는 현



[그림 5] S6의 6번 문항에 대한 반응

상처럼 보일 수 있으나, 실제로는 새로운 모델이나 주장을 단순하게 받아들이지 않고, 확산적이면서도 정교한 사고를 가능하게 하는 원동력으로 볼 수 있다.

III. 학생들의 문제해결 활동과 확률적 사고 수준에 대한 교사들의 해석

영재아들의 확률적 사고 수준을 발전시키려면 교사의 역할이 매우 중요하다. 이하에서는 앞서 제시한 학생들의 문제해결 활동과 확률적 사고의 수준에 대한 교사들의 해석을 살펴본다. 서울시 소재 대학에서 실시한 영재교육 담당 교사연수에 참여한 교사 12명의 반응을 분석한다. 교사들은 2인씩 짝을 지어 의견을 주고받으면서 과제의 내용과 특징을 분석하였고, 학생들

◦ 직접 문제를 해결하면서 문제의 성격을 파악함 ◦ 해결 과정 예측	→	◦ 녹화된 수업 장면을 함께 보면서 예측한 반응과 비교함 ◦ 자신이 직접 해결한 내용과 활동지에 기록된 학생들의 반응을 비교함	→	◦ 각 문항의 지도 목표, 언어 표현, 타당성을 분석함 ◦ 영재교육용 과제로서의 적합성 분석
문제 해결		학생들의 반응 분석		과제 분석

[그림 6] 교사들이 영재교육 담당 교사 연수에 참여한 내용

의 활동 모습을 녹화한 자료와 활동지를 분석하였다([그림 6] 참고).

1. 영재교육에 대한 교사들의 인식

영재교육 연수에 참여한 교사들이 영재교육을 위한 수업과 과제의 성격에 대해 어떤 생각을 가지고 있는지 조사하여 <표 1>과 <표 2>로 나타내었다. 제시된 관점에 대하여 매우 적절하다고 생각하면 5점으로, 매우 부적절하다고 생각하면 1점으로 하는 5단계 척도를 따라 표현하게 하였다. <표 1>에 제시된 바와 같이, 수업 모델에 대해서는 교사의 역할보다 학생의 역할을 강조하는 관점을 지지하였다. 교사가 문제의 의미와 해결 과정을 설명하는 방식에 대해서는 부정적인 의견이었으며(M=2.29), 학생과 학생 사이의 토론 기회를 제공하고, 발표와 비평 기회를 제공해야 한다는 것에 대하여 가장 긍정적으로 생각하였다(M=4.79). 논리적 추론 과정, 수학적 정당화 과정의 중요성과 필요성을 인식하고 찾아내도록 하는 것(M=4.71), 문제 해결에 필요한 수학적 지식, 추론 요소 등을 찾아내도록 기회를 주고, 필요할 때 교사가 도와야 한다는 것(M=4.64), 학생 스스로 문제의 의미와 해결 과정을 설명하는 방식(M=4.43)에 대해서도 매우 긍정적으로 생각하고 있었다.

<표 1> 수업 모델에 대한 교사들의 인식

	수업 모델 관련	M	SD
교사 역할	교사가 문제의 의미와 해결 과정을 설명하는 방식으로 진행해야 한다.	2.29	0.73
	교사가 문제 해결에 필요한 수학적 지식, 추론 요소 등을 설명하는 것으로 시작해야 한다.	2.50	0.85
	교사가 논리적 추론 과정, 수학적 정당화 과정을 제시해야 한다.	2.86	0.95
학생 역할	학생 스스로 문제의 의미와 해결 과정을 설명하는 방식으로 진행해야 한다.	4.43	0.51
	학생들이 문제 해결에 필요한 수학적 지식, 추론 요소 등을 찾아내도록 기회를 주고, 필요할 때 교사가 도와야 한다.	4.64	0.63
	학생들이 논리적 추론 과정, 수학적 정당화 과정의 중요성과 필요성을 인식하고 찾아내도록 기회를 제공해야 한다.	4.71	0.47
	학생과 학생 사이의 토론 기회를 제공하고, 발표와 비평 기회를 제공해야 한다.	4.79	0.63

<표 2> 과제의 특성에 대한 교사들의 인식

과제 특성 관련		*M*	*SD*
수준	상위 수준의 수학을 지도해야 한다.	2.79	0.97
	고난도 복합 과제를 다뤄야 한다.	2.71	0.73
추론	이미 알고 있는 수학을 새로운 관점에서 볼 수 있게 해야 한다.	4.64	0.84
	다양한 추론 요소를 경험하도록 해야 한다.	4.71	0.47
표현	다양한 표현 방식을 개발하고 적용하도록 해야 한다.	4.64	0.63

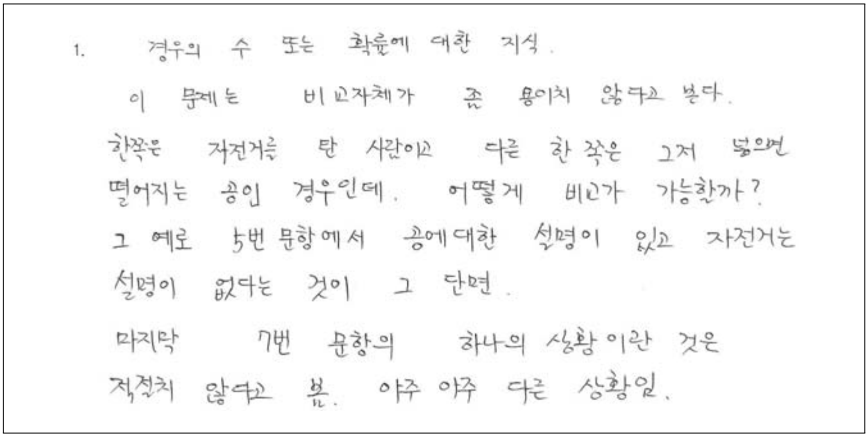
그러므로 영재교육 담당 교사들이 학생들의 활동과 토론을 중심으로 수업하는 것을 지지하고 있음을 알 수 있다.

<표 2>에 제시한 바와 같이, 교사들은 영재교육을 위한 과제로 상위 수준의 수학(M=2.79)이나 고난도 복합 과제(M=2.71) 형태는 적절하지 않다고 생각하였다. 그러나 다양한 추론 요소를 경험하도록 하고(M=4.71), 이미 알고 있는 수학을 새로운 관점에서 볼 수 있게 하며(M=4.64), 다양한 표현 방식을 개발하고 적용하도록 해야 한다(M=4.64)는 관점에 대해서는 매우 긍정적인 태도를 보였다.

요약하면, 교사들은 영재교육을 위한 수업 모델로 교사보다는 학생들의 참여에 기반하는 것을, 영재교육을 위한 과제로는 상위 수준의 과제 또는 고난도 복합 과제보다는 관점의 전환과 추론, 표현의 유창성을 기를 수 있는 과제를 지향하고 있음을 알 수 있다. 이는 영재성과 창의성을 기르기 위하여 반드시 필요하다고 강조되어 온 관점이다(송상헌, 2000; Sheffield, 1999).

2. 과제 및 영재아들의 반응에 대한 교사들의 분석

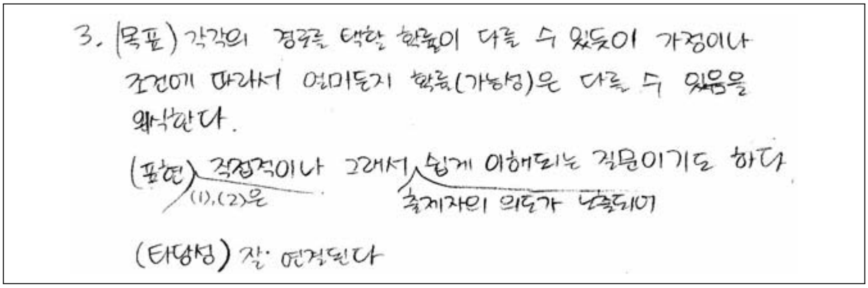
앞서 확인한 바에서 알 수 있듯이 교사들은 학생들의 참여와 토론에 의하여 수업할 수 있는 과제를 개발하는 것에 대한 관심이 높았다. 그러나 막상 <부록>의 과제를 제시하고 직접 해결하도록 하였을 때, 학생들의 참여와 토론이 어느 장면에서 어느 정도로 관여되도록 해야 할지에 대하여 고민하였다. 1번 문항의 경우, 처음에는 12명 중 11명의 교사들이 “영재교육


1. 경우의 수 또는 확률에 대한 지식.
이 문제는 비교자체가 좀 용이치 않다고 본다.
한쪽은 자전거를 탄 사람이고 다른 한 쪽은 그저 놓으면
떨어지는 공인 경우인데. 어떻게 비교가 가능한가?
그 예로 5번 문항에서 공에대한 설명이 있고 자전거는
설명이 없다는 것이 그 단면.
마지막 7번 문항의 하나의 상황이란 것은
적절치 않다고 봄. 아주 아주 다른 상황임.

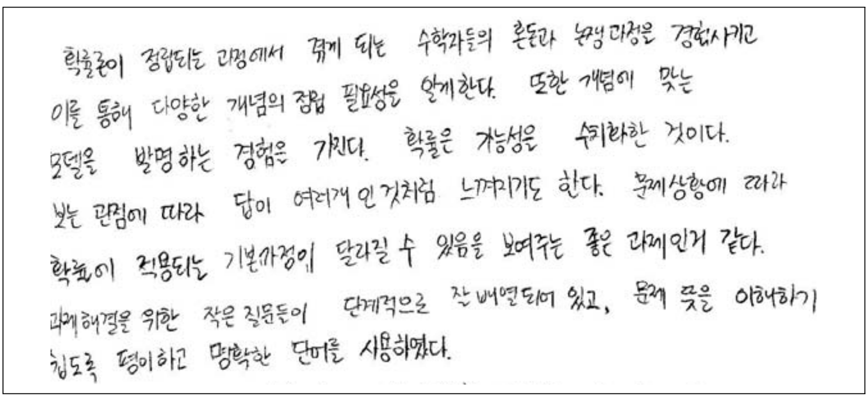
[그림 7] T1의 확률 과제 분석

을 위한 과제로 보기에는 너무 평범해 보인다", "1-(1)만으로 학생들이 문제를 해결할 수 있는지 확인할 수 있는데, 왜 1-(2)와 1-(3)을 제공하는지 모르겠다" 등의 반응을 보였다. 고전적 관점에 의해서 확률을 구한다는 것이 어떤 의미가 있는지, 어떤 가정을 하고 있으며, 어떤 점에서 논란의 여지가 있는지를 묻기 위한 질문이라는 것을 인식하지 못하였다. 2번 문항을 제시하였을 때, 영재아들은 $\frac{2}{3}$가 아닌 다른 확률값을 구할 수 있으리라는 새로운 관점으로 바로 전환된 것에 비하여 교사들은 새로운 관점의 필요성을 인식하지 못하였다. [그림 7]에 나타난 바와 같이, 과제 전체를 다 해결하고도 문제의 기본 가정을 비교한다는 것이 무슨 뜻인지 전혀 파악할 수 없다고 생각하기도 하였다. 새로운 관점을 찾아본 경험이 전혀 없는 상태에서 영재아들에게 관점의 전환을 경험하도록 하기는 매우 어렵다는 것을 시사한다.

자전거로 이동하는 상황과 공을 떨어뜨리는 상황을 비교하는 3번과 4번 문항을 해결하면서 75%의 교사들은 확률을 구하는 과정에서 숨겨진 가정이 있었음을 명확하게 인식하였다([그림 8] 참고). 그럼에도 불구하고 여전히 $\frac{2}{3}$만을 정답으로 인정해야 한다는 의견을 고수하는 교사도 있었다. 공을


3. (목표) 각각의 경우를 택할 확률이 다를 수 있듯이 가정이나
조건에 따라서 얼마든지 확률(가능성)은 다를 수 있음을
인식한다.
(표현) 직접적이나 그래서 쉽게 이해되는 질문이기도 하다
(1),(2)은 출제자의 의도가 노출되어
(타당성) 잘 연결된다

[그림 8] T2의 3번 문항 분석


확률론이 정립되는 과정에서 겪게 되는 수학자들의 혼돈과 논쟁과정을 경험시키고
이를 통해 다양한 개념의 정립 필요성을 알게한다. 또한 개념에 맞는
모델을 발명하는 경험을 가진다. 확률은 가능성을 수치화한 것이다.
보는 관점에 따라 답이 여러개 인 것처럼 느껴지기도 한다. 문제상황에 따라
확률이 적용되는 기본가정이 달라질 수 있음을 보여주는 좋은 과제인거 같다.
과제해결을 위한 작은 질문들이 단계적으로 잘 배열되어 있고, 문제 뜻을 이해하기
쉽도록 평이하고 명확한 단어를 사용하였다.

[그림 9] T3의 과제 분석

떨어뜨리는 경우 $\frac{1}{2}$의 확률을 가지게 된다는 것은 인정하였지만 두 문제 상황의 어떤 차이가 이렇게 다른 확률값을 가지게 하는지 설명하지 못하였고, 그러므로 두 확률값을 고려하는 것은 위험하다고 생각하였다.

최종적으로 12명 중 11명의 교사들은 과제가 열린 사고를 자극하고, 자신만의 추측과 정당화를 요구한다는 점에 주목하여 유용하다고 하였다. 이 특성 때문에 영재아들을 적극적인 참여와 토론으로 이끌 수 있다는 것에 대해서도 인식하였다([그림 9] 참고). 이것이 가능하게 된 주된 원동력은 “하나의 답으로 이끌기 보다는 주어진 문제 상황의 특징을 도출하게 하고, 상황의 미묘한 차이가 문제의 해결에 큰 차이를 일으킬 수 있음을 깨닫게

하는 과제”라고 설명하기도 하였다. 상위 수준의 과제나 고난도 복합 과제가 아니면서, 관점의 전환을 가능하게 하고, 알고 있는 지식을 총 동원하여 추론하게 하는 과제라고 분석하기도 하였다.

교사들은 실제로 영재아들을 대상으로 수업한 장면을 보고 학생들의 활동지를 세부 분석하면서 더욱 놀라움을 표현하였다. 특히, 1번 문항을 해결하면서 벌써 전제 조건을 바꾸면 다른 확률값이 가능할 것이라고 예측하는 학생의 설명에 “뛰어난 영재아들의 통찰을 미처 파악하지 못하고 놓칠 수 있다”고 말하기도 하였다. “일회성 시험이 아니라 오랜 관찰에 의하여 영재성을 파악해야 하는 이유를 깨달았다”라는 소감을 말하기도 하였다. 이 때문에 교사가 어떤 역할을 해야 학생들의 통찰을 자유롭게 드러내고 문제의 해결에 활용하도록 할 것인가에 대한 토론이 활발하게 진행되었다. “과제가 제공하는 풍부한 사고의 기회를 여유롭게 사용하면서, 영재아들 사이의 상호 비평을 권장하는 것”이 이에 대한 결론으로 도출되었다

영재교육을 담당하는 교사들이 영재아들이 통찰하는 내용을 이해하지 못하는 것은 구체적인 내용에 관련된 영재아들의 사고 특성 또는 행동 특성에 대해서 잘 모르고 있음을 드러낸다. 특히, 교사들 자신이 확률 영역의 다양한 과제를 해결한 경험이 거의 없기 때문에 영재아들의 확률 과제 해결 양상과 사고 과정을 이해하지 못할 가능성이 높다. 영재아들은 수학자가 될 수도 있지만 다른 학문 분야로 진출할 가능성이 매우 높으므로, 여러 분야의 배경 지식과 소양이 될 수 있는 확률적 사고를 경험하게 하고 그 수준을 향상시키도록 노력할 필요가 있다.

IV. 논의 및 결론

이 연구에서는 확률 영역의 과제를 개발하여 영재교육을 실시하고, 영재아들의 반응과 영재교육 담당 교사들의 반응을 분석하였다. 이를 통하여 다음과 같은 논의점과 결론을 얻을 수 있다. 첫째, Jones 외(1997)을 비롯한 확률적 사고 수준 관련 연구에서 제공하는 기준만으로는 영재아들의 확률적 사고 수준을 파악하기 어렵다. 가장 높은 수준에 해당하는 사고 특성으

로 수치적 모델을 이용하여 확률을 구하는 것이 제시되는데, 이 연구에 참여한 영재아들은 단지 수치적 모델을 이용하여 연역적인 추론을 하는 것에 그치지 않았다. 영재아들은 고전적 관점에 의하여 확률을 구하는 과정에서 등확률성을 가정하는데, 문제 상황에 따라서 등확률성이 만족되지 않을 수 있음을 인식하였다. 이에 따라 주어진 문제 상황에 포함된 기본 가정을 해석하여 새로운 확률값을 부여하는 모습을 보였다. 이는 van Hiele의 기하 학습 수준 이론에서 공리 체계를 이해하는 수준(김남희 외, 2006)과 유사하며, 기존의 확률적 사고 수준 관련 이론에서는 고려하지 않았던 것으로 보인다. 확률론의 역사에서 최후 단계로 기술되는 확률에 대한 공리적 관점에 따르면, 확률을 어떻게 구하고 어떤 의미를 가지는가보다, 확률의 공리를 만족하도록 확률값을 할당할 수 있기만 하면 각각의 상황에서 확률에 의하여 문제를 해결할 수 있다(이경화, 1996). 앞서 논의한 영재아들의 반응은 확률에 대한 공리적 관점과 매우 유사하며, 단지 고전적 관점에 입각하여 확률값을 구한 것과는 구분된다. 이러한 점에서 영재아들의 확률적 사고 수준은 기존의 평가틀을 넘어서는 것으로 판단된다. 그러므로 영재아들의 확률적 사고 수준 평가틀을 개발하는 후속 연구가 필요하다.

둘째, 영재아들에게 단지 문제를 해결하도록 하는 것이 아니라, 해결 과정을 반성적으로 분석하고 상호 비평하도록 한 것은 확률적 사고 수준을 향상시키는 데 매우 중요한 역할을 하였다. 영재아들의 초기 확률적 사고 수준도 매우 높은 것으로 나타났지만, <부록>의 2번 문항을 통하여 이전 문항을 해결한 과정을 반성적으로 분석하게 하고, 상호 비평하도록 함으로써, 더 수준이 높은 확률적 사고가 드러났다. 영재아들은 단지 수치적인 모델을 사용하는 것에 그치지 않고, 자신이 사용한 수치적인 모델이 적합한지 여부를 판단하기 위하여 전제 조건을 살펴보았다. 이 과정에서 확률론의 역사에 등장한 고전적 관점에 관련된 논란, 곧 등확률성을 가정할 수 있는가에 대한 논란이 재연되었다. 이는 영재아들이 새로운 전제 조건에 의하여 새로운 확률값을 구하게 된 계기를 마련하였으며, 전제 조건이 다르면 확률값이 다르다는 것, 곧 서로 다른 확률 체계 또는 확률 공간의 존재를 고려하게 하였다.

셋째, 영재교육 담당 교사 연수에 참여한 교사들을 대상으로 한 설문조사에 의하면, 교사들은 영재교육에서 학생들의 참여와 토론을 강조해야 하고, 상위 수준의 과제나 고난도 복합 과제보다는 관점의 전환이나 다양한 추론, 다양한 표현 방식의 개발과 적용을 촉진하는 과제가 적절하다고 생각하였다. 이는 최근 연구들에서 논의되고 있는 영재교육의 일반적인 교육원리(송상헌, 2000; Sheffield, 1999)에 해당하며, 교사들이 영재교육의 바람직한 방법으로 제시되는 이론적인 권고에 매우 긍정적인 관점을 가지고 있음을 시사한다. 또한, 다양한 기관에서 이루어진 영재교육 담당 교사 연수의 성과이며, 향후 공교육에서 이루어질 영재교육의 지향점이 적절하게 정립된 것으로 볼 수 있다.

넷째, 영재교육 담당 교사 연수에 참여한 교사들은 이번 연구를 위하여 개발한 확률 영역의 과제가 어떤 목표를 추구하는지 파악하는 데 어려움을 보였다. 교사들은 확률에 대한 여러 관점이 존재한다는 것이나, 여러 관점에서 서로 다른 기본 가정을 하고 있다는 것, 그 중에서도 확률에 대한 고전적 관점에서는 등확률성을 전제 조건으로 택하고 있다는 것을 명확하게 인식하지 못하였다. 그러므로 일부 학생들이 처음부터 하나의 확률값에 만족하지 않고 다른 확률값이 가능하다는 것에 주목하는 이유를 전혀 이해하지 못하였다. 더욱이 자전거를 타고 갈림길에 도착하여 서로 다른 길을 선택한다는 문제 상황과 공을 떨어뜨리는 문제 상황 사이의 수학적인 의미의 차이를 이해하지 못하였다. 이는 교사들이 영재교육에 대한 일반적인 관점은 적절하게 갖추고 있으나, 확률 영역의 과제에서 추구하는 확률적 사고의 특성에 대해서는 적절한 안목을 형성시키지 못하였음을 시사한다.

다섯째, Paek, Holland와 Suppes(1999), Rotigel과 Lupkowski-Shoplik(1999), 신희영, 고은성, 이경화(2007)에서 주장하는 바와 같이, 영재성은 단기간 또는 일회성 시험에 의하여 드러나기 어려우므로, 영재교육이 이루어지는 동안 학생들의 활동을 관찰하고 평가하여 잠재적인 능력을 파악하는 것이 중요하다. 이 연구에서는, 과제 세부 문항의 목표, 문장 표현의 적절성, 타당성 등을 포함한 기준에 따라 과제를 분석하고, 학생들의 반응을 구체적으로 확인하는 방식으로 영재교육 교사 연수를 진행하였다. 교사들이 학생들의 영

재성을 정확하게 파악하고 잠재적인 능력을 개발하도록 이끌려면 영재교육을 위한 과제 분석과 개발, 수업 분석과 계획에 대한 후속 연구가 이루어질 필요가 있다.

영재아들에게는 수학자들이 그러했듯이, 현상 속에 내재된 모호성을 인식하여, 문제로 구조화하고, 이를 해결하는 가운데 사고 수준을 향상(Byers, 2007; Corfield, 2003)시키는 방식으로 학습하는 경험이 매우 필요하다. Tao(2007)는 이러한 성향이 좋은 수학 연구를 하는 원동력이라고 하였다. 확률 과제는 문제의 조건에 따라 여러 가지 수치적 모델을 개발하여 적용하고 논의하도록 함으로써, 영재아 스스로 깊이 사고하고 문제를 해결하면서 생산적인 성향을 발전시키도록 한다. 그러므로 확률 과제를 활용한 영재교육을 통하여, 확률적 사고의 수준을 향상시키려는 노력이 이루어져야 하고, 교사들은 학생들의 확률적 사고 수준에 대하여 충분히 파악할 수 있는 안목을 개발하고 생산적인 논평 활동을 유도함으로써, 영재아들이 확률적 사고를 발전시키고, 수준 상승의 기회를 가지도록 해야 한다. 이는 확률 과제를 통한 영재교육의 가능성과 유용성 그리고 이 때 교사가 어떤 역할을 해야 하는가에 대해서 시사하는 바가 있다. 무엇보다 시험이 아니라 관찰평가에 의하여 영재성을 판별하기 위해서는, 문제를 해결하는가 하지 못하는가가 아니라 사고 특성과 사고 수준의 상승에 대한 민감성과 전문성의 의미를 각 내용 영역에 대해 밝히고, 영재교육 담당 교사들이 이 감각을 발전시키도록 교육하는 것이 매우 중요하다.

참 고 문 헌

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2006). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

김지원 (2003). **한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구**. 석사학위논문. 경인교육대학교.

나귀수, 이경화, 한대희, 송상헌 (2007). 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제 해결 방법. **학교수학**, 9(3), 397-408.

박은정 (2006). **능력별 집단에 따른 수학 영재들의 패턴의 일반화 과정에 관한 연구**.

석사학위논문. 경인교육대학교.

송상헌 (2000). 수학영재아들을 위한 행동특성검사지의 개발과 활용에 관한 연구. **학교수학**, 2(2), 427-457.

송상헌, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원 (2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구**, 17(2), 163-177.

신희영, 고은성, 이경화 (2007). 수학영재교육에서의 관찰평가와 창의력 평가. **학교수학**, 9(2), 241-257.

이경화 (1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 박사학위논문. 서울대학교.

이경화, 최남광, 송상헌 (2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정-정당화 과정과 표현 과정을 중심으로-. **학교수학**, 9(4), 487-506.

최종덕 (1995). **부분의 합은 전체인가: 현대 자연 철학의 이해**, 서울: 소나무 철학 문고.

Assouline, S. G. (1997). Assessment of gifted children. In N. Colangelo & G. A. Davis, (Ed.), *Handbook of gifted education* (pp. 89-108). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. In H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Birch, J. W. (1984). Is any identification procedure necessary? *Gifted Child Quarterly*, *28*(4), 157-161.

Borovcnik, M., & Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73-105). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Byrnes, J. P., & Beilin, H. (1991). The cognitive basis of uncertainty. *Human Development*, *34*(4), 189-203.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D. Reidel, Dordrecht.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. D. Reidel, Dordrecht.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 96-105.

Green, D. (1986). Talking of probability. *Mathematics and Applications, 20*, 145-149

Hekimoglu, S. (2004). Conducting a teaching experiment with a gifted student. *Journal* *of Secondary Gifted Education, 16*(1), 14-19.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thronton, C. A., & Mogil, A. T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 101-125.

Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases,* Cambridge, MA: Cambridge university press.

Paek, P., Holland, P. W., & Suppes, P. (1999). Development and analysis of a mathematics aptitude test for gifted elementary school students. *School Science and Mathematics, 99*(6).

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton.

Rotigel, J. V., & Lupkowski-Shoplik, A. (1999). Using talent searches to identify and meet the educational needs of mathematically talented youngsters. *School Science and Mathematics, 99*(6).

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing Company.

Shaughnessy, J. M. (2003). Research on students' understandings of probability. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 216-226). Reston, VA: NCTM.

Sheffield, L. J. (1999). *Developing mathematically promising students.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal, 9*, 39-59.

Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2002). School students reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33*(1), 59-84.

= Abstract =

Probabilistic Thinking Level and Gifted Education

Kyeong-Hwa Lee
Seoul National University

Several researches have been done on the meaning of probabilistic thinking level and its pedagogical implication. However, there is lack of trials of using topics in probability to educate mathematically gifted students. As a result, we don't have sound understanding on gifted students' probabilistic thinking level and how to facilitate it through educational program. This study examines the meaning of probabilistic thinking level, develops and applies tasks in probability for gifted education. Having the analysis of the student responses, this study tries to investigate how teachers who participate in an in-service teacher education program interpret the developed tasks and student responses. In conclusion, this study shows the possible approach of gifted education using probability tasks to facilitate gifted students' probabilistic thinking level and its potential in identification of giftedness through observation.

Key Words: Probabilistic thinking level, Gifted education, probability task, Identification of giftedness through observation

1차 원고접수: 2010년 3월 16일
수정원고접수: 2010년 4월 15일
최종게재결정: 2010년 4월 17일

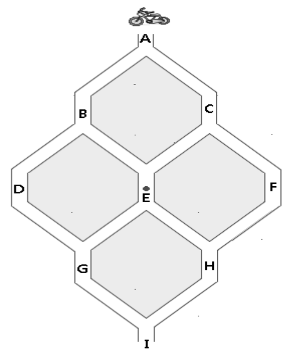
<부록>

1. 다음 [그림 1]은 육각형 모양의 주거 단지와 그 사이에 만들어진 도로망을 나타낸 것이다. 자전거를 타고 A지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 한다.

(1) 자전거를 타고 A지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지인가?

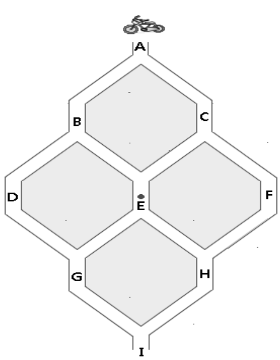
(2) 최단 거리로 이동하여 A지점을 출발하여 E지점을 거쳐 I지점에 도달하는 방법은 모두 몇 가지인가?

(3) 문제 (1)과 (2)의 결과를 바탕으로 A지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 할 때, E지점을 지나게 될 확률을 구하고, 그 이유를 설명하여라.



[그림 1] 자전거를 타고 이동하는 상황

2. 문제 1에서 구한 각각의 경로를 선택할 확률은 모두 같은가? 자신의 생각을 말하고 그 이유를 설명하여라.



3. 다음 그림과 같은 도로망에서 A지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 할 때, 다음 물음에 대하여 생각해보자.

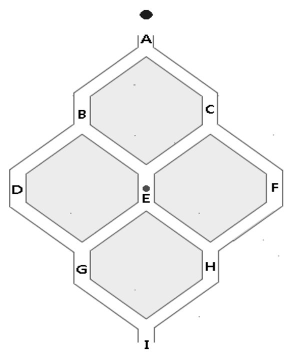
(1) A지점에서 B지점으로 이동할 확률과 A지점에서 C지점으로 이동할 확률이 서로 같다고 말할 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

(2) 처음 갈림길에서 A에서 B지점으로 이동하였다고 할 때, B지점에서 D지점으로 이동할 확률과, B지점에서 E지점으로 이동할 확률이 서로 같다고 말할 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

(3) 문제 (1)과 (2)의 결과를 바탕으로 A지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 할 때, E지점을 지나게 될 확률을 구하고, 그 이유를 설명하여라.

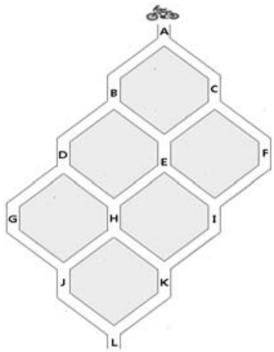
4. 앞의 문제 1에서 구한 E지점을 지날 확률과 문제 3에서 구한 E지점을 지날 확률은 서로 같은가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보자. 만약 서로 다른 값이 나타났다면, 어느 방법으로 구한 것이 더 타당할지 판단하고, 그 이유를 설명하여라.

5. [그림 2]는 육각형 모양의 합동인 블록을 이용하여 모든 갈림길에서 좌우가 서로 대칭이도록 만든 장치로서, 위쪽에서 떨어뜨린 공이 블록들 사이로 난 길을 통과하여 아래쪽으로 이동할 수 있도록 만든 것이다. 다음 물음에 대하여 생각해보자. (이때 공의 회전 등의 요소는 무시한다. 즉 아래로 떨어지는 동안 나타나는 각 갈림길에서 어느 한 방향으로 진행하게 될 확률이 모두 같다.)
   (1) A에서 떨어뜨린 공이 이 장치를 통과하여 I로 빠져나오도록 할 때, 이 공이 E지점을 지나게 될 확률을 구하고, 그 이유를 설명하여라.
   (2) [그림 2]의 상황에서 제시한 최단거리 문제와 [그림 1]에서 제시한 최단 거리 문제가 서로 같은 문제라고 생각하는가? 그 이유를 설명하여라. 만약 같은 문제 상황이라고 생각한다면, 4번에서의 주장을 그대로 유지할 것인지 아닌지 판단하고, 그 이유를 설명하여라.

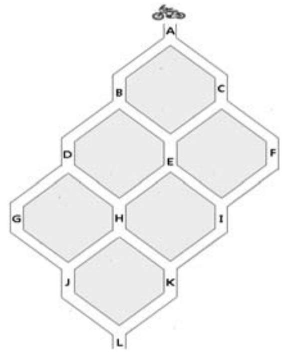


[그림 2] 공 떨어뜨리기

6. (문제 상황의 변형) 도로망 또는 공을 떨어뜨리는 장치가 다음과 같이 달라졌을 때, 다음 물음에 대해 생각해보자.
   (1) [그림 3]과 [그림 4]에서 E지점을 지날 확률이 얼마인지 각각 구하고, 그 이유를 설명하여라.
   (2) (1)에서 구한 두 결과가 서로 같은가? 그 이유를 설명해보아라.
   (3) [그림 3]과 [그림 4]에서 B지점을 지날 확률이 얼마인지 각각 구하고, 그 이유를 설명하여라.
   (4) [그림 3]과 [그림 4]의 다른 점들에 대해서도 그 점을 지날 확률을 구하여 두 결과를 서로 비교하여보자.



[그림 3] 자전거로 이동(3×2)



[그림 4] 공 떨어뜨리기(3×2)

7. (문제 상황의 고안) 지금까지 살펴본 것처럼, 서로 다른 관점으로 확률을 구하였을 때, 그 값이 달라지는 상황을 생각하여 제시하여 보아라.