연속형 타부 탐색에서 코시 확률 분포의 역할
(The Role of the Cauchy Probability Distribution in a Continuous Taboo Search)

이 창 용 † 이 동 주 †
(Chang-Yong Lee) (Dongju Lee)

요 약 본 논문에서는 연속형 최적화 문제를 위한 타부 탐색에서 후보 해를 생성하기 위해 사용되는 정규 분포의 단점을 보완하기 위하여 코시 확률 분포에 기초한 후보 해 생성 방법을 제안하였다. 코시 확률 분포는 평균 및 분산 등이 무한대인 확률 분포이며, 분포의 꼬리 부분의 확률이 정규 분포에 비하여 상대적으로 크다. 따라서 코시 분포를 사용하면 변수의 변화가 큰 후보 해가 생성될 확률이 높기 때문에 보다 넓은 변수 공간을 탐색할 수 있는 장점이 있다. 코시 확률 분포를 사용한 타부 탐색의 성능을 기존의 정규 분포를 사용한 방법과 비교 분석하기 위하여 실변수 함수로 구성된 벤치마킹 문제에 적용하여 실험을 실행하였다. 실험 결과를 통해 볼 때, 실험에 사용한 모든 함수에 대하여 코시 분포를 사용한 방법이 보다 나은 결과를 나타냈으며, 또한 통계적 가설 검정을 통하여 코시 확률 분포의 우수성을 입증하였다.
키워드 : 타부 탐색, 타부 목록, 코시 확률 분포, 정규 분포, 연속형 최적화 문제

Abstract In this study, we propose a new method for generating candidate solutions based on the Cauchy probability distribution in order to complement the shortcoming of the solutions generated by the normal distribution. The Cauchy probability distribution has infinite mean and variance, and it has rather large probability in the tail region relative to the normal distribution. Thus, the Cauchy distribution can yield higher probabilities of generating candidate solutions of large-varied variables, which in turn has an advantage of searching wider area of variable space. In order to compare and analyze the performance of the proposed method against the conventional method, we carried out an experiment using benchmarking problems of real valued function. From the result of the experiment, we found that the proposed method based on the Cauchy distribution outperformed the conventional one for all benchmarking problems, and verified its superiority by the statistical hypothesis test.
Key words : taboo search, taboo list, Cauchy probability distribution, normal distribution, continuous optimization problem

1. 서 론

타부 탐색(taboo search)은 최적화 문제를 해결하기 위한 메타 휴리스틱스(meta-heuristics)의 일종으로 F. Glover에 의해 처음으로 제안되었다[1,2]. 타부 탐색은 인간의 기억을 모방한 탐색 기법으로 탐색한 후보 해(solution)들을 기억하여 같은 후보 해를 반복적으로 선택하는 것을 "금지"(taboo)하고 해들이 순환되는 것을 방지하여, 지역 최적해(local optimum)에서 벗어나 전역 최적해(global optimum)를 찾을 수 있도록 고안된 방법론이다. 타부 탐색에서는 탐색한 해를 타부 목록(taboo list)에 저장하여 기억할 수 있기 때문에, 후보 해의 탐색 과정에서 타부 목록에 속하지 않는 해 중에서 최선의 해를 선택함으로 보다 나은 최적해로 이동할 수 있을 뿐만 아니라 새로운 방향으로 탐색 공간을 확장해서 탐색할 수 있다. 또한 타부 탐색은 정량화하기 어려운 제약 조건을 반영할 수 있고, 동시에 여러 제약 조건을 고려할 수 있다는 장점이 있다.

† 정 회 원 : 공주대학교 산업시스템공학과 교수
clee@kongju.ac.kr
djlee@kongju.ac.kr
논문접수 : 2010년 4월 5일
심사완료 : 2010년 6월 7일

정보과학회논문지: 소프트웨어 및 응용 제37권 제8호(2010.8)

초기의 타부 탐색은 주로 이산 변수(discrete variable)를 가지는 조합 최적화 문제(combinatorial optimization problem)에 적용하여 그 효율성이 입증되었다. M. Gendreau 등[3]은 전형적인 조합 최적화 문제인 용량과 경로 길이의 제약을 가진 차량 경로 문제(vehicle routing problem)에 타부 탐색을 적용하였으며, E. Nowicki 등[4]은 타부 탐색을 일정 계획 문제(scheduling problem)에서 최소 일정을 구하는데 적용하였다. 그 후 타부 탐색 알고리즘은 D. Cvijović 등[5]에 의해 실함수 최적화와 같은 연속형 최적화 문제(continuous optimization problem)에도 적용될 수 있도록 확장되었으며, 보다 효율적인 연속형 타부 탐색 알고리즘이 N. Hu[6]와 O. Hajji 등[7]에 의하여 제안되어 여러 유형의 실함수 최적화 문제에 적용되었다. 최근에는 타부 탐색과 다른 방법을 결합한 방법론(hybrid method)에 대한 연구가 많이 진행되고 있는데, 탐색 공간 전체의 탐색은 타부 탐색을 사용하고 지역 최적해로 빨리 수렴하기 위하여 다양한 지역 탐색 기법을 적용하고 있다. R. Chelouah 등[8]은 타부 탐색에 Nelder-Mead 방법을 추가하여 지역 최적해로 빨리 수렴하도록 한 CTSS(Continuous Tabu Simplex Search)기법을 제안하였고, X. Chen 등[9]은 비선형 제약식(*non-linear constraints*)을 가지는 최적화 문제를 풀기 위해 연속형 타부 탐색 방법과 SQP(Sequential Quadratic Programming)를 결합한 기법을 제안하였다.

타부 탐색에서는 '타부 목록'과 '후보 해 생성'이 알고리즘을 구성하는 중요한 요소이다. 타부 목록은 탐색한 해를 기억하는 역할을 하며, 주어진 문제에 따라 다양한 유형의 타부 목록을 사용한다. 일반적으로 타부 목록은 초기에는 비어있는 상태이나, 반복이 진행되면서 선택된 해에 대한 변수들로 구성된다. 연속형 최적화 문제에서는 변수가 연속적인 값을 취할 수 있음으로 변수의 영역으로 타부 목록을 구성하며, 타부 목록에 속한 변수의 영역을 타부 영역(taboo region)이라 부른다. D. Cvijović 등[5]은 탐색 공간을 고정된 크기의 격자(grid)로 나누어 각 격자를 타부 영역으로 사용하였고, N. Hu[6]는 후보 해를 선정하기 위해 미리 정한 여러 크기의 변수 범위를 타부 영역으로 정하였다. 또한 O. Hajji 등[7]은 탐색 공간 전체에 대하여 타부 영역의 합이 차지하는 비율을 일정하게 유지하기 위하여 새로운 타부 영역이 타부 목록에 추가될 때마다 타부 목록에 속한 기존의 타부 영역의 크기를 줄이는 방법을 취하였다.

타부 탐색에서 후보 해 생성은 고정된 크기를 사용하는 방법과 정규 분포를 사용하는 방법 등 크게 두 가지가 사용되고 있다. D. Cvijović 등[5]과 N. Hu[6]는 고정된 크기를 변수가 변할 수 있는 영역으로 정하여 후보 해를 생성하는 방법을 사용하였다. D. Cvijović 등[5]은 각 반복 과정에서 미리 정해진 고정된 격자 모양의 영역을 임의로 선택한 다음, 그 영역 내에서 변수 표본(sample)을 무작위로 선택하여 현재 해에 대한 후보해의 집합을 구성하였다. N. Hu[6]는 크기가 다른 여러 개의 고정된 크기 h_i로 구성된 집합 $H=\{h_i : i=1,2,\cdots,n\}$을 생성한 다음, 무작위로 선정한 1개의 h_i에 대하여 현재 해에 대한 변수를 중심으로 크기가 h_i인 "반경" 내부를 후보 해를 위한 전체 공간으로 간주하고, 그 반경 내에서 후보해 집합을 무작위로 선택하였다.

한편, O. Hajji 등[7]은 현재 해에 대한 변수를 기준으로 정규 분포를 따르는 확률 변수를 사용하여 후보 해를 위한 변수 x를 아래와 같이 생성하였다.

$$x = x^{best} + \sigma N(0,1) \tag{1}$$

여기서 x^{best}는 이전 반복에서 가장 우수한 해에 대한 변수를 나타내며, σ는 매개변수로 정규 분포의 분산에 해당하고, $N(0,1)$은 표준 정규 분포를 따르는 확률 변수를 의미한다. 매개변수 σ는 타부 목록에 속하는 후보 해가 선택되는 정도에 따라 변할 수 있도록 고안되어 있다. N. Hu의 방법과 O. Hajji 등의 방법을 사용한 실험 결과를 볼 때, O. Hajji 등이 사용한 정규 분포를 따르는 후보 해 생성 방법이 보다 효율적인 것으로 알려져 있다[7].

일반적으로 볼 때 지역 최적해가 많이 존재하는 복잡한 최적화 문제를 위한 최적화 알고리즘에서는 고려 대상이 되는 변수의 영역을 골고루 넓게 탐색하는 것(exploration 혹은 diversification)과 우수한 해를 가지는 변수 근처를 집중적으로 탐색하는 것(exploitation 혹은 intensification)이 조화롭게 적용되어야 한다. 이것은 담금질이나 유전자 알고리즘 등과 같은 대부분의 메타 휴리스틱스가 만족해야 할 성질이며, 따라서 타부 탐색에서도 변수 공간의 보다 넓은 탐색과 우수한 해의 주변을 집중적으로 탐색하는 기법이 적용되어야 한다.

그러나 O. Hajji 등이 제안한 정규 분포를 사용한 후보 해 생성 방법은 유한의 분산(finite variance)을 가지는 정규 분포의 특성으로 인하여 후보 해를 생성하는 과정에서 변수의 큰 변화가 용이하지 않다. 따라서 보다 넓은 탐색 공간을 조사하기 힘든 문제가 있다. 물론 정규 분포의 분산을 조절하여 이러한 단점을 어느 정도 해결할 수 있으나, 이 경우에는 정규 분포의 분산을 결정하는 것이 관건이 된다. 즉, 분산이 작은 경우에는 생성된 변수들은 서로 가까운 곳에 존재하기 때문에 보다 넓은 탐색 공간을 조사하기 힘들며, 분산이 큰 경우에는 넓은 영역의 탐색 공간을 조사할 수는 있으나 우수한 해의 주변을 집중적으로 탐색하기 어렵다.

이러한 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 코시 확률 분포(Cauchy probability distribution)를 사용한 후보 해 생성 방법을 제안한다. 진화 프로그래밍과 진화 전략의 돌연변이 연산에 성공적으로 적용[10,11]된 코시 확률 분포는 무한의 분산(infinite variance)을 가지는 확률 분포이며, 분포의 중앙 부분의 확률은 정규 분포에 비하여 적으나 분포의 꼬리 부분의 확률이 상대적으로 크다(2장의 코시 확률 분포 참고). 따라서 코시 분포를 이용하여 후보 해를 구하면 변수의 변화를 작게 할 수 있을 뿐만 아니라 변수의 변화를 크게 할 확률도 정규 분포에 비하여 상대적으로 크기 때문에 변수 공간의 넓은 탐색과 집중적 탐색이 동시에 가능하다. 타부 탐색에서 코시 분포의 성능을 검증하기 위하여 본 논문에서는 O. Hajji 등이 제안한 타부 탐색 알고리즘의 틀을 그대로 유지한 상태에서 정규 분포와 코시 분포를 통한 탐색 방법을 비교 검정하고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어있다. 2장에서는 코시 확률 분포의 특성과 코시 분포를 따르는 확률 변수의 평균 변화율에 관하여 논하였고, 3장에서는 O. Hajji 등이 제안한 알고리즘을 기준으로 정규 분포와 코시 분포를 사용한 변수 생성에 관하여 논하였다. 4장에서는 두 확률 분포를 사용한 알고리즘의 성능을 비교하기 위하여 벤치마킹이 되는 실수 함수들을 선정하여 실험을 하였으며, 그 결과를 통계적으로 분석하였다. 5장에서는 본 논문의 결론을 맺었다.

2. 코시 확률 분포와 평균 변화율

2.1 코시 확률 분포

로렌츠 분포(Lorentz distribution)라고도 알려진 코시 확률 분포[12]는 공명 혹은 공진(resonance) 현상을 설명하는데 많이 사용되는 분포로 아래와 같은 확률 밀도 함수(probability density function)를 가지고 있다.

$$f(x;x_0,\gamma)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\right) \tag{2}$$

여기서 x_0는 위치 모수(location parameter)로 분포의 최대 확률 위치를 나타내며, 중앙값(median)과 최빈값(mode)에 해당한다. 또한 γ는 규모 모수(scale parameter)로 최대값의 반(half)에 해당하는 변수의 크기인 반진폭 너비(half-width)를 나타낸다. 특히 $x_0=0$이고 $\gamma=1$인 경우, 표준 코시 확률 분포라 부르고 확률 밀도 함수는

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \tag{3}$$

로 주어진다. 본 논문에서는 표준 코시 확률 분포를 사용한다.

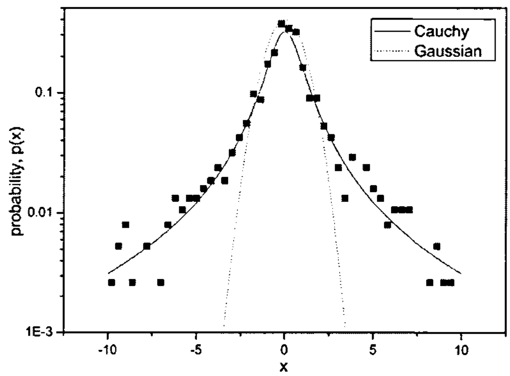


그림 1 표준 정규 분포(점선)와 표준 코시 분포(실선)의 비교. 코시 분포의 꼬리 부분에서 확률이 정규 분포에 비해 상대적으로 큼을 알 수 있다. 확률 $p(x)$는 로그 (log) 축척을 사용하였고, 네모 상자(■)는 코시 분포를 따르는 확률 변수를 생성하여 히스토그램(histogram)을 사용하여 구한 확률 분포이다.

코시 분포의 가장 큰 특징 중 하나는 분포의 모든 적률(moment)이 무한대이기 때문에 평균과 분산 등이 유한한 값으로 정의되지 않다는 것이다. 이것은 유한의 평균과 분산을 가지는 정규 분포와 구별되는 것으로, 그림 1에서 볼 수 있듯이 분포의 꼬리 부분에서 확률이 정규 분포에 비해 상대적으로 크다. 특히 $x \gg \gamma$인 경우, 위의 식 (2)은 근사적으로 $f(x) \propto x^{-2}$으로 표현할 수 있으며, 이때 $f(x)$는 멱급수(power-law)형태로 주어지기 때문에 $x \to bx$로 축척을 변화시켜도 분포의 모양인 $f(x)$는 변하지 않는, 축척 없는 분포임을 쉽게 알 수 있다. 코시 분포를 따르는 확률 변수는 균등 분포(uniform distribution)를 따르는 확률 변수를 생성한 후, 적절한 변환을 통하여 구할 수 있다. 즉, $[-\pi/2, \pi/2]$ 범위에서 균등 분포를 따르는 확률 변수 X에 대하여 $Y=\tan(X)$의 변환을 하면 확률 변수 Y는 코시 분포를 따른다[12]. 그림 1의 네모 상자(■)는 위의 변환을 사용하여 생성한 확률 변수를 통해 분포를 추정한 결과이다.

2.2 평균 변화율

정규 분포와 코시 분포를 사용한 후보 해 생성 방법이 탐색 공간을 어느 정도 효율적으로 조사할 수 있는지 알아보기 위하여 n번 반복한 후 변수 값들의 변화에 대한 평균값인 평균 변화율(mean square displacement)[13]을 계산하였다. O. Hajji 등이 제안한 후보 해의 생성 방법인 식 (1)을 사용하면 k번 반복한 후 변수 x_k은 $(k-1)$번 반복한 후의 변수인 x_{k-1}을 사용하여 아래와 같이 표현된다.

$$x_k = x_{k-1} + \sigma v_{k-1} \tag{4}$$

여기서 v_{k-1}은 표준 정규 분포 혹은 표준 코시 분포를 따르는 확률 변수이고, σ는 변화 정도를 나타내는 상수로 정규 분포의 경우에는 분산에 해당하고, 코시 분포의 경우에는 규모 모수에 해당한다. 위의 식 (4)를 순환적으로 적용하면 n번 반복 후 변수의 변화 d_n은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d_n \equiv x_n - x_0 = \sigma \sum_{k=0}^{n-1} v_k \tag{5}$$

평균 변화율(mean square displacement)이란 n번 반복 후 변수 변화의 평균 제곱근으로 $\sqrt{<d_n^2>}$로 표현되며, 여기서 $<\cdots>$는 평균 (혹은 기대치)을 나타낸다.

표준 정규 분포를 사용하는 경우, v_k는 표준 정규 분포를 따르는 확률 변수임으로 이들의 합인 $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$는 평균이 0이고 분산이 n인 정규 분포 $N(0,n)$을 따른다. 따라서 평균 변화율은

$$\sqrt{<d_n^2>} = \sigma\sqrt{n} \tag{6}$$

이 된다. 위의 식 (6)을 통해 볼 때 n번 반복 후 변수의 변화는 σ와 $\sqrt{n}$에 비례함으로 평균 변화율은 반복 횟수 n에는 약하게 영향을 받으며 주로 σ에 의존한다. 따라서 반복 횟수 n을 크게 하여도 변수의 큰 변화를 기대하기 어렵다.

코시 분포의 경우에는 평균 변화율을 계산하기 위하여 코시 분포가 안정적 분포(stable distribution)이라는 특징을 이용한다. 즉, n개의 확률 변수 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 각각이 위치 모수가 $x_0 = 0$이고 규모 모수가 $\gamma = 1$인 코시 분포를 따를 때, 이들의 선형결합인 $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$은 $x_0 = 0$ 이고 $\gamma = n$인 코시 분포를 따른다. 따라서 평균 변화율은 다음과 같이 주어진다.

$$\sqrt{<d_n^2>} = \frac{\sigma\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+1} dx} \tag{7}$$

위의 식 (7) 우변의 적분 값은 무한대임으로 코시 분포의 경우 평균 변화율은 무한대가 된다. 물론 위의 무한대는 이론적인 것이며, 실제 컴퓨터를 사용하여 값을 생성하면 코시 분포를 따르는 확률 변수들은 항상 유한한 값들로 구성된다. 다만 위의 결과는 코시 분포를 사용하면 평균 변화율이 n과 σ에 비교적 무관하고, 변수의 변화가 클 확률과 평균 변화율이 정규 분포에 비하여 상대적으로 매우 크다는 것을 의미한다. 따라서 코시 분포를 사용하면 σ와 n에 무관하게 넓은 변수 영역을 탐색할 수 있고, 정규 분포를 사용한 경우에 비하여 변화가 큰 변수를 생성할 수 있다.

3. 타부 탐색 알고리즘

타부 탐색에서 코시 분포의 유용성을 검정하기 위하여 Hajji 등[7]이 제안한 표준 정규 분포를 사용한 연속형 타부 탐색 알고리즘에 정규 분포 대신 코시 분포를 적용하였다. 일반적으로 연속형 최적화 문제는 다음과 같이 정의 된다.

$$\text{find } \min f(X) \text{ where}$$
$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in S \text{ and } S = \{x_i \in R, L_i \le x_i \le U_i\}$$

여기서 $f(X)$는 최적화 대상이 되는 연속형 함수이고, X는 n개로 구성된 변수 집합이며, S는 각 변수 x_i에 대한 상한(upper limit) U_i와 하한(lower limit) L_i 값으로 구성된 변수 영역의 집합이다. 위의 $f(X)$를 최적화하기 위하여 Hajji 등이 제안한 정규 분포를 사용한 연속형 타부 탐색 알고리즘은 아래와 같다.

step 1: 반복 횟수 $g=1$로 정하고, 탐색 공간 전체에 대하여 N_p개의 후보 해를 무작위로 구한다. 정규 분포의 표준편차를 $\sigma = (U-L)/10$으로 정한다. 여기서 U와 L는 각각 변수 x의 상한과 하한을 나타낸다.

step 2: 변수 x에 대한 타부 영역 크기를 $l_x(g) = \left(\frac{U-L}{c}\right) \frac{f(x)}{f(x_{g-1}^{best})} \frac{1}{\sqrt[m]{g}}$로 정하고, N_p개의 후보 해 전체를 타부 목록에 포함시킨다. 여기서 g는 반복 횟수를 나타내고 m은 변수의 차원을 나타낸다. 또한 $c = \sqrt[m]{\frac{N_p}{\beta}}$로 주어지는데, 매개 변수 β는 타부목록에 속하는 타부 영역 전체의 탐색 공간 전체에 대한 비율을 나타낸다. 또한 x_{g-1}^{best}는 $(g-1)$번째 반복에서 가장 우수한 해를 가지는 변수를 나타낸다.

step 3: g번째 반복에서 각 변수에 대하여

$$x_g = x_{g-1}^{best} + \sigma N(0,1) \tag{8}$$

을 사용하여 N_p개의 새로운 후보 해를 구한다. 여기서 $N(0,1)$는 표준 정규 분포를 따르는 확률 변수를 나타낸다.

step 4: 만약 N_p개의 새로운 후보 해 중에서 타부 목록에 속하는 해가 95% 이상이면 표준편차를 $\sigma \to \sigma + (U-L)/10$ 만큼 증가시킨 후 step 3으로 돌아간다. 그렇지 않으면 타부 목록에 속하지 않는 후보 해들만으로 최적 해 $f(x_g^{best})$를 구한다.

step 5: $g \to g+1$로 반복 횟수를 증가시키고, 정해진 반복 횟수만큼 step 2에서 step 4까지 반복한다.

코시 분포를 적용한 후보 해의 생성은 위의 알고리즘의 골격은 그대로 유지한 상태에서 식 (8)을 다음과 같이 변경한다. 즉,

$$x_g = x_{g-1}^{best} + C(0,1) \tag{9}$$

여기서 $C(0,1)$은 표준 코시 분포를 따르는 확률 변수를 의미한다. 또한 코시 분포를 사용하는 경우에는 정규 분포에서 사용한 표준 편차 σ를 사용하지 않음으로 위의 step 4에서 σ를 증가시키는 연산을 수행하지 않는다. 따라서 코시 분포를 사용하는 경우 위의 step 4는 아래와 같이 변경된다.

step 4: 만약 N_p개의 새로운 후보 해 중에서 타부 목록에 속하는 해가 95% 이상이면 step 3으로 돌아가서 다시 N_p개의 새로운 후보 해를 생성한다. 그렇지 않으면 타부 목록에 속하지 않는 후보 해들만 대상으로 최적 해 $f(x_g^{best})$를 구한다.

4. 실험 결과 및 분석

코시 확률 분포를 사용한 연속형 타부 탐색의 효과를 살펴보기 위하여 지역 최적해가 많은 벤치마킹 문제에 대하여 타부 탐색 알고리즘을 적용하였다. 표 1은 본 실험에서 사용한 벤치마킹 함수 및 각 함수에 대한 변수 개수와 그 영역을 나타낸 것이다. 본 실험에서 사용한 매개변수는 아래와 같다.

- 후보 해 개수: $N_p = 50$
- 반복 회수: $g = 100$회
- 타부 목록의 탐색 공간 점유율: $\beta = 0.8$

그림 2는 벤치마킹 함수 f_1, f_2, f_3, f_4에 대하여 코시 분포와 정규 분포를 사용한 타부 탐색에서 반복에 따른 함수의 최소값 변화를 나타낸 것이다. 그림 2를 통해 볼 수 있듯이 코시 분포를 사용한 타부 탐색이 정규 분포를 사용한 타부 탐색보다 우수한 결과를 보이고 있다. 또한 반복의 초기에는 정규 분포를 사용한 타부 탐색이 빠른 수렴 속도를 보이나 반복이 거듭될수록 코시 분포를 사용한 타부 탐색이 보다 나은 해를 찾는 것을 알 수 있다. 정규 분포를 사용하는 경우에는 변수의 값의 변화가 상대적으로 적기 때문에 수렴 속도는 빠를 수 있으나 일단 지역 최적해에 도달하면 지역 최적해를 빠져나오기 어렵다. 그러나 코시 분포의 경우에는 보다 넓은 변수 영역을 탐색할 수 있기 때문에 반복의 초기에는 수렴 속도가 느릴 수 있으나, 반복이 진행되면서 보다 우수한 해를 탐색할 확률이 높다.

코시 분포와 정규 분포를 사용한 타부 탐색을 각 벤치마킹 함수들에 대하여 10번 독립적으로 실행하였고, 그 결과를 표 2에 요약하였다. 또한 실험 결과는 매개변수의 값에 비교적 무관하였다. 소요된 계산 시간은 사용한 분포에 거의 영향을 받지 않았는데, 그 이유는 두 분포를 사용한 타부 탐색 알고리즘이 유사하고, 정규 분포와 코시 분포를 따르는 확률 변수를 생성하는데 걸리는 시간의 차이가 거의 없기 때문이다. 물론 실함수 최적화에서 코시 분포가 정규 분포에 비하여 모든 함수에 대하여 항상 우수한 결과를 낳는다는 보장은 없다. 특히 변수 값의 영역이 상대적으로 좁은 경우에는 정규 분포가 보다 나은 결과를 낳을 가능성이 있다. 다만 본 연구에서는 코시 분포의 특성을 이용하면 변수의 영역을 보다 효율적으로 탐색할 수 있기 때문에, 보다 나은 최적화를 성취할 수 있는 가능성을 이론과 벤치마킹 함수를 사용한 실험을 통하여 입증하였다.

코시 분포와 정규 분포 사용에 대한 성능을 비교 분석하기 위하여 표 2에 나타낸 결과에 대한 통계적 검정을 실시하였다. 통계적 검정은 각 함수에 대하여 독립적으로 실시하였고, 동일한 함수에 대하여 두 가지 확률 분포를 사용하여 구한 최적값의 평균에 대한 검정을 실시하였다. 검정을 위하여 설정한 귀무가설(null hypothesis) H_0와 대립가설(alternative hypothesis) H_1은 다음과 같다.

$$H_0: \mu_{cauchy} = \mu_{gauss} \quad H_1: \mu_{cauchy} < \mu_{gauss} \tag{10}$$

여기서 μ_{cauchy}와 μ_{gauss}는 각각 코시 분포와 정규 분포를 사용하여 구한 최적값의 평균을 나타낸다. 즉, 귀무가설은 두 방법의 결과가 통계적으로 차이가 없다는 것이고, 대립가설은 함수를 최적화하는데 코시 분포를 사용하는 것이 정규 분포를 사용하는 것 보다 우수하다는 것이다.

표 1 실험에 사용한 벤치마킹 함수들. N은 변수의 개수를 나타내고 S는 변수의 영역(하한, 상한)을 나타낸다.

벤치마킹 함수	N	S
$f_1 = \sum_{i=1}^{N} \{x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10\}$	30	$(-20, 20)^N$
$f_2 = -\sum_{i=1}^{N} x_i \sin(\sqrt{x_i})$	30	$(-500, 500)^N$
$f_3 = -20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos(2\pi x_i)\right) + 20$	30	$(-32, 32)^N$
$f_4 = \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \prod_{i=1}^{N}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	30	$(-600, 600)^N$

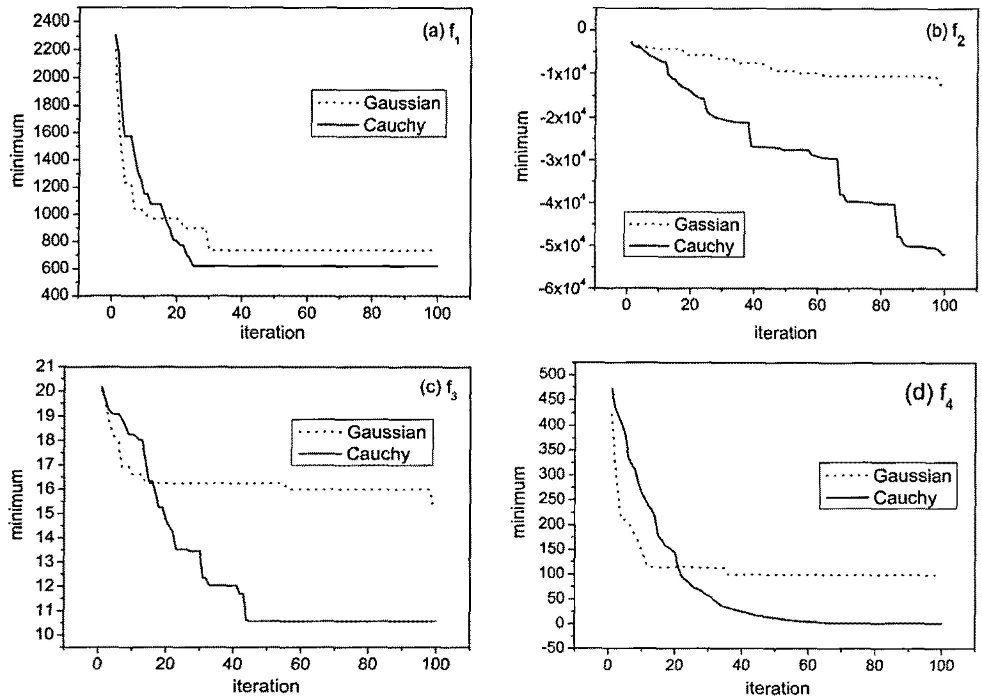


그림 2 표 1의 함수에 대하여 구한 반복에 따른 최적값의 변화. 그림 (a), (b), (c), (d)는 각각 표 1의 함수 f_1, f_2, f_3, f_4 에 대하여 코시 분포와 정규 분포를 사용한 결과이다. 실선은 코시 분포를 사용한 경우를 나타내고 점선은 정규 분포를 사용한 경우를 나타낸다.

표 2 각 함수에 대한 최적값과 통계 분석 결과. 실험 결과는 10번의 독립적 시행 후 구한 최적값의 평균과 표준편차(괄호안), 그리고 t-검정을 위해 구한 검정 통계량 t_0, 자유도(degree of freedom) df 및 기각역 $t_\alpha(df)$ 등으로 구성되어 있다. 기각역은 유의 수준 $\alpha = 0.05$ 에서 계산된 양이다.

벤치마킹 함수	코시 분포 평균 (표준편차)	정규 분포 평균 (표준편차)	t_0	df	기각역 $t_\alpha(df)$
f_1	637.26 (20.96)	685.56 (57.53)	-2.49	11	-1.80
f_2	-105969.84 (53099.60)	-12513.75 (1618.77)	-5.56	9	-1.83
f_3	11.52 (0.63)	15.66 (0.40)	-17.54	15	-1.75
f_4	1.20 (0.03)	93.83 (17.57)	-16.67	9	-1.83

표본의 개수가 약 30개 이상인 경우에는 중심극한정리(Central Limit Theorem)에 의하여 정규 분포를 사용하여 위의 가설을 검정할 수 있으나, 본 실험의 경우에는 표본의 개수가 10임으로 t-검정[14]을 실시하여야 한다. t-검정은 일반적으로 두 모집단의 분산이 동일한 경우와 그렇지 않는 경우 등 두 가지로 구분하는데, 표 1을 통해 볼 때 각 함수에 대하여 두 방법을 사용한 결과에 대한 표본 표준 편차가 매우 다르기 때문에 '모집단의 분산이 동일하지 않다'는 가정 하에 검정을 실시하여야 한다. 이 경우 검정통계량은

$$t_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^1}{n_2}}} \tag{11}$$

로 주어진다. 여기서 $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$ 는 각각 코시 분포와 정규 분포를 사용한 결과에 대한 표본 평균이며, S_1, S_2 는 각각의 표본 표준 편차, 그리고 n_1, n_2 는 표본 개수 $(n_1 = n_2 = 10)$ 이다. 또한 이 경우 검정 통계량 t_0 는 자유도(degree of freedom)가

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 / (n_1 - 1) + \left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2 / (n_2 - 1)} \quad (12)$$

인 t-분포로 근사시킬 수 있음으로 이를 이용하여 t-검정을 시행할 수 있다. 유의 수준 $\alpha = 0.05$ 에서 검정을 실시한 결과, 표 2에서 볼 수 있듯이 모든 함수에 대하여 검정통계량 t_0 는 기각역(critical region) t_α 보다 작음으로 (즉, $t_0 < t_\alpha$), 식 (10)의 귀무가설 H_0 를 기각하고 대립가설 H_1 을 채택할 수 있다. 따라서 통계적 가설 검정을 통해 볼 때, 타부 탐색에서 코시 분포를 사용하는 것이 정규 분포를 사용하는 것에 비하여 성능 면에서 우수함을 입증할 수 있다.

5. 요약 및 결론

본 논문에서는 연속형 최적화 문제를 위한 타부 탐색에서 사용되는 정규 분포의 단점을 보완하기 위하여 코시 확률 분포를 사용한 타부 탐색 방법을 제안하였다. 코시 확률 분포는 분포의 모든 적률이 무한대인 분포이며, 분포의 꼬리 부분의 확률이 정규 분포에 비하여 크기 때문에 변수의 변화가 큰 후보 해를 생성할 확률이 높다. 따라서 보다 넓은 변수 영역을 탐색할 수 있다는 장점이 있으며, 이러한 사실을 평균 변화율을 통하여 이론적으로 입증하였다. 또한 코시 분포를 따르는 확률 변수를 생성하는데 걸리는 시간이 정규 분포의 경우와 차이가 거의 없기 때문에 코시 분포를 사용하는데 추가적인 계산이 필요하지 않다.

코시 확률 분포를 사용한 타부 탐색의 성능을 평가하기 위하여 벤치마킹 함수들을 사용하여 정규 분포의 경우와 비교하였다. 실험 결과는 매개변수의 값에 비교적 무관하였으며, 반복의 초기 단계에서는 정규 분포를 사용한 방법이 수렴 속도가 빨랐으나, 반복이 진행되면서 코시 분포가 보다 나은 최적해를 찾음을 알 수 있었다. 이러한 결과를 통계적으로 입증하기 위하여 각 함수에 대하여 10번 독립적 시행 결과를 사용하여 통계적 가설 검정을 실행하였으며, 벤치마킹으로 사용한 모든 함수에 대하여 코시 확률 분포를 사용한 후보 해 탐색 방법이 정규 분포의 경우에 비하여 우수함을 입증할 수 있었다.

코시 분포를 사용한 연속형 탐부 탐색 알고리즘은 향후 많은 연구를 필요로 하는데, 다음 두 가지 측면은 언급할 만하다. 첫째, 본 연구에서는 코시 분포의 규모 모수 값을 $\gamma = 1$ 로 고정시킨 표준 코시 분포를 사용하였는데, γ가 변수의 변화 정도를 결정하는 매개변수임을 고려 할 때, 다양한 γ 값을 사용한 최적화 알고리즘에 대한 연구가 필요하다. 둘째, 본 논문에서는 코시 확률 분포의 장점을 살펴보기 위하여 단순히 기존 알고리즘에 코시 확률 분포를 접목하였는데, 향후 코시 확률 분포의 장점을 최대한 살릴 수 있는 새로운 연속형 타부 탐색 알고리즘에 대한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

[1] F. Glover, "Tabu search - Part I," *ORSA J. Comput.*, vol.1, pp.190-206, 1989.

[2] F. Glover, "Tabu search - Part I," *ORSA J. Comput.*, vol.2, pp.4-32, 1990.

[3] M. Gendreau, A. Hertz, G. Laporte, "A Tabu Search Heuristic for the Vehicle Routing Problem," *Management Science*, vol.40, pp.1276-1286, 1994.

[4] E. Nowicki and C. Smutnicki, "A Fast Tabu Search Algorithm for the job shop problem," *Management Science*, vol.42, pp.797-813, 1996.

[5] D. Cvijović and J. Klinowski, "Taboo search - an approach to the multiple minima problem," *Science*, vol.267, pp.664-666, 1995.

[6] N. Hu, "Tabu search method with random moves for globally optimal design," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol.35, pp.1055-1070, 1992.

[7] O. Hajji, S. Brisset, and P. Brochet, "A new tabu search method for optimization with continuous parameters," *IEEE Trans. Magn.*, vol.40, pp.1184-1187, 2004.

[8] Chelouah, R., P. Siarry, "A hybrid method combining continuous tabu search and Nelder-Mead simplex algorithms for the global optimization of multiminima functions," *EJOR*, vol.161, pp.636-654, 2005.

[9] Chen, X., J. Yang, Z. Li, D. Tian, and Z. Shao, "A combined global and local search method to deal with constrained optimization for continuous tabu search," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol.76, pp.1869-1891, 2008.

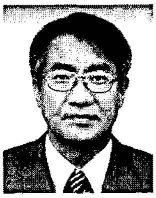
[10] X. Yao and Y. Lin, "Fast evolutionary programming," in *Evolutionary Programming V: Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming*, MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

[11] X. Yao and Y. Lin, "Fast evolutionary strategies," in *Evolutionary Programming VI: Proceedings of the Sixth Annual Conference on Evolutionary Programming*, pp.151-161, Springer, 1997.

[12] R, Hogg and A. Craig, *Introduction to mathematical statistics*, 4th Ed., Macmillan Publishing Co., Inc. New York, 1978.

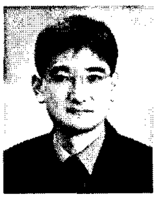
[13] A. Bunde and S. Halvin, *Fractals in Science*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[14] 김우철 등, *통계학 개론*, 영지문화사, 2000.



이 창 용

1983년 서울대학교 계산통계학과 졸업(이학사). 1995년 미국 텍사스 주립대학교(Univ. of Texas at Austin) 물리학과 졸업(이학박사). 1996년~1998년 한국전자통신연구원 선임연구원. 1998년~2007년 공주대학교 산업정보학과 교수. 2007년~현재 공주대학교 산업시스템공학과 교수. 관심분야는 진화 연산 알고리즘 및 최적화 문제, 복잡계 네트워크(complex networks), 생물정보학(bioinformatics) 등



이 동 주

1996년 동아대학교 산업공학과 졸업(공학사). 1998년 Texas A&M University 석사, 2002년 Texas A&M University 산업공학과 졸업(공학박사). 2002년~2003년 미국 Texas Transportation Institute 연구원, 2003년~현재 공주대학교 산업시스템공학과 부교수. 관심분야로는 최적화, SCM, Simulation 등