

위치결정 스테이지 베이스 진동 모델링 및 저감기법 개발

박아영⁺, 임재곤⁺, 홍성욱⁺⁺

(논문접수일 2010. 3. 25, 심사완료일 2010. 7. 28)

Modeling and Countermeasure for Positioning Stage Base Vibration

Ah-Yeong Park⁺, Jae-Gon Lim⁺, Seong-Wook Hong⁺⁺

Abstract

Precise positioning stages are often employed for precise machinery. For the purpose of vibration isolation, these precise positioning stages are mounted on a heavy base structure which is supported by compliant springs. Then the base structure is subjected to residual vibration due to the reactive force and vertical moving load induced by the stage motion. This paper investigates the vibration behavior of a positioning stage base and the associated vibration suppression technique. A dynamic model is developed to investigate the base vibration due to the reactive force and moving load effects by the moving stage. An input shaping technique is also developed to suppress the residual vibrations in base structures. Simulations and experiments show that the developed dynamic model adequately represents the base vibration and that the proposed input shaping technique effectively removes the residual vibrations from the positioning stage base.

Key Words : Base Structure Vibration(베이스 구조 진동), Positioning Stage(위치결정 스테이지), Dynamic Model(동적 모델), Input Shaping(입력성형), Residual Vibration(잔류진동)

1. 서론

생산 공정의 자동화를 위해서는 공정 간 제품 반송 작업이 원활히 이루어지도록 제품의 반송을 담당하는 시스템이 필요하다. 이러한 반송 시스템의 방법이나 형태를 결정하기 위해서는 반송 대상물의 특성과 공정의 특성 등이 적절히 고려

되어야 한다. 최근 대면적 박판 형태의 제품을 생산하는 공정에서는 제품을 적층하여 일괄적으로 반송하는 기존 카세트 방식뿐만 아니라 반송 시스템을 이용하여 개별 제품을 날개로 직접 운반하는 방식도 채택하고 있다. 이와 같이 제품 운송을 담당하는 반송 시스템이 공장장비간에 설치되어 하나의 공정라인 상에서 제품에 대한 작업이 이루어지면 생산

⁺ 금오공과대학교 대학원 기전공학과
⁺⁺ 교신저자, 금오공과대학교 기계공학부 (swhong@kumoh.ac.kr)
주소: 730-701 경북 구미시 양호동 1번지

효율성을 크게 높일 수 있게 된다. 그러나, 공정장비와 반송 장비가 직렬로 연결되어 생산라인을 구성하게 되면 각각의 장비에서 발생하는 진동이 다른 장비에 영향을 미치게 되어 정밀한 작업이나 제품 반송에 어려움을 겪을 수 있다. 보편적으로 정밀 작업을 하는 공정장비의 운동에 의한 자체 진동 문제와 이에 대한 진동 저감에 대한 연구는 활발히 이루어져 왔다⁽¹⁻⁵⁾. 그러나 생산 공정장비와 반송장비 간의 상대 운동이나 장비를 지지하는 구조물에 대한 진동 문제는 그 중요성에 비해 큰 주목을 받지 못하고 있다.

정밀 측정 및 생산 장비들은 작업의 정속성을 위하여 중량이 큰 베이스 위에 설치되는 경향이 있으며, 특히 베이스는 내외부로부터 전달되는 진동을 절연할 목적으로 비교적 강성이 약한 스프링으로 지지되고 있어 베이스를 포함한 전체 장비의 진동이 발생하게 된다. 그중에서도, 장비에 포함된 위치결정 스테이지의 운동에 의한 반력이나 스테이지의 자체 질량 이동에 의한 이동하중 효과가 장비 전체의 강체모드(Rigid body mode) 진동을 유발하게 된다.

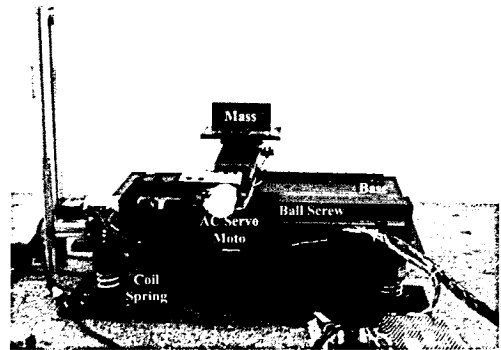
베이스나 장비 구조물의 강체모드 진동은 이송 대상체인 제품에 대한 직접적인 영향은 제한적인 반면, 다음 공정으로 반송하고자 하는 경우에 제품 정렬 및 반송 시간 지연 등으로 인해 작업 효율성에 영향을 미치게 된다. 따라서 이와 같이 스테이지 베이스에 발생하는 잔류진동제거에 관한 연구가 최근 관심을 끌고 있다⁽⁶⁾.

본 논문에서는 실제적인 스테이지 베이스 구조물을 대상으로 스테이지의 운동에 의해 발생하는 두 가지의 진동 현상에 대하여 이론적인 모델링을 하였고 운동조건에서 특성을 분석하였다. 또 베이스 구조물의 잔류진동을 억제하기 위한 방법으로 입력성형기법을 도입하였다. 즉, 베이스의 진동을 발생시키는 위치결정장치의 운동명령에 대해 입력성형을 함으로써 베이스의 진동을 제거하는 방법을 제시하였다. 특히 비교적 저주파 대역에 분포한 6개의 모드를 갖는 시스템에 대한 입력성형을 고려하여 보다 효율적으로 입력성형기법을 적용할 수 있는 입력성형기를 제안하였다. 시뮬레이션과 실험을 통하여 제안된 제어 방법이 베이스의 진동을 적절하게 저감할 수 있음을 확인하였다.

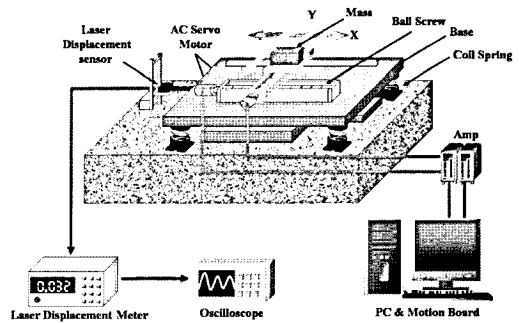
2. 시스템 모델링

2.1 대상 시스템

Fig. 1에는 본 연구에서 사용된 시스템의 실물과 개념도를 보여주고 있다. XY 위치결정 스테이지가 볼스크류(Ball screw)를 통해 연결되어 있으며 베이스 위에 설치되어 있다.



(a) Photograph of the experimental system



(b) Schematic diagram of the experimental setup

Fig. 1 A positioning stage system mounted on a base supported by resilient springs

베이스는 바닥으로부터 전달되어지는 진동을 절연하기 위해 약한 코일스프링으로 지지되어있다. 스테이지는 서보모터(Servo motor)로 구동되며 스테이지의 작업대 위에는 실제 사용환경을 고려하여 적당한 질량이 부착 되어있다.

XY 스테이지의 운동에 의해 발생하는 스테이지 베이스의 진동을 측정하기 위해서 실험장치를 설치한 석정반 위에 레이저 변위센서(Keyence LC 2400)를 설치하여 측정하였다. 모션 제어 보드를 사용하였으며 운동에 관련된 데이터 및 모든 특성 변수(위치, 속도, 가속도)는 실시간으로 모니터링 하였다.

2.2 모델링

Fig. 2와 같이 시스템의 개념적 모델링을 하였다. 베이스를 강체로 생각할 때 6자유도의 진동계로 모델링할 필요가 있다. 베이스 운동에 대한 모델링을 위해 다음과 같은 가정을 하도록 한다.

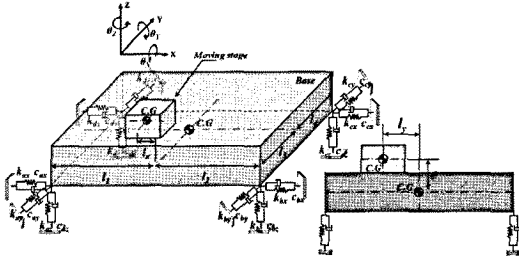


Fig. 2 Conceptual model for the system

- ① 베이스의 질량이 이동하는 질량에 비해 충분히 커서 베이스를 포함한 전체의 관성특성의 변화를 무시할 수 있다.
- ② 베이스 위를 이동하는 물체는 항상 베이스 표면과의 접촉상태를 유지한다.
- ③ 베이스의 진동에 관련된 모든 비선형 성분은 무시할 수 있다.

이상의 가정 하에 운동방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = f_r + f_m \quad (1)$$

여기서 $q = \{X \ Y \ Z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T$ 이다. 또 M, C, K는 각각 질량, 감쇠 및 강성행렬로서 6x6의 크기를 가지며, 행렬의 자세한 요소는 부록에 정리하였다. f_r, f_m 은 각각 이송체의 운동반력벡터와 이송체의 이송하중에 의한 외력벡터를 의미한다. 자세한 요소는 부록에 정리하였다. 시스템의 감쇠는 강성행렬에 비례하는 것을 두었으며 실험적으로 측정된 응답에 유사한 특성을 갖도록 비례계수를 0.00286으로 설정하였다.

3. 시스템 응답해석

스테이지의 운동에 의해 베이스에 발생하는 진동은 비교적 적은 감쇠에 의존하여 소멸되므로 오랜 시간 동안 유지된다. 이러한 진동은 비교적 저주파이며 베이스 위의 물체와 베이스가 같이 진동 한다면 성능에 영향을 미치지 않는 경우가 많다. 그러나 연속된 이송장비에서 물체를 반송하는 경우나 타 장비와 연결된 작업을 하는 경우, 전체적인 작업성을 현저히 떨어뜨릴 가능성이 있다.

여기서는 앞 절에서 유도한 운동방정식을 이용하여 이와 같은 베이스의 진동에 영향을 미치는 스테이지의 이동 반작용력과 이동하중에 의한 진동특성을 검토하였다.

Table 1 System parameters

Parameter	Value
M (base mass)	65.64[kg]
m_x (moving mass)	7.2[kg]
m_y (moving mass)	3.7[kg]
J_x	1.18[kg*m ²]
J_y	1.52[kg*m ²]
J_z	2.35[kg*m ²]
K_x	10143[N/m]
K_y	10143[N/m]
K_z	9810[N/m]
l_1	0.289[m]
l_2	0.291[m]
l_3	0.246[m]
l_4	0.254[m]

Table 2 Motion parameters for experiments

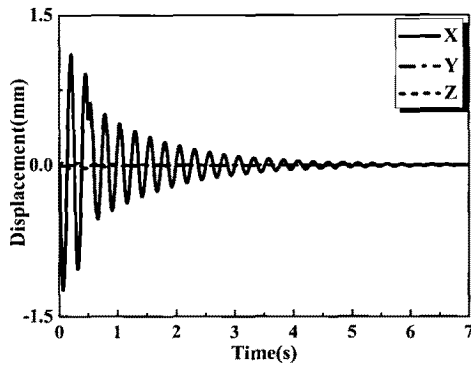
Parameter	Value
V_{max}	500[mm/s]
Acceleration Time	50[ms]
X-axis Stroke	250[mm]
Y-axis Stroke	150[mm]

Table 1, 2는 시뮬레이션을 위해 고려한 물성치와 구동 관련 파라미터이다. Fig. 1에서 볼 수 있는 바와 같이 X축 방향으로 이동하는 경우가 Y축 이송에 비해 좀 더 큰 추력을 필요로 하게 된다. 이러한 조건을 고려한 시뮬레이션을 위해 실험장치와 동일한 특성치를 부여하였다.

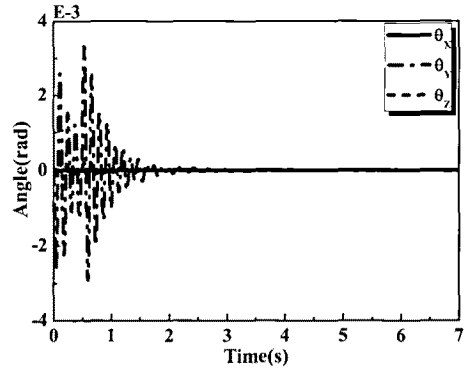
3.1 스테이지 운동 반력에 의한 진동

정지된 스테이지가 이송을 시작하거나 이송 중 정지하게 되면 가감속이 있게 되며 이로 인해 베이스에는 반작용력이 작용된다. 이와 같은 반작용력은 베이스를 포함한 전체시스템에 진동을 발생시키게 된다. 여기서는 이송반력에 의한 진동특성을 분석하기 위해 X축 직선운동과 대각선 방향의 운동을 고려하였다.

X방향 이송 시 베이스 무게중심 위치에서의 응답을 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3(a)에서 볼 수 있듯이 이송축이 무게중

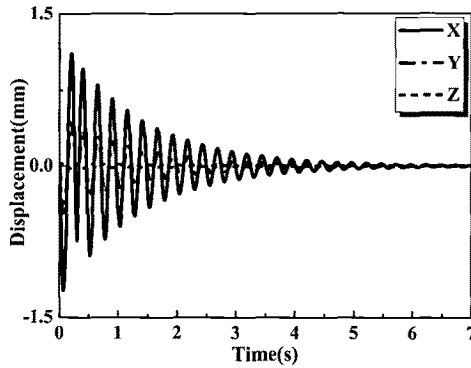


(a) Transverse vibrations

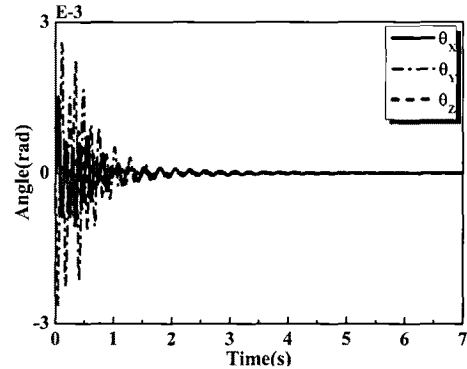


(b) Angular vibrations

Fig. 3 Base vibration due to reactive force caused by x-directional movement (simulation)



(a) Transverse vibrations



(b) Angular vibrations

Fig. 4 Base vibration due to reactive force caused by cross-directional movement (simulation)

심과 다소 벗어나 있어 3방향 변위가 모두 발생하고 있으나 Y변위와 Z변위에 비해 X변위가 큰 것을 볼 수 있다. Fig. 3(b)로부터 Y방향의 각변위를 크게 일으킴을 확인할 수 있다. Fig. 4는 X방향 Y방향 동시 이송 시의 결과를 보여 주고 있다. 이때는 X와 Y의 이동량을 모두 150mm로 같게 두었다. 결과를 보면 출발과 정지에서 진동의 크기나 방향이 급격히 달라지고 있으며, X, Y축 수평변위가 모두 크게 나타난 것을 볼 수 있다. 또한 세 방향의 각 변위를 모두 발생 시킴을 볼 수 있다.

3.2 스테이지 이동하중 효과에 의한 진동

스테이지 이동하중이 베이스 진동에 미치는 영향을 확인 하기 위해 이송체가 대각선 방향으로 이송되는 경우를 시뮬레이션 하였다. 계산조건은 이송반력의 경우와 같다.

시뮬레이션 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 그림에서 수직 방향 변위가 비교적 크게 발생함을 확인할 수 있다. 또한 Fig. 5(b)에서 X, Y방향 각변위가 주로 발생하나 이송반력에 의한 각변위에 비해 매우 적은 수준의 각변위가 나타나고 있음을 확인할 수 있다.

3.3 시뮬레이션과 실험 비교

Fig. 6(a)는 질량을 500mm/s의 속도로 X축으로 이동시켰을 때 나타나는 베이스 X축 끝단에서의 응답에 대한 실험과 시뮬레이션 결과를 비교하여 나타내고 있다. 실험과 시뮬레이션 결과가 잘 일치함을 보여주고 있다. Fig. 6(b) 또한 질량을 500mm/s로 Y축으로 이동시켰을 때 베이스 Y축 끝단에서 나타나는 응답을 실험과 시뮬레이션을 비교하여 나타내고 있다. Y축 이동 또한 시뮬레이션 결과와 실험결과가

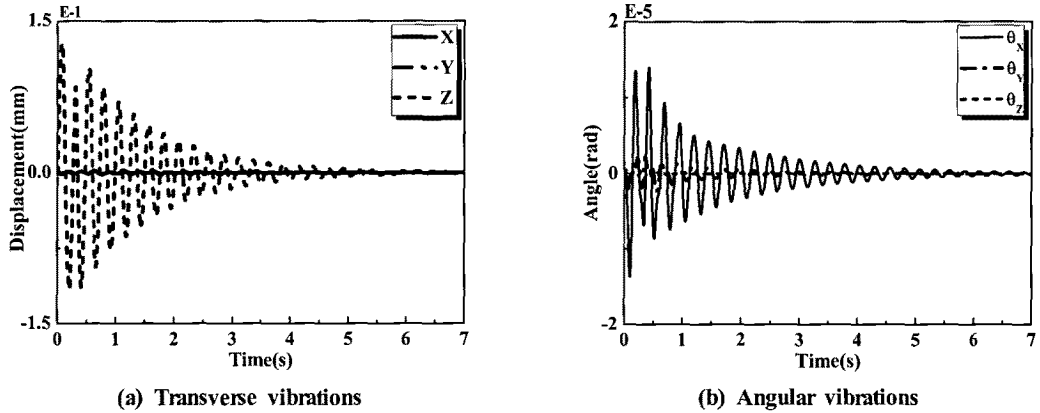


Fig. 5 Base vibration due to moving load effect caused by cross-directional movement (simulation)

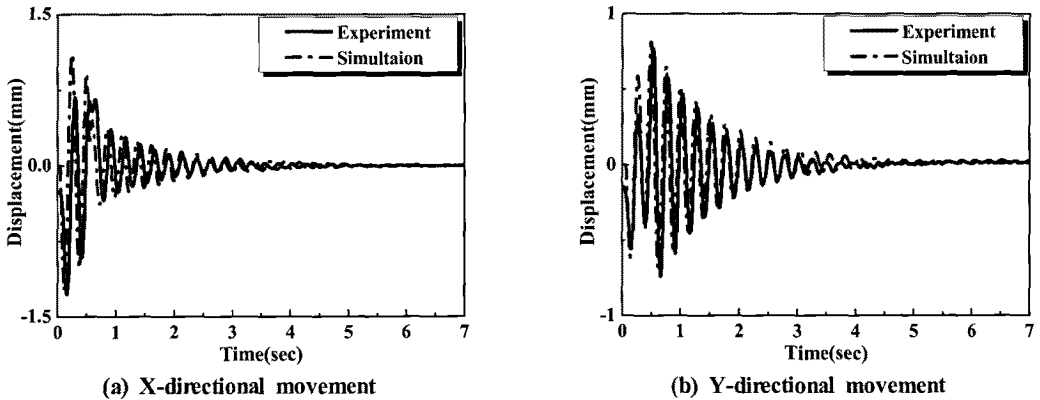


Fig. 6 Comparison of base vibration from experiments and simulations

잘 일치함을 알 수 있다.

4. 입력성형기 설계

베이스의 진동 유무에 상관없이 스테이지 자체에서 발생하는 잔류진동은 스테이지의 운동에 입력성형기법을 적용하면 손쉽게 제거할 수 있다. 그러나 스테이지의 자체의 진동과 베이스 진동을 동시에 고려하는 경우에는 스테이지에서 고려해야할 모드와 베이스의 진동모드를 같이 고려하여 입력성형기를 설계하여야 한다. 여기서는 베이스의 진동을 중심으로 검토할 목적이므로 스테이지의 자체모드는 고려하지 않도록 한다.

베이스구조물은 6자유도를 갖게 되므로 일반적으로 6개 모드를 고려해야 한다. 기존의 다모드 입력성형기법에서는

여러 개의 고유진동수에 대한 입력성형을 위하여 각각의 고유진동수에 대한 입력성형기를 설계한 후 컨벌루션하는 방식으로 입력성형기를 설계할 수 있다⁽⁷⁾. 컨벌루션 입력성형기의 지속시간은 각 모드별 입력성형기들의 지속시간을 합한 시간과 같다. 따라서 고려해야할 모드가 증가할수록 입력성형 지속시간이 증가함은 물론 임펄스의 개수도 급격히 증가한다.

여기서 고려하고 있는 시스템의 6개 모드를 모두 고려할 경우, 기존의 입력성형기는 64개의 임펄스로 구성된다. Fig. 7은 3개의 모드를 컨벌루션하여 만들어지는 입력성형기를 예시하고 있다. 입력성형기의 시간 증가는 시스템의 응답시간이 느려지게 한다. 또한 임펄스 개수의 증가는 실제 인가되는 입력의 변동성을 크게함으로써 이송계의 안정적 운영에 나쁜 영향을 줄 수 있다. 본 연구에서는 이와 같은 기존의

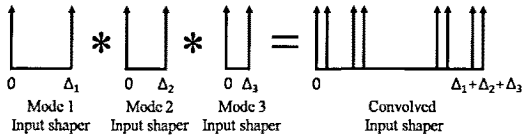


Fig. 7 Illustration of convolved input shaper design for 3-mode system

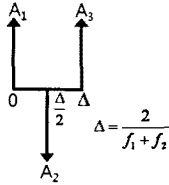


Fig. 8 2-mode shaper

Table 3 Impulse amplitudes and timing for 2-mode input shapers

Group	1			2			3		
ti	0	0.043	0.086	0	0.084	0.168	0	0.068	0.136
Ai	1	-1	1	0.336	0.329	0.336	0.25	0.5	0.25

입력성형기 문제점을 개선할 수 있는 입력성형기를 제안하였다. 즉, 참고문헌⁽⁸⁾에서 제안된 새로운 다모드 입력성형기법을 이용하여 보다 효율적인 입력성형기를 설계하였다. 본 연구에서는 해석적인 해가 존재하는 Fig. 8과 같은 2모드 입력성형기⁽⁸⁾를 활용하였다.

지속시간을 줄이기 위해 6개의 모드를 2개씩 3개의 그룹으로 나누고 각 그룹별로 2모드 입력성형기를 설계한 후 이를 컨볼루션하여 최종 입력성형기를 만들었다. 이 경우 임펄스의 개수를 27개로 할 수 있고, 지속시간도 대폭 줄일 수 있다. Table 3에는 그룹별로 설계된 2모드 입력성형기들의 임펄스 크기와 시간간격을 정리하였다. Fig. 9에서는 계단입력에 대해 기존의 방식과 제안된 방식의 입력성형기를 적용하여 생성된 입력을 만드는 과정을 비교해서 보여주었다.

Fig. 10은 스테이지를 대각선방향으로 이동하면서 얻어진 응답을 보여주고 있다. 여기서는 입력성형을 한 경우와 하지 않은 경우를 비교하였다. 계산 조건은 앞에서와 같다.

입력성형기법을 적용하여 잔류진동을 완전하게 억제한 것을 확인할 수 있다.

한편, 기존 방법에 의한 다모드 입력성형기와 새롭게 설계한 입력성형기의 지속시간은 각각 0.581 s와 0.389 s로서

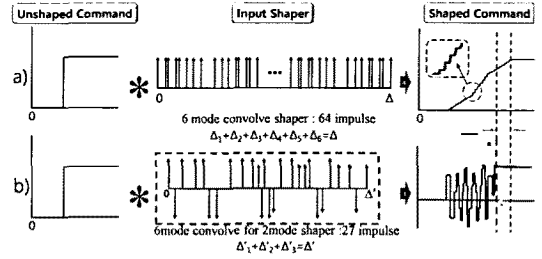
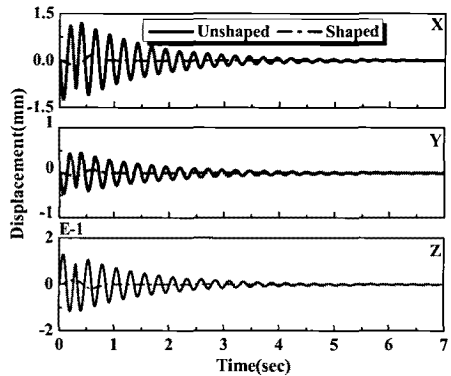
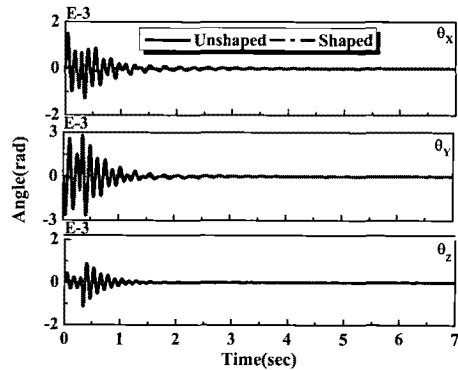


Fig. 9 Illustration of input command shaping processes



(a) Transverse vibrations



(b) Angular vibrations

Fig. 10 Comparison of base vibrations at the mass center with unshaped and shaped commands due to XY-directional movement (simulation)

제안된 입력성형기의 지속시간이 33% 정도 줄어든 것을 알 수 있다. 이론적으로 지속시간을 더욱 감소시킬 수 있으나 입력성형기의 임펄스 크기가 1보다 커지면서 구동기에 포화를 일으킬 수 있는 문제점이 발생하므로 여기서는 임펄스 크기가 1이 되지 않도록 입력성형기를 설계하였다.

5. 베이스 진동저감 실험 및 결과

앞 절의 시뮬레이션을 통해 그 유용성을 확인한 입력성형 기법을 실제 시스템에 적용하였다. Fig. 11은 X축 이동 시 입력성형기법을 적용하지 않은 경우와 적용한 경우 후 베이스 끝단에서의 잔류진동을 비교해서 보여주고 있다. 베이스의 X축 끝단에서 레이저 변위센서를 통해 측정된 데이터를 비교하고 있다. 질량의 X축 이동속도를 최대 500mm/s, 450mm/s 그리고 400mm/s를 각각 하였다. Fig. 12는 Y축 끝단에서 질량을 Y축으로 이동시 입력성형기법을 적용한 결과와 그렇지 않은 결과를 비교하고 있다. Y축 또한 속도를 최대속도인 500mm/s에서 400 mm/s까지 바뀌 가며 실험한 결과를 나타내고 있다.

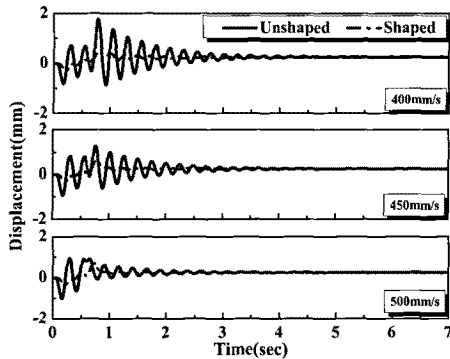


Fig. 11 Comparison of base vibrations at the end of base with unshaped and shaped commands for X-directional movement (experiment)

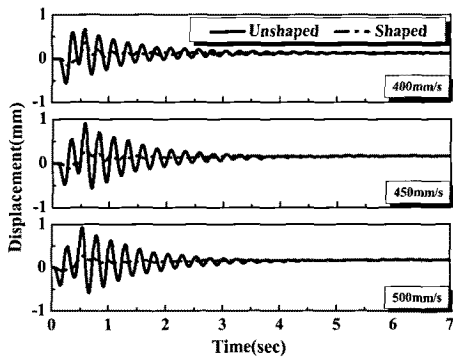


Fig. 12 Comparison of base vibrations at the end of base with unshaped and shaped commands for Y-directional movement (experiment)

실험결과를 통해 볼 수 있듯이 이동 속도에 무관하게 입력성형기를 적용한 후 스테이지 베이스의 잔류진동이 현저히 감소되는 것을 확인할 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 스테이지의 이송반력과 하중에 의해 발생되는 베이스 구조의 진동을 모델링하고 그 특성을 검토하였으며 잔류진동을 제거하기 위해 입력성형기법을 도입하였다. 먼저 스테이지의 이송반력과 하중에 의해 진동하는 베이스 구조물에 대한 동적모델을 구하였으며 이송반력과 이송하중효과에 의한 진동특성을 검토하였고 실험을 통해 모델의 타당성을 검증하였다. 베이스 구조물이 갖는 6개 진동모드를 모두 고려하기 위해 2모드 입력성형기를 조합하는 방식의 입력성형기를 도입하였으며 시뮬레이션을 통해 그 효과를 확인하였다. 또한 실제 제작된 스테이지 베이스에 적용하여 제안된 입력성형방법이 위치결정장치 스테이지 베이스의 잔류진동을 효과적으로 억제할 수 있음을 확인하였다.

후기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비 지원에 의해 수행되었으며 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Jones, S. and Ulsoy, A. G., 1999, "An Approach to Control Input Shaping with Application to Coordinate Measuring Machines," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 121, 242~247.
- (2) Tseng, Y. T. and Liu, J. H., 2003, "High-speed and Precise Positioning and XY Table," *Control Engineering Practice*, Vol. 11, No. 4, 357~365.
- (3) Park, S. W., Hong, S. W., Choi, H. S., and Jang, J.W., 2008, "Dynamic Modeling and Input Shaping Control of a Positioning Stage," *Trans. KSMTE*, Vol. 17, No. 2, pp. 83~89.
- (4) Jang, J. W., Park, S. W., and Hong, S. W., 2008, "Command Generation Method for High-speed and Precise Positioning of XY Stage," *Journal of KSPE*, Vol. 25, No. 10, 122~129.

- (5) Seo, Y. G., Jang, J. W., and Hong, S. W., 2009, "Residual Vibration Reduction of Precise Positioning Stage Using Virtual-Mode Based Input Shapers," *Journal of KSMTE*, Vol. 18, No. 3, 255~260.
- (6) Kim, H. K., Kwon, O. Y., Bae, G. H., and Hong, S. W., 2008, "Application of Input Shaping Method for Positioning Stage in Consideration of Base Structure Vibration," *Proceedings of 2008 KSMTE Fall Conference, Ansan, Republic of Korea*, pp. 375~380.
- (7) Singhose, W. and Seering, W., 2007, *Command Generation for Dynamic System*, Lulu.com.
- (8) Hong, S. W., Park, S. W., and Danielson, J., 2008, "A New Method for Manufacturing Machine Vibration Reduction Using Multi-mode Input Shapers," *Proceedings of the 2008 International Symposium on Flexible Automation, Atlanta, GA, USA*, paper number 2008 U-131

$$\begin{aligned}
 k_{22} &= k_{ay} + k_{by} + k_{cy} + k_{dy} \\
 k_{23} &= 0, \quad k_{25} = 0 \\
 k_{24} &= -e(k_{ay} + k_{by} + k_{cy} + k_{dy}) \\
 k_{26} &= -(k_{ay}l_1 - k_{by}l_2 - k_{cy}l_2 + k_{dy}l_1) \\
 k_{33} &= k_{az} + k_{bz} + k_{cz} + k_{dz} \\
 k_{34} &= -(k_{az}l_3 + k_{bz}l_3 - k_{cz}l_4 - k_{dz}l_4) \\
 k_{35} &= (k_{az}l_1 - k_{bz}l_2 - k_{cz}l_2 + k_{dz}l_1) \\
 k_{36} &= 0 \\
 k_{44} &= e^2(k_{ay} + k_{by} + k_{cy} + k_{dy}) + \\
 &\quad (k_{az}l_3^2 + k_{bz}l_3^2 + k_{cz}l_4^2 + k_{dz}l_4^2) \\
 k_{45} &= -(k_{az}l_1l_3 + k_{bz}l_2l_3 - k_{cz}l_2l_4 - k_{dz}l_1l_4) \\
 k_{46} &= -e(k_{ay}l_1 - k_{by}l_2 - k_{cy}l_2 + k_{dy}l_1) \\
 k_{55} &= e^2(k_{ax} + k_{bx} + k_{cx} + k_{dx}) + \\
 &\quad (k_{az}l_1^2 + k_{bz}l_2^2 + k_{cz}l_2^2 + k_{dz}l_1^2) \\
 k_{56} &= -e(-k_{ax}l_3 - k_{bx}l_3 + k_{cx}l_4 + k_{dx}l_4) \\
 k_{66} &= (k_{ax}l_3^2 + k_{bx}l_3^2 + k_{cx}l_4^2 + k_{dx}l_4^2) + \\
 &\quad (k_{ay}l_1^2 + k_{by}l_2^2 + k_{cy}l_2^2 + k_{dy}l_1^2)
 \end{aligned}$$

부록 1: 시스템 행렬 및 벡터 요소

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$K = [k_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad k_{ij} = k_{ji}$$

$$f_r = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \\ F_y \cdot e \\ F_x \cdot e \\ F_x \cdot l_y + F_y \cdot l_x \end{Bmatrix}, \quad f_m = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \\ F_z \cdot e \\ F_z \cdot e \\ F_z \cdot l_x + F_z \cdot l_y \end{Bmatrix}$$

where F_x = X axis reaction force, F_y = Y axis reaction force, F_z = moving load, e =vertical distance between the mass center of base and the mass center of moving stage. l_x, l_y =x and y directional distances between the mass center of base and the mass center of moving stage.

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{ax} + k_{bx} + k_{cx} + k_{dx} \\
 k_{12} &= 0, \quad k_{13} = 0, \quad k_{14} = 0 \\
 k_{15} &= -e(k_{ax} + k_{bx} + k_{cx} + k_{dx}) \\
 k_{16} &= -(k_{ax}l_3 + k_{bx}l_3 - k_{cx}l_4 + k_{dx}l_4)
 \end{aligned}$$

부록 2: 다모드 입력성형기 설계 방법^(5,8)

다모드 입력성형기는 서로 다른 크기와 시간을 갖는 여러 임펄스들의 조합으로 나타낼 수 있으므로 n개의 모드를 고려한 입력성형기 임펄스 열은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$i_n(t) = A_1\delta(t-t_1) + A_2\delta(t-t_2) + \dots + A_{n+1}\delta(t-t_{n+1}) \tag{A1}$$

여기에서 A_k 는 $k=1, \dots, n+1$ 일 때 k번째 임펄스의 크기를 나타내고, t_k 는 $k=1, \dots, n+1$ 일 때 k번째 임펄스의 시간이다. 첫 번째 임펄스의 시간을 0이라 하면 식 (A1)은 라플라스 영역에서 식 (A2)와 같이 표현할 수 있다.

$$I_n(s) = A_1 + A_2e^{-t_1s} + A_3e^{-t_2s} \dots + A_{n+1}e^{-t_{n+1}s} \tag{A2}$$

시스템이 안정하고 관련된 고유치들이 모두 저감쇠라고 하면 식 (A3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k = -\zeta_k\omega_{ok} + j\omega_{ok}\sqrt{1-\zeta_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{A3}$$

여기에서 ζ_k 와 ω_{ok} 는 각각 k번째 감쇠비와 고유진동수이

며 ω_k 는 $\omega_k = \omega_{ok} \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ 로 정의되는 k 번째 감쇠고유진동수이다.

다모드 시스템의 잔류진동을 발생시키지 않기 위해서는 가해진 입력이 시스템의 극점을 가진시키지 말아야 한다. 이를 위해 입력성형기의 영점이 시스템이 가진 극점, 즉 고유치에 대응되도록 한다. 즉, 다음의 식을 만족해야 한다.

$$I_n(s_k) = 0, k = 1, 2, \dots, n \quad (A4)$$

식 (A4)는 각각 2개의 실수방정식으로 분리될 수 있는 복소 비선형방정식으로 구성되었다. 따라서 식의 총개수는 $2n$ 개가 된다. 구해야 할 미지수가 $2n+1$ 이므로 해를 구하기 위한 식이 하나가 더 필요하다. 입력성형기가 적용되어도 정상상태의 응답에는 변화가 없어야 한다는 조건으로부터 임펄스 크기의 합에 관한 다음의 조건을 도입한다.

$$I_n(0) = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n+1} = 1 \quad (A5)$$

식 (A4)와 (A5)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-t_2 s_1} & \dots & e^{-t_{n+1} s_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{-t_2 s_n} & \dots & e^{-t_{n+1} s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (A6)$$

식 (A6)은 $t_k, k=2, \dots, n+1, A_k, k=1, 2, \dots, n+1$ 의 미지수로 이루어진 복소 비선형행렬방정식이다. 식 (A6)을 풀면 입력성형기를 결정할 수 있다.

식 (A6)은 비선형행렬방정식으로, 일반적으로 수치해석적 방법에 의해 해를 얻을 수 있으나 2모드시스템에 대해서는 해석적인 해를 얻을 수 있다⁽⁵⁾.