

응력 제한조건하의 신뢰성 기반 형상 최적설계

오영규*, 박재용*, 임민규*, 박재용*, 한석영⁺
(논문접수일 2010. 4. 13, 심사완료일 2010. 7. 12)

Reliability-Based Shape Optimization Under the Stress Constraints

Young-kyu Oh*, Jae-yong Park*, Min-gyu Im*, Jae-yong Park*, Seog-young Han⁺

Abstract

The objective of this study is to integrate reliability analysis into shape optimization problem using the evolutionary structural optimization (ESO) in the application example. Reliability-based shape optimization is formulated as volume minimization problem with probabilistic stress constraint under minimization max. von Mises stress and allow stress. Young's modulus, external load and thickness are considered as uncertain variables. In order to compute reliability index, four methods, i.e., reliability index approach (RIA), performance measure approach (PMA), single-loop single-vector (SLSV) and adaptive-loop (ADL), are used. Reliability-based shape optimization design process is conducted to obtain optimal shape satisfying max. von Mises stress and reliability index constraints with the above four methods, and then each result is compared with respect to numerical stability and computing time.

Key Words : Reliability-Based Shape Optimization(신뢰성 기반 형상 최적설계), Double-Loops Single-Vector Approach(이중루프단일벡터 방법), Single-Loop Single-Vector Approach(단일-루프 단일-벡터방법), Adaptive-Loop Approach(적응형루프 방법), Evolutionary Structural Optimization(진화적 구조 최적화)

1. 서론

신뢰성 기반 최적설계는 시간 비용(cost), 최적해의 수렴성(convergence), 설계의 안전성(safety)등 가장 알맞은 조합을 찾는 것을 목표로 한다. 결정론적 형상최적화 기법(DSO;

deterministic shape optimization)^(1,2)에서는 하중이나 기하학적 구조물의 모양등 공차, 오차같은 임의성(randomness), 변수 같은 불확실성(uncertainties)을 고려하지 않는다. 하지만 신뢰성이라는 파괴확률을 최적화와 결합할 때(RBDO; reliability based design optimization)⁽³⁻⁷⁾보다 안전한 설계

* 한양대학교 대학원 기계공학과

+ 교신저자, 한양대학교 기계공학부 (syhan@hanyang.ac.kr)

주소: 133-791 서울시 성동구 행당동 17

라는 것을 보여준다.

신뢰성 기반 형상 최적화의 목적은 적용하중, 재료의 재질, 두께등의 제품 설계의 불확실성, 확률론적 분포(probabilistic variacne)를 고려하여 신뢰성 해석을 통하여 형상최적화에 반영하는 것이다. 이중루프 단일벡터 방법(double-loops single-vector approach : DLSV)⁽⁸⁻⁹⁾은 바깥부분(outer loop)에서 최적화(desgin optimization)를 수행하며 안부분(inner loop)에서 신뢰성 해석(reliability analysis)을 수행해가며 최적화가 진행되는 것이다. 이중루프 방법은 일계 이차모멘트 방법의 적용방식에 따라 신뢰성 지수 방법(reliability index approach, RIA)과 목표 성능값 방법(performance measure approach, PMA)로 나뉜다.

단일-루프 단일-벡터 방법(single-loop single-vector approach : SLSV)⁽¹⁰⁾은 최대 파괴 가능점(MPP)을 찾는 내부최적화 과정을 해석적인 방법으로 도출할 수 있는 방법을 제안하였다. 이는 외부최적화 과정중의 설계변수의 수렴과 동시에 최대 파괴 가능점도 점차적으로 수렴해 가도록 함으로써 내부최적화 과정에서 매번 최대 파괴 가능점(MPP)을 구하는데 필요한 반복과정이 없는 방법이라 할 수 있다. 최근에는 SLSV의 시간 효율과 PMA의 수치적 안정성을 가지는 적응형 루프(adaptive- loop, ADL)⁽¹¹⁾가 제안하였다. 적응형 루프는 결정론적 설계 최적화와 병렬루프 그리고 단일루프로 이루어진다. 초기 설계점에서 결정론적 최적화로 빠른 최적화를 수행하고 신뢰성 해석을 수행한다. 신뢰성 해석은 MPP에 보다 수치적 안정성을 가지고 있는 병렬루프인 PMA를 사용하고 MPP에 근접하게 되면 마지막으로 시간 비용을 줄일 수 있는 단일루프인 SLSV를 이용하여 신뢰성 해석을 수행한다.

본 논문에서는 ESO⁽²⁾를 이용한 실제적인 기계구조물에 응력 제한조건하에 신뢰성 기반 형상 최적설계를 RIA, PMA, SLSV, ADL에 각각 적용하였으며 그 결과를 결정론적 형상최적화(DO, deterministic optimization)의 결과와 비교하였다. RBSO의 적용을 위해서 유한요소해석에는 ANSYS를 이용하였고, 신뢰성해석과 ESO기법의 적용을 위해서는 MATLAB을 사용하였다.

2. 진화적 구조 최적화 기법

2.1 민감도 수(sensitivity numbers)

강도문제에서의 민감도 수는 i 요소의 제거시 변화되는 von Mises 값으로 설정하였다. 최대 강도 구조물의 형상을

구하기 위한 진화적 구조 최적화기법은 구조물의 스트레스 값(Mises stress) 효율이 낮은 최외각 부분의 요소를 제거함으로써 최적의 형상을 구할 수 있다. 최적화가 진행되면서 max. von Mises값의 최소화, 즉 구조물의 응력집중(stress concentration)을 개선하여 구조물의 균일한 스트레스 분포를 주는 것과 구조물의 허용 응력 범위 내에서 부피나 무게를 최소화 하는 것이라 할 수 있다. 따라서 구조물의 강도 문제에 대한 구조물의 민감도 수는 강성 문제에서의 변형률에너지와 다르게 폰 미세스 스트레스 값으로 정의할 수 있다.

유한요소법에서 k 번째 요소의 스트레스 벡터 σ 는 절점변위 벡터 u 에 기초하여 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\sigma = DBu^k \tag{1}$$

여기서,

D : elastic matrix

B : strain matrix

변위벡터 Δu^k 와 결합하면, k 번째 요소의 스트레스 벡터 σ 는 i 번째 요소의 제거로 인해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Delta \sigma &= DB \Delta u^k \equiv DB \{ \Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_j, \dots, \Delta u_n \}_k^T \\ &= DB \alpha \end{aligned} \tag{2}$$

식 (2)을 사용하면 k 번째 요소의 변화된 스트레스는 모든 변형량의 변화를 기초로 계산된다. 따라서 강도문제에서의 민감도 수 α_i 는 다음과 같이 von Mises stress로 정의할 수 있다.

$$\alpha_i = \Delta \sigma = \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau^2} \tag{3}$$

여기서, 최적화 된 결과를 비교하여 보면 응력(von Mises stress)의 민감도 수와 변형률 에너지(strain energy)의 민감도 수 계산은 거의 비슷하다.

2.2 형상최적화

위에서 구한 각 민감도 수(sensitivity numbers)는 형상을 결정하기 전에 다시 최외각 요소의 민감도 수인지를 판별한다. 형상 최적화기법(nibbling)⁽¹⁾을 적용할 때 최외각(free edge), 내부(inner), 요소의 유무(solid, void)를 이진수(binary)로 0, 1로 표현해 모든 요소 각 경우의 수를 모두 판별해 주어 최외각이며 내부인 요소를 최종 요소로 선정한다. 형상

최적화기법을 적용하기 위해 모든 요소를 규칙적인 또는 순차적인 번호로 설계해야 자동화가 쉽게 조정될 수 있다. 이러한 민감도 수를 이용한 구조물의 형상최적화는 다음과 같은 반복과정을 통하여 수행되어진다.

- (1) 구조물이 허용할 수 있는 최대설계영역을 정의한다.
- (2) 설계영역을 요소로 나누고, 경계조건과 하중조건을 정의한다.

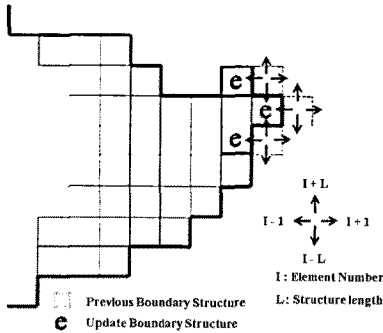


Fig. 1 Shape optimization method

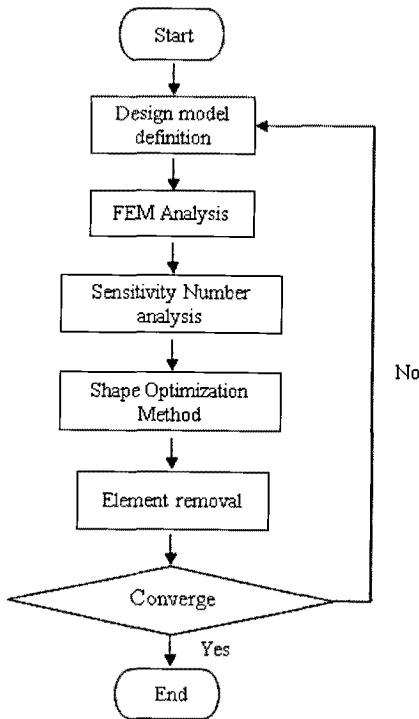


Fig. 2 Flowchart of ESO method

- (3) 초기 디자인 영역에 최외각의 유무, 요소의 유무를 고려하여 초기값(0 혹은 1)을 부여한다.
- (4) (3)의 조건에 맞는 민감도 수 α_i 를 얻기 위해 유한요소 해석을 수행한다.
- (5) 가장 작은 민감도 수의 요소를 구한다.
- (6) 지울 요소를 결정하고 유한요소 해석을 위한 새로운 설계영역을 만든다.
- (7) (6)에 대한 경계조건과 하중조건 유한요소 해석을 한다.
- (8) 최종 형상이 변위 제한조건에 달하고 수렴 조건이 만족할 때까지 단계2에서 7을 반복한다.

3. 신뢰성 기반 최적설계

설계 변수에는 결정론적 설계변수(x)와 확률 설계변수(y)가 있다. 신뢰성의 목적은 불확실성 변수(uncertainty variable)라 불리는 확률 설계변수가 구조물의 파괴에 어떠한 영향을 미치는지 알아내고 이를 토대로 설계자가 구현하고자 하는 파괴확률에 적합한 요소의 배치를 찾는 것이 신뢰성 기반 형상 최적화의 목적이다.

$$P_f = P_r[G(x,y) \leq 0] = \int_{G(x,y) \leq 0} f_Y(y) dy_1 \dots dy_n \quad (4)$$

여기서 P_f 는 파괴확률, $f_Y(y)$ 는 결합 밀도 함수이고 확률 설계변수는 y이고, P_r 은 확률 연산자이다. Fig. 3에서 파괴영역과 안전영역을 한계 상태 방정식에 따라 구분한 그림을 보여준다.

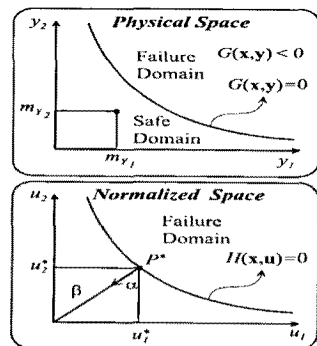


Fig. 3 Physical and normalized spaces

물리 영역(y)에서 표준 정규공간(u)으로의 변환은 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{and} \quad \mathbf{y} = T^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (5)$$

여기서 $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 는 확률 변환 연산자이다. 표준 공간 안에서 한계상태 방정식은 다음과 같다.

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (6)$$

FORM에서 파괴확률은 다음과 같이 정의된다.

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (7)$$

여기서 $\Phi(\cdot)$ 는 표준 가우시안 누적 함수(Gaussian cumulative distributed function)이다. 위의 식은 실제 공학에서 파괴확률에 대한 적절한 값을 제공한다. 파괴확률(failure probability)을 계산할 때에는 물리 영역이 아니라 표준 정규 공간 안에서 구해야 한다. 신뢰성 기반 최적설계는 결정론적 최적설계에서 결정론적 제약조건을 사용하여 문제를 정의하는 것과 달리 설계변수와 함께 불확실성을 고려하기 위하여 다음과 같은 확률론적 제약조건을 이용하여 정의하게 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & F(d) \\ \text{S.t.} \quad & P[G(d, X) \leq 0] \leq P_t \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 G 는 한계상태식(limit state function), d 는 설계변수 이고 X 는 확률변수 이다. 확률제약조건은 시스템의 실패 확률이 목표실패 확률 P_t 보다 작아야 함을 의미한다. 신뢰성 기반 형상최적화를 위하여 구조물의 체적을 목적함수로 고려하고, 최대 허용변위에 대한 제약을 한계상태식으로 정의하면 신뢰성 기반 형상최적화 문제는 다음과 같이 정식화 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \text{Volume} \\ \text{S.t.} \quad & P[G \leq 0] \leq P_t \\ & G = \sigma_{allow} - \sigma_{max} \end{aligned} \quad (9)$$

본 논문에서는 신뢰성 지수 계산방법인 신뢰도 지수 기반 접근법(RIA), 목표 성능치 접근법(PMA), 단일루프 단일벡터(SLSV)법과 적응형 루프(ADL) 방법을 사용하였으며, 그 결과를 서로 비교하였다.

4. 적용예제

4.1 필렛⁽¹²⁾

Fig. 4와 같은 필렛에 대하여 확률 제한조건을 고려한 신뢰성 기반 형상 최적화를 수행하고, DSO의 결과와 비교해 보았다. 필렛의 치수는 $L=501.6\text{mm}$, $h=114\text{mm}$, 그리고 $t=1\text{mm}$ 이다. 재료 물성치는 $E=207.3\text{GPa}$, 포아송비는 $\nu=0.3$ 이다. 하중은 하단 부 끝단에 분포하중 100N/mm 을 주었다. 설계영역은 740개의 4 절점 유한요소로 나누었지만

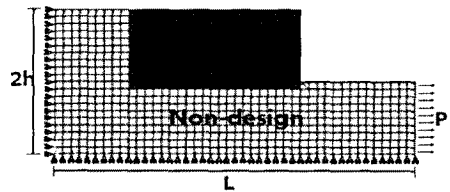


Fig. 4 Initial design of a fillet

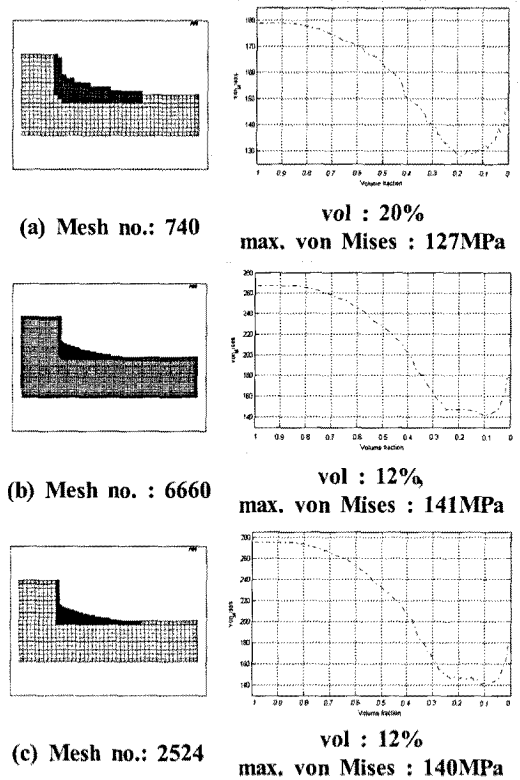


Fig. 5 Results of a Fillet mesh accuracy

최적해의 수렴성, 계산시간을 고려한 결과 Table 1, Fig 5 참조, 여기서, (b), (c)의 최적 형상이 (a)최적 형상보다 더 실제 필렛 형상과 유사하며 최적해(convergence), 시간비용을 고려하여 최종(c)로 선정하였으며 설계영역(design)만을 200개 (20×10)에서 천이영역이 잘 나타나도록 요소 재수정(mesh refinement)를 수행하여 1800개 (60×30)로 나누어 수행하였다. 한계상태 방정식은 최적화가 진행되며 max. von mises값이 최소화 되는 동시에 체적이 가장 이상적인 필렛 모양(R자) 형태인 12% 일때의 응력값 142MPa 이하일 때로 제한조건을 설정하였다. 확률변수는 각각 정규분포 특성을 가지며 확률적으로 서로 독립적이며 평균값에 10%의 분산을 갖는다고 가정하였다.

목표 신뢰도 지수는 파괴확률 $P_f = 0.125\%$ 를 가지는 $\beta_t = 3$ 으로 정의하였다. 확률변수로 탄성계수, 하중 그리고 두께로 고려하였으며 이는 99.87%의 신뢰성을 만족해야 한다는 의미이다.

Fig. 6(a)는 허용범위를 142MPa로 하여 수행한 결정론적 최적설계의 결과이다. Fig. 6(b), (c), (d), (e)는 신뢰도를 99.87%로 하여 RIA, PMA, SLSV, ADL 수행해 본 결과의 형상이며, 이것에 대한 각각의 체적, 응력, 신뢰도 지수의 값은 Table 1에 나타나있다. 결정론적 형상 최적설계와 신뢰성 기반 형상 최적설계의 결과를 비교해 보면, RBSO를 적용하게 되면 체적이 약 17%로 스패너, 브라켓보다 차이가

Table 1 Results of a Fillet mesh accuracy

	Volume (%)	max. von Mises (MPa)	Time ratio
(a)	20.0	127.74	1.00
(b)	12.0	141.80	1.81
(c)	12.0	140.36	1.32

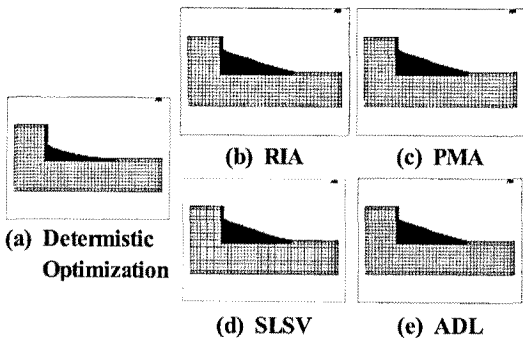


Fig. 6 The results of DSO and RBSO with 3 uncertainties

많이 나는 것을 볼 수 있는데, 필렛의 경우 비설계 영역을 제외한 필렛만의 부피, 즉 설계영역만을 고려했기 때문이다. 신뢰성 기반 형상 최적설계 RIA, PMA, SLSV, ADL을 각각 적용해 본 결과 최적형상에 수렴성은 RIA, PMA, ADL의 경우 같은 형상에서 수렴한 것을 알 수 있고 시간 비용을 보면 SLSV, ADL에서는 시간비용이 짧는데 비해 RIA, PMA에서는 시간비용이 다소 오래 걸리는 것을 알 수 있다.

4.2 스패너(Spanner)

Fig. 7과 같은 Spanner에 대하여 확률 제한조건을 고려한 신뢰성 기반 형상 최적화(RIA, PMA, SLSV, ADL)를 수행하고, DSO의 결과와 비교해 보았다. Spanner의 치수는 $L=240mm$, $h=60mm$ 그리고 $t=10mm$ 이다. 재료 물성치는 $E=210 GPa$, 포아송비는 $\nu=0.3$ 이다. 하중은 오른쪽

Table 2 Results of a Fillet

	Volume (%)	max. von Mises (MPa)	Reliability	Time
DSO	12.0	140.36	0.14	1.00
RIA	29.0	157.25	3.01	9.01
PMA	29.0	157.25	3.00	9.33
SLSV	28.4	156.99	2.98	4.88
ADL	29.0	157.25	3.00	2.63

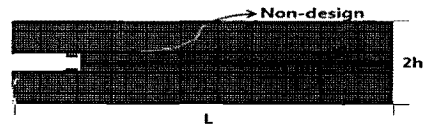


Fig. 7 Initial design of a spanner

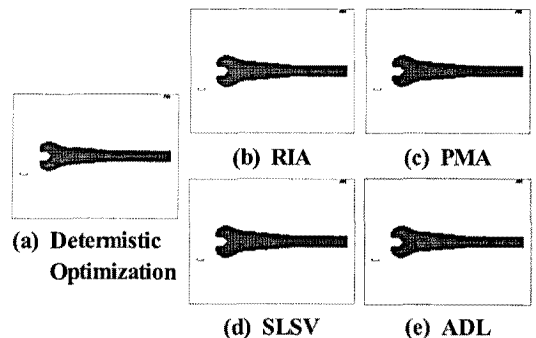


Fig. 8 The results of DSO and RBSO with 3 uncertainties

중앙에 분포하중 $2N/mm$ 을 주었다. 설계영역은 5184개의 4 절점 유한요소로 나누었으며 한계상태방정식은 허용응력 범위 $580MPa$ 이하로 제한조건을 설정하였으며, 탄성계수, 하중 그리고 두께를 확률변수로 고려하였다. 확률변수는 각각 정규분포 특성을 가지며 확률적으로 서로 독립적이며 평균값에 10%의 분산을 갖는다고 가정하였다.

Fig. 8(a)는 허용범위를 $580MPa$ 로 하여 수행한 결정론적 최적설계의 결과이다. Fig. 8(b), (c), (d), (e)는 신뢰도를 99.87% 로 하여 RIA, PMA, SLSV, ADL 수행해 본 결과의 형상이며, 이것에 대한 각각의 체적, 응력, 신뢰도 지수의 값은 Table 3에 나타나있다.

신뢰성 기반 형상 최적설계 RIA, PMA, SLSV, ADL을 각각 적용해 본 결과 최적형상에 수렴성은 RIA, PMA, ADL의 경우 같은 형상에서 수렴한 것을 알 수 있고 시간 비용을 보면 SLSV, ADL에서는 시간비용이 짧은데 비해 RIA, PMA에서는 시간비용이 다소 오래 걸리는데 이것은 이중루프 단일벡터, 단일루프 단일벡터, 적응형 루프 각각의 특징을 잘 나타내는 것임을 다시 한번 확인 할 수 있다.

4.3 토크암

Fig. 9와 같은 토크암에 대하여 확률 제한조건을 고려한 신뢰성 기반 형상 최적화(RIA, PMA, SLSV, ADL)를 수행하고, DSO의 결과와 비교해 보았다. 토크암의 치수는 $L=516.9mm$, $h=108.4mm$ 그리고 $t=3mm$ 이다. 재료 물성치는 $E=207GPa$, 포아송비는 $\nu=0.3$ 이다. 하중은 오

른쪽 중앙에 각각 $5066N$, $2789N$ 을 주었다. 설계영역은 2288개의 4 절점 유한요소로 나누었으며 한계상태 방정식은 허용응력 범위를 $2400MPa$ 로 되게 하는 제한조건을 설정하였으며, 탄성계수, 하중 그리고 두께를 확률변수로 고려하였다. 확률변수는 각각 정규분포 특성을 가지며 확률적으로 서로 독립적이며 평균값에 10%의 분산을 갖는다고 가정하였다.

Fig. 10(a)은 허용범위를 $2400MPa$ 로 하여 수행한 결정론적 최적설계의 결과이다. Fig. 10(b), (c), (d), (e)는 신뢰도를 99.87% 로 하여 RIA, PMA, SLSV, ADL 수행해 본 결과의 형상이며, 이것에 대한 각각의 체적, 응력, 신뢰도 지수의 값은 Table 4에 나타나있다. 신뢰성 기반 형상 최적설계 RIA, PMA, SLSV, ADL을 각각 적용해 본 결과 최적형상에 수렴성은 PMA, SLSV, ADL의 경우 같은 형상에서 수렴한 것을 알 수 있다. 이것은 이중루프 이중벡터, 단일루프 단일벡터, 적응형 루프의 최적해를 각각 검증했다고 볼 수 있다. 시간 비용을 보면 SLSV, ADL에서는 시간비용이 짧은데 비해 RIA, PMA에서는 시간비용이 다소 오래 걸리는 것을 알 수 있다.

Table 3 Results of a Spanner

	Volume (%)	max. von Mises (MPa)	Reliability	Time
DSO	30.8	581.45	0.21	1.00
RIA	32.9	552.79	2.99	8.23
PMA	32.9	552.79	3.00	8.68
SLSV	33.1	550.43	3.02	4.21
ADL	32.9	552.79	3.00	2.23

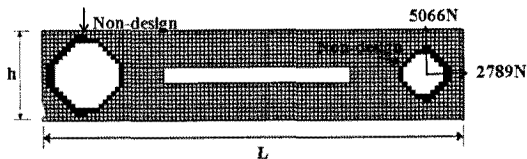


Fig. 9 Initial design of a Torque_Arm

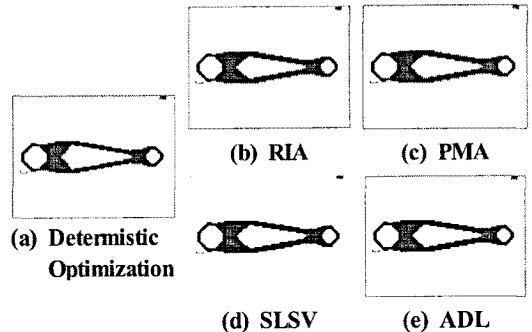


Fig. 10 The results of DSO and RBSO with 3 uncertainties

Table 4 Results of a Torque_Arm

	Volume (%)	max. von Mises (MPa)	Reliability	Time
DSO	41.69	2406.2	0.05	1.00
RIA	44.81	1985.8	3.00	8.88
PMA	44.81	1985.8	3.00	9.45
SLSV	44.60	1998.3	2.98	4.61
ADL	44.81	1985.8	3.00	2.47

5. 결론

ESO기법을 이용한 형상최적화에 RBSO를 수행하여 목표 신뢰도지수를 만족하는 결과를 얻을 수 있었고 확률제약 조건의 만족 여부판정에 한계상태식의 선형 근사화를 변위 제한조건이 아닌 응력 제한조건을 통해 RIA, PMA, SLSV, ADL를 각각 적용하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

- (1) 위상이 아닌 형상에서 변위제한조건이 아닌 응력 제한 조건에 ESO를 이용한 신뢰성 기반 최적설계가 실제 구조물에 효과적으로 적용되는 것을 확인 할 수 있었다.
- (2) 신뢰성 기반 최적설계 이중루프 이중벡터(RIA, PMA), 단일루프 단일 벡터방법(SLSV), 적응형 루프방법(ADL)으로 풀어 비교한 결과 수렴성에는 DLSV, ADL이 시간비용에는 SLSV, ADL이 좋은 것을 알 수 있었다.
- (3) RBSO를 이용하여 구한 최적형상이 DO에 의한 최적형상에 비하여 부재 내부의 부피가 커지는 것을 볼 수 있었다.

참고 문헌

- (1) Querin, O. M., Steven, G. P., and Xie, Y. M., 2000, "Evolutionary Structural Optimization Using an Additive Algorithm," *Finite Elem. Anal. Des.*, Vol. 34, pp. 291~308.
- (2) Xie, Y. M. and Steven, G. P., 1997, *Evolutionary Structural Optimization*, Springer-Verlog, London.
- (3) Jung, H. S. and Cho, S. H., 2004, "Reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures with loading and material uncertainties," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 43, pp. 311~331.
- (4) Kim, C. I., Wang, S. M., Bae, K. R., and Moon, H. G., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization

- with Uncertainties," *Int. J. KSME*, Vol. 20, No. 4, pp. 494~504.
- (5) Bang, S. H. and Min, S. J., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization Using Single-Loop Single-Vector Approach," *KSME*, Vol. 30. No. 8, pp. 889~896.
- (6) Kim, C., Wang, S. M., Hwang, I. H., and Lee, J. G., 2007, "Application of Reliability-Based Topology Optimization for Micro electro mechanical Systems," *AIAA. J.*, Vol. 45, pp. 2926~2934.
- (7) Kim, C. I., Wang, S. M., Bae, K. R., and Moon H. G., 2007, "Reliability-Based Topology Optimization with Uncertainties," *Int. J. KSME*, Vol. 20, No. 4, pp. 494~504.
- (8) Lee, J. O., Yang, Y. S., and Ruy, W. S., 2002, "A Comparative study on reliability and target-performance-based probabilistic structural design optimization," *Computers and Structure*, Vol. 80, pp. 257~269.
- (9) Youn, B. D., Choi, K. K., and Park, Y. H., 2003, "Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization," *ASME. J. Mech. Design*, Vol. 125, pp. 221~232.
- (10) Lee, J. O., Yang Y. S., and Kim B. J., 2005, "Modified Single loop Single Vector Method for Stability and Efficiency Improvement in Reliability-Based Design Optimization," *KCSE*, Vol. 18, No. 1, pp. 51~59.
- (11) Youn, B. D., "Adaptive-loop method for non-deterministic design optimization," *IMEchE*, Vol. 221, pp. 1~13.
- (12) Li, Q., Steven, G. P., Querin Q. M., and Xie, Y. M., 1999, "Evolutionary Shape Optimization for Stress Minimization," *Mechanics Research Communication*, Vol. 2, No. 6, pp. 657~664.