<학술논문> DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.11.1691 ISSN 1226-4873

비정규 분포에 대한 통계적 모멘트와 확률 제한조건의 민감도 해석

허 재 성*† · 곽 병 만**
* 한국항공우주연구원 회전익기사업단, ** 한국과학기술원 기계공학과

Expansion of Sensitivity Analysis for Statistical Moments and Probability Constraints to Non-Normal Variables

Jae-Sung Huh*† and Byung-Man Kwak**
* Rotorcraft Program Office, KARI,
** Dept. of Mechanical Engineering, KAIST

(Received June 24, 2010 ; Revised August 27, 2010 ; Accepted August 30, 2010)

Key Words : Sensitivity Analysis(민감도 해석), Statistical Moment(통계적 모멘트), Probability Constraint(확률 제한조건), Moment Method(모멘트 방법), Non-Normal Distributions(비정규 분포)

초록: 설계단계에서 시스템의 불확실성을 반영하려는 노력이 다양하게 이루어지고 있으며, 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계는 이에 대한 대표적인 설계 방법론이다. 이러한 최적화 수식에는 성능함수의 평균, 표준편차와 확률제한조건이 목적함수와 제한조건으로 주로 활용된다. 그러므로, 이러한 통계적 특성치를 효과적으로 계산하는 것은 필수적이며, 더 나아가 최적화 과정에서 비선형 계획법이 일반적으로 활용되므로 민감도가 반드시 필요하다. 본 연구에서는 통계적 모멘트와 확률제한조건에 대해 적분 형태로 정의되는 민감도 수식을 비정규 분포로 확장하고자 한다. 얻어진 민감도 해석 결과는 통계적 모멘트와 손상확률이 설계점에서 계산된 경우, 민감도를 얻기 위해 추가로 성능함수를 계산할 필요가 없음을 보여주므로 효율성 측면에서 우수하다. 그러나, 민감도 수식이 성능함수와 확률밀도함수의 미분과정에서 얻어지는 함수의 곱으로 정의되므로, 동일한 수치적분 방법이 적용되는 경우 민감도 해석 결과는 통계적 모멘트 결과의 정확도에 미치지 못할 가능성이 있다.

Abstract: The efforts of reflecting the system's uncertainties in design step have been made and robust optimization or reliability-based design optimization are examples of the most famous methodologies. The statistical moments of a performance function and the constraints corresponding to probability conditions are involved in the formulation of these methodologies. Therefore, it is essential to effectively and accurately calculate them. The sensitivities of these methodologies have to be determined when nonlinear programming is utilized during the optimization process. The sensitivity of statistical moments and probability constraints is expressed in the integral form and limited to the normal random variable; we aim to expand the sensitivity formulation to non-normal variables. Additional functional calculation will not be required when statistical moments and failure or satisfaction probabilities are already obtained at a design point. On the other hand, the accuracy of the sensitivity results could be worse than that of the moments because the target function is expressed as a product of the performance function and the explicit functions derived from probability density functions.

1. 서 론

공학시스템을 해석하고 설계하는 단계에서 시스템 자체 혹은 시스템의 사용 환경에서 필연적으로 존재하는 불확실성(Uncertainty)에 의한 영향을 정량화하고 이를 해석 및 설계에 반영하려는 연구가 다양한 분야에서 이루어지고 있다. 공학 시스템 혹은 이를 구성하는 서브 시스템(Sub-system) 및 부품 단위에서 존재하는 대표적인 불확실 요소는 물성치의 산포, 공차에 의한 구조물의 형상 및 치수의 변화이고, 사용환경 측면에서는 하중 및 온도 조건의 다양성 등이다. 이러한 불확실성은

† Corresponding Author, jshuh@kari.re.kr

시스템의 성능 및 수명을 설계 의도와 다르게 저하시키는 요인이 되므로, 시스템의 특성에 대한 통계적 특성을 정확히 파악하여 설계에 반영하여야 한다. 이를 달성하기 위해서는 시스템의 성능이 수학적으로 정의되어야 할 뿐만 아니라, 그 성능함수의 통계적 특성치인 평균, 표준편차 혹은 성능함수의 확률밀도함수(Probability Density Function)도 정확히 추정이 가능해야 한다. 이러한 통계적 특성치를 수치적으로 추정하는 다양한 방법론들에 대한 연구가 진행되어 왔으며, 최근에 실험계획법을 활용하는 연구가 활발이 이루어지고 있다. 그 대표적인 방법으로 D'Errico 와 Zaino,[1] Zhao 와 Ono,[2] Seo 와 Kwak,[3] Lee 와 Kwak,[4] Huh 와 kwak,[5] Kim 과 Lee 등[6] 등이 제안한 방법들이 있다. 더 나아가 이러한 방법론을 최적설계 알고리즘과 통합한 강건 최적설계(Robust Optimization) 혹은 신뢰도 기반 최적설계(Reliability-Based Design Optimization)에 적용하여 불확실성을 설계에 적극적으로 도입하려는 노력도 역시 다양하게 이루어지고 있다.[7~9]

위의 두 설계 방법에서는 주로 성능 함수의 평균과 표준편차로 정의되는 목적함수 혹은 그에 대응하는 다른 지수와 손상 확률(Failure Probability)로 정의되는 확률 제한조건으로 구성된 최적 설계 수식화를 활용한다. 이와 같이 두 방법 모두 최적 설계 수식화를 기반으로 하고 있으므로, 최적 해를 탐색하기 위해서 방향 탐색과정(Searching Direction)이 필요하며, 이는 목적함수 및 제한조건에 대한 민감도(Sensitivity)를 요구한다. 즉, 성능함수의 평균, 표준편차에 대한 미분 혹은 확률 제한조건의 미분이 필요함을 의미한다. 확률 제한조건의 경우 손상확률을 계산하는 방법에 따라 민감도 수식이 달라지는데, 본 연구에서는 4 차 통계적 모멘트와 피어슨 시스템(Pearson System)을 기초로 한 모멘트 방법(Moment Method)[3~5]에 대한 민감도 해석을 수행하고자 한다. 또한 정규분포로 정의되는 확률변수에 대한 민감도가 아니라, 비정규분포로 정의되는 설계변수에 대한 성능함수의 평균, 표준편차와 확률 제한조건에 대한 적분 형태의 민감도 수식을 유도하고자 한다.

2. 민감도 해석

2.1 확률 제한조건 및 모멘트의 민감도 해석

서로 독립적이라고 가정하는 확률변수 x_i(i=1, 2, 3, …, N)에 대해 성능함수 $g(\mathbf{x})$의 k 차 통계적 모멘트(Statistical Moment)는 아래와 같이 정의가 된다.

$$E\{g^k(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(x_1,x_2,\Lambda,x_N)-\mu_g\right]^k\prod_{i=1}^{N}\phi_i(x_i)dx_1dx_2\Lambda\, dx_N \tag{1}$$

여기서 ϕ_i는 i 번째 확률밀도함수를 의미한다.

1, 2 차 모멘트는 성능함수의 평균(Mean) μ과 분산(Variance) σ^2 을 의미하며, 왜도(Skewness) γ_1(혹은 $\sqrt{\beta_1}$)는 3 차 모멘트를 표준편차(Standard Deviation)의 3 제곱으로 나눈 값이다. 즉, $\sqrt{\beta_1}=E\{g^3\}/\sigma^3$ 이다. 첨도(Kurtosis) γ_2(혹은 β_2)는 4 차 모멘트와 $\beta_2=E\{g^4\}/\sigma^4$ 관계를 가진다.

통계적 모멘트를 기반으로 하는 신뢰도 해석방법(Reliability Analysis)에서는 보편적으로 식 (1) 처럼 정의되는 성능함수의 모멘트 정보와 피어슨 시스템과 같은 확률분포의 근사화 기법을 활용하여 성능함수의 확률밀도함수를 추정하고, 이로부터 손상 혹은 만족 확률(Failure or Satisfaction Probability)을 계산한다. 일반적으로 4 차 모멘트까지를 많이 활용하므로 손상 혹은 만족확률은 아래 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} G &= \Pr[g(\mathbf{x})\le 0] \\ &= \Pr(\mu_g,\sigma_g,\sqrt{\beta_{1g}},\beta_{2g}) \end{aligned} \tag{2}$$

강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계에서 설계변수는 주로 확률 변수 x_i 의 평균이므로, 식 (2)는 연쇄 규칙(Chain rule)에 의해 아래 식과 같이 정리된다. 그리고, 식 (3)의 각 항에서 $g(\mathbf{x})$의 통계적 모멘트에 대한 손상확률의 편미분은 피어슨 시스템과 유한 차분법(Finite Difference Method)를 통해 비교적 쉽고 빠르게 계산이 가능하다. 그러므로, x_i의 평균에 대한 $g(\mathbf{x})$의 통계적 모멘트에 대한 미분이 본 연구에서 다루고자 하는 민감도의 핵심이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\mu_{x_i}} &= \frac{\partial G}{\partial\mu_g}\frac{\partial\mu_g}{d\mu_{x_i}}+\frac{\partial G}{\partial\sigma_g}\frac{\partial\sigma_g}{d\mu_{x_i}} \\ &\quad +\frac{\partial G}{\partial\sqrt{\beta_{1g}}}\frac{\partial\sqrt{\beta_{1g}}}{d\mu_{x_i}}+\frac{\partial G}{\partial\beta_{2g}}\frac{\partial\beta_{2g}}{d\mu_{x_i}} \\ &\cong \frac{\Delta G}{\Delta\mu_g}\frac{\partial\mu_g}{d\mu_{x_i}}+\frac{\Delta G}{\Delta\sigma_g}\frac{\partial\sigma_g}{d\mu_{x_i}} \\ &\quad +\frac{\Delta G}{\Delta\sqrt{\beta_{1g}}}\frac{\partial\sqrt{\beta_{1g}}}{d\mu_{x_i}}+\frac{\Delta G}{\Delta\beta_{2g}}\frac{\partial\beta_{2g}}{d\mu_{x_i}} \end{aligned} \tag{3}$$

Huh 와 Kwak[10]은 이미 식 (3)에서 x_i 의 평균에

대한 $g(\mathbf{x})$의 통계적 모멘트의 미분을 아래 식 (4) ~ (7)과 같이 유도하였다.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n\right) \tag{4}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})\cdot\frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left[\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)\right]dx_1\Lambda\ dx_n$$

$$2\sigma\ \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\sigma_g$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^2\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^2\cdot\frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left[\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)\right]dx_1\Lambda\ dx_n$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty} 2\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]\cdot\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^2\cdot\frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left[\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)\right]dx_1\Lambda\ dx_n \tag{5}$$

$$3\sigma_g^2\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}\cdot\sqrt{\beta_{1_g}}+\sigma_g^3\frac{\partial\sqrt{\beta_{1_g}}}{\partial \mu_{x_i}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^3\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^3\cdot\frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left[\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)\right]dx_1\Lambda\ dx_n +$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty} 3\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^2\cdot\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n \tag{6}$$

$$4\sigma_g^3\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}\cdot\beta_{2_g}+\sigma_g^4\frac{\partial\beta_{2_g}}{\partial \mu_{x_i}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^4\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^4\cdot\frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left[\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)\right]dx_1\Lambda\ dx_n +$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda\int_{-\infty}^{\infty} 4\left[g(\mathbf{x})-\mu_g\right]^3\cdot\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\phi_i(x_i)dx_1\Lambda\ dx_n \tag{7}$$

식 (5) ~ (7)까지 민감도 수식은 성능함수 평균에 대한 미분인 식 (4)와 식 (4) ~ (7)에 공통으로 포함되어 있는 x_i 의 평균(μ_{x_i})에 대한 i 번째 확률밀도함수(ϕ_i)의 미분만 얻어지면 손쉽게 얻어진다. 그러므로, μ_{x_i}에 대한 ϕ_i 의 미분이 민감도 해석의 핵심 사항이 되며, Huh 와 Kwak[10]은 x_i 가 정규분포인 경우에 대해 이미 아래와 같은 식으로 유도하였다.

$$\frac{\partial \phi_i(x_i)}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{x_i-\mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}\cdot\phi_i(x_i) = H_i(x_i)\cdot\phi_i(x_i) \tag{8}$$

본 연구에서는 정규분포에서 로그-노말(Log-normal), 베타(Beta) 분포와 같은 비정규 분포로 민감도 수식을 확장하고자 한다.

2.2 비정규 확률밀도함수에 대한 민감도

비정규 분포로는 로그-노말, Rayleigh, 베타, 균일(Uniform) 분포 등과 같은 확률 분포가 있으며, 본 절에서는 (a, +∞) 영역에서 아래 식과 같이 정의되는 Rayleigh 분포에 대한 민감도 수식을 상세히 유도하고자 한다. 단, x_i 가 서로 독립적이라고 가정하므로 본 절에서는 수식 전개의 편의를 위해 아래 첨자 i 를 생략하고 기술하고자 한다.

$$\phi(x) = \frac{x-a}{s^2}e^{\frac{-(x-a)^2}{2s^2}} \tag{9}$$

여기서, a 와 s 는 Rayleigh 확률밀도함수를 정의하는 파라미터이며, x 의 평균은 아래 식처럼 이 두 파라미터의 합으로 구성된다.

$$\mu_x = a+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot s \tag{10}$$

식 (9)의 Rayleigh 확률밀도함수와 식 (10)의 μ_x 이 모두 파라미터 a 와 s 로 정의되고, $g(x)$ 평균은 $g(x)$와 $\phi(x)$의 곱으로 정의되므로, 연쇄 규칙에 의해 아래와 같이 전개가 가능하다.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_x} = \frac{\partial}{\partial \mu_x}\left(\int_a^{\infty} g(x)\cdot\phi(x)dx\right) \tag{11}$$
$$= \frac{\partial \mu_g}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial \mu_x}+\frac{\partial \mu_g}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial \mu_x}$$

Rayleigh 분포를 가지는 확률변수 x 의 평균으로부터 파라미터 a 와 s 에 대한 μ_x의 미분은 간단히 1 과 $\sqrt{2/\pi}$ 로 각각 계산된다. 식 (11)에서 유도되지 않은 미분인 μ_g 에 대한 a 와 s 의 미분은 아래 식과 같이 정리되며, 이 중 식 (12)는 유한 차분법에 의해 쉽고 정확히 계산이 가능하다.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\int_a^{\infty} g(x)\cdot\phi(x)dx\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\int_a^\infty g(x)\cdot\phi(x)dx\right) = \int_a^\infty g(x)\cdot\frac{\partial \phi}{\partial s}dx \tag{13}$$

식 (13)에서 Rayleigh 확률밀도함수에 대한 파라미터 s 의 미분은 아래 식처럼 간단히 유도된다.

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial s} = \left[-\frac{2}{s} + \frac{(x-a)^2}{s^3}\right]\cdot\phi(x) = H(x)\cdot\phi(x) \tag{14}$$

그러므로, 식 (11)에 파라미터 a 와 s 을 μ_x 에 대해 미분한 결과인 1, $\sqrt{2/\pi}$ 와 식 (14)를 대입하여 정리하면, 아래 식처럼 최종 민감도 수식이 얻어진다. 이 식에서 첫 번째 항은 앞서 설명하였듯이 유한 차분법을 통해 쉽게 얻어지며, 두 번째 항은 식 (13)과 (14)에 의해 아래 식처럼 정리 가능하며, 이는 정규분포의 민감도 수식과 동일한 형태인 $g(x)\cdot H(x)$에 대한 모멘트로 표현이 된다.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_x} \cong \frac{\Delta \mu_g}{\Delta a}\times 1 + \left\{\int_a^\infty g(x)\cdot H(x)\cdot\phi(x)dx\right\}\times\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{15}$$

추가로 분산은 식 (5)와 평균에 대한 미분인 식 (15)를 활용하여 아래 식과 같이 얻을 수 있으며, 왜도 및 첨도 역시 분산과 유사하게 유도가 가능하다.

$$\begin{aligned} &2\sigma_g \frac{\partial}{\partial \mu_x}\sigma_g \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_x}\left(\int_a^\infty \left[g(x)-\mu_g\right]^2\cdot\phi(x)dx\right) \\ &= \frac{\Delta}{\Delta a}\left(\int_a^\infty \left[g(x)-\mu_g\right]^2\cdot\phi(x)dx\right)\times 1 \\ &\quad + \left\{\int_a^\infty \left[g(x)-\mu_g\right]^2\cdot H(x)\cdot\phi(x)dx\right\}\times\sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned} \tag{16}$$

아래 두 식처럼 각각 정의되는 로그-노말 분포, 베타 분포에 대한 μ_x 의 민감도 해석도 정규분포와 Rayleigh 분포와 동일한 절차로 수행이 가능하다.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\cdot s}e^{\frac{-(\log x - m)^2}{2s^2}} \tag{17}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\beta(p,q)}\cdot\frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}} \tag{18}$$

여기서, m, s 는 식 (17) 로그-노말 분포의 파라미터이며, a, b, p, q 는 식 (18) 베타 분포의 파라미터이다. 또한, 식 (18)에 기술된 $\beta(p, g)$는 베타 함수(Beta Function)로써 아래의 식처럼 적분 형태로 정의된다.

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{19}$$

로그-노말과 베타 분포에 대해 성능함수 평균에 대한 민감도 수식은 각각 아래의 두 식과 같이 유도 가능하다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mu_g(x;m,s)}{\partial \mu_x} \\ &= \int_0^\infty g(x)\cdot\left[\frac{1}{\mu_x}\left(-\frac{1}{s^2} + \frac{\log x - m}{s^2} + \frac{(\log x - m)^2}{s^4}\right)\right]\cdot\phi(x)dx \\ &= \int_0^\infty g(x)\cdot H(x)\phi(x)dx \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_x} &= \frac{\partial \mu_g(x;a,b,p,q)}{\partial \mu_x} \\ &= \frac{q(b-a)}{(\mu_x-b)^2}\cdot\int_a^b g(x)\cdot H_1(x)\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p(a-b)}{(\mu_x-a)^2}\cdot\int_a^b g(x)\cdot H_2(x)\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p+q}{q}\cdot\int_a^b g(x)\cdot H_3(x)\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p+q}{q}\cdot\int_a^b g(x)\cdot\left[\frac{x-b}{a-b}H_5(x)\right]\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p+q}{q}\cdot\int_a^b\left[\frac{x-b}{a-b}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x} + \frac{g(x)}{a-b}\right]\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p+q}{p}\cdot\int_a^b g(x)\cdot H_4(x)\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p+q}{p}\cdot\int_a^b g(x)\cdot\left[\frac{x-a}{b-a}H_5(x)\right]\cdot\phi(x)dx \\ &+ \frac{p+q}{p}\cdot\int_a^b\left[\frac{x-a}{b-a}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x} + \frac{g(x)}{b-a}\right]\cdot\phi(x)dx \end{aligned} \tag{21}$$

여기서, 식 (21)에 정의된 $H_1 \sim H_5$ 는 아래와 같다.

$$H_1 = \left[\log(x-a) - \log(b-a) - \psi_0(p) + \psi_0(p+q)\right]$$

$$H_2 = \left[\log(b-x) - \log(b-a) - \psi_0(q) + \psi_0(p+q)\right]$$

여기서 $\psi_n(z) = d^{n+1}(\log[\Gamma(z)])/dz^{n+1}$ 이다.

$$H_3 = \left[\frac{x(p+q-1) - b(p-1) - aq}{(b-a)(x-a)}\right]$$

$$H_4 = \left[\frac{x(p+q-1)-bp-a(q-1)}{(b-a)(b-x)} \right]$$

$$H_5 = \frac{b+a-2x}{b-x}$$

정규분포 및 기타 다른 비정규분포와 상이하게 베타 분포에 대한 민감도 수식이 식 (21)처럼 복잡한 것은 우선 베타 확률밀도함수를 정의하는데 4 개의 파라미터가 필요하고, 적분 영역이 (a, b)이기 때문이다. Rayleigh 분포의 경우와 비교하면, 베타 분포는 4 개의 파라미터로 정의되어 식 (11)에 비해 4 개의 항으로 우선 전개가 되며, 적분 영역도 (a, b)이기 때문에 Rayleigh 분포에 비해 더 복잡하게 미분이 되며, 이를 정리하면 최종 식 (21)처럼 총 8 개의 항으로 유도된다. 이러한 복잡함에도 불구하고, 식 (21)의 각 항은 앞의 두 비정규분포 혹은 Rayleigh 분포에 대한 민감도 수식과 거의 동일하게 성능함수, 확률밀도함수로부터 유도된 함수와 베타 확률밀도함수로 구성된다.

본 절에서 얻어진 민감도 수식 (15), (16), (20), (21)을 종합하면, 비정규 분포로 정의되는 확률변수의 평균에 대한 평균, 표준편차와 확률제한조건 (Pr[g≤0])의 민감도 수식은 성능함수 $g(\mathbf{x})$, 확률밀도함수 ϕ_i 와 미분과정에서 얻어지는 함수인 $H_i(x_i)$의 곱으로 이루어진 함수의 적분형태로 최종 표현된다. 그러므로, 식 (1)과 같이 정의되는 성능함수의 k 차 통계적 모멘트와 동일한 적분 형태를 가지므로, 동일한 수치적분 방법을 적용하여 민감도 값을 얻을 수 있게 된다. 예를 들어, 전조합법을 이용한 모멘트 방법(Full Factorial Moment Method, FFMM)[1,3]을 사용하여 통계적 모멘트를 계산한다면, 모멘트 계산과정에서 얻어진 함수값을 민감도 계산에서도 그대로 사용할 수 있음을 의미한다. 즉, 민감도를 얻기 위해 추가적인 성능함수 계산이 필요하지 않게 된다. 그 이유는 H_i 함수가 앞서 얻은 민감도 수식에서 명시적 함수(Explicit function)로 정의되기 때문이다. 이는 최적화 과정에서 많은 계산량을 요구하는 방향 탐색 과정에서 추가적인 노력이 필요하지 않음을 의미하며, 유한요소해석과 같은 방법을 활용하여 해석 및 최적화를 수행하는 경우, 최적화 효율 관점에서 많은 도움을 제공하게 될 것이다. 그러나, 성능함수 자체와 유도된 함수의 곱으로 정의되는 함수로 인하여 적분 대상인 함수의 비선형성이 통계적 모멘트 계산보다 더 증대될 개연성이 높고, 이는 동일한 수치적분 방법을 민감도에 적용할 경우 해의 정확도가 통계적 모멘트에 비해 상대적으로 감소될 우려가 있음을 내포한다. 아래 수식은 FFMM 을 적용하여 통계적 모멘트를 추정하는 식이다.

$$E\{g^k\} \cong \sum_{i=1}^{m} w_i \left[g(\mu + \alpha_i \sigma) \right]^k \tag{23}$$

여기서 m 이 3 이면 3^n FFMM 이다.

3. 결 론

본 연구에서는 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계에서 주로 필요로 하게 되는 성능함수의 평균 및 표준편차와 확률 제한조건에 대한 적분형태의 민감도 수식에서 확률변수가 비정규분포인 경우에 대한 민감도 해석을 수행하였다. 얻어진 민감도 수식은 정규분포에 비해 다소 복잡한 함수로 정리되지만, 기본적으로는 정규분포와 거의 동일한 형태로 표현된다. 즉, 성능함수, 확률밀도함수, 민감도 해석 과정에서 유도된 함수의 곱으로 정의된다. 그러므로, 평균, 표준편차와 확률제한조건을 계산하는 과정에서의 계산된 성능 함수값을 활용하여 추가적인 함수 계산 없이 민감도 계산이 가능한 장점을 가지고 있다. 실제 현장에서 구조물에 대한 해석은 유한요소해석을 활용하는 경우가 대다수이며, 또한 방대한 요소(Elements)로 모델링이 되는 경우가 많다. 게다가 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계는 기존 최적설계에 비해 많은 유한요소해석을 필요로 하게 되므로, 본 연구에서 제안하는 민감도 수식은 이러한 최적화 과정에서의 계산량을 절감하는데 많은 기여를 하게 될 것이다. 그에 비해 성능함수의 통계적 특성치에 대한 민감도 수식 유도과정에서 얻어지는 함수가 성능함수에 곱해지므로, 동일한 수치적 적분 방법에 대해 민감도의 정확도가 낮아질 가능성이 높으므로 주의하여 적용해야 할 것이다.

참고문헌

(1) D'Errico, J. R., and Zaino Jr., N. A., 1988, "Statistical Tolerancing Using a Modification of Taguchi's Method," *Technometrics*, Vol. 30, No. 4, pp.397~405.

(2) Zhao, Y.G., and Ono, T., 2001, "Moment methods for structural reliability," *Structural Safety*, Vol.23, pp.47~75.

(3) Seo, H. K., and Kwak, B. M., 2002, "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distribution Using Three Point Information," *International Journal for Production Research*, pp.931~944.

(4) Lee, S. H., and Kwak, B. M., 2006, "Response Surface Augmented Moment Method for Efficient Reliability Analysis," *Structural Safety*, Vol. 28, No. 3, pp.261~272.
(5) Huh, J. S., and Kwak, B. M., 2007, "Numerical Verification of the First Four Statistical Moments Estimated by a Function Approximation Moment Method," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 31, No. 4, pp. 490~495.
(6) Kim, D. H., Lee, G. S., Choi, D. H., Choi, J. H., Lee, S. H., and Kwak, B. M., 2008, "Reliability Analysis Using an Enhanced Response Surface Moment Method," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, No. 6, pp.1052~1057.
(7) Han, J. S., and Kwak, B. M., 2001, "Robust Optimal Design of a Vibratory Microgyroscope Considering Fabrication Errors," *Journal of Micromechanics of Microengineering*, Vol. 11, No. 6, pp. 662~671.
(8) Huh, J. S., Jung, B. C., Lee, T. Y., and Kwak, B. M., 2006, "A Study on the Robust Optimal Supporting Positions of TFT-LCD Glass Panel," *Tran. of the KSME (A)*, Vol. 30, No. 8, pp.1001~1007.
(9) Kang, H. Y., and Kwak, B. M., 2009, "Application of Maximum Entropy Principle for Reliability-Based Design Optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 38, No. 4, pp.331~346.
(10) Huh, J. S., and Kwak, B. M., 2008, "The Efficient Sensitivity Analysis on Statistical Moments and Probability Constraints in Robust Optimal Design," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 32, No. 1, pp.29~34.