

## 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생의 추론 유형 분석

김경미<sup>1)</sup> · 김현은<sup>2)</sup>

본 연구에서는 초등학생이 삼각형을 어떻게 정의하고 있으며, 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 조사하였다. 그리고 학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준이 어떤 관련성이 있는지 알아보았다. 연구 결과 대부분의 학생들은 세 개, 꼭짓점, 닫힌 도형, 직선성 등 도형의 본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별하였으며, 몇몇 학생들은 도형의 크기, 방향 등 도형의 비본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별하였다. 특히 기하적 수준이 낮은 몇몇 학생들은 도형의 전체적인 형태에 기초한 시각적 추론을 통하여 도형을 식별하였다.

주요용어 : 삼각형인 예, 삼각형이 아닌 예, 추론

### I. 서론

초등수학에서 기본 도형에 대한 학생들의 초기 개념 형성은 학생들의 기하적 사고와 중등 기하 학습을 위한 초석이 되므로 매우 중요하다. 인지심리학에서 개념 형성과 범주화 과정은 고전적 관점(Classical view)과 원형적 관점(Prototypical view)의 두 가지 관점에서 고찰할 수 있다(Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008). 고전적 관점에 따르면, 범주화는 개념의 모든 예의 공통된 특성이나 성질로 범위를 한정한다. 새로운 특성은 기존에 알고 있는 범주의 특성과의 대비를 통해서 기존 범주의 예인지 아닌지가 결정된다. 원형적 관점은 원형(Prototype)이라는 이상적인 예의 존재를 제안하며, 이 때 원형은 보통 처음 습득된 예로써 추가적인 예와 예가 아닌 것을 구분할 때 비교의 기준이 된다. 원형은 시각-지각적 한계의 결과로 개인의 식별 능력에 영향을 주며, 다른 예를 판정하기 위한 하나의 모델로서 원형적 예를 사용한다(Hasegawa, 1997). 원형적인 예는 기하적 개념 습득에서 중요한 역할을 하는데(Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008), 학생들은 일상 경험과 학교 수업, 수학 교과서에 수록된 다이어그램 등을 통해서 삼각형의 원형을 구성한다. 교사가 수업시간에 삼각형을 설명하기 위해 사용하는 구체물이나 삼각형의 예는 학생들의 삼각형의 원형 형성에 많은 영향을 준다. 많은 교사들이 삼각형의 도입 시 삼각형의 예로 정삼각형과 이등변삼각형을 제시한다. 그로 인해 많은 초등학생들이 둔각삼각형이나 비스듬한 삼각형을 삼각형으로 인식하지 못한

1) 고려대학교 교과교육연구소 (kyungmi@korea.ac.kr)

2) 고려대학교 대학원 (jsmkhe@korea.ac.kr)

다. 예컨대, Shaughnessy와 Burger (1985)의 연구에서 어린 학생들은 길고 폭이 좁은 비스듬한 형태의 삼각형을 삼각형으로 인식하지 못하였다. 따라서 학생들의 초기 개념 형성 과정에서 직관적인 예를 제시하는 것도 중요하지만, 다양한 비직관적인 예도 제시해주어야 한다. 또한 예가 아닌 것도 개념을 명확하게 하는데 있어 중요한 역할을 한다.

수학교육에서 개념의 예(Examples)와 개념에 포함되지 않는 예(Nonexample)에 관한 연구는 기하적 개념의 습득과 관련하여 오랫동안 연구되어 왔다(Cohen & Carpenter 1980; Petty & Jansson 1987; Vinner 1991; Wilson, 1986). Michener (1978)는 예의 종류를 4가지로 분류하여 제시 하였으며, Watson과 Mason (2005)은 개념의 예와 개념에 포함되지 않는 예, 개념과 반대 되는 예를 설명하여 개념의 설명을 위해서 다양한 예를 제시해야 함을 언급하였다. 이렇듯 개념화, 일반화, 추상화, 논증, 유추적 사고와 관련하여 예는 중요한 역할을 한다(Zodik & Zaslavsky, 2008). 예는 개념화에 있어 두 가지 측면을 가진다. 예는 개념을 형성하는 과정에서 중요한 역할을 하기도 하고, 개념 습득의 결과이기도 하다. 예가 아닌 것도 예와 마찬가지로 개념 습득의 결과이다. 개념의 중요한 기능 중의 하나는 예와 예가 아닌 것을 구분하는 것이기 때문에 예가 아닌 것은 개념의 경계를 명료화한다. 기하적 개념에 대한 교수는 개념의 원형적인 예를 제시하는 것 이상의 무언가를 포함해야 한다(Clements et al., 1999; Hershkowitz, 1989). 최근 원형적으로 특정 개념의 예가 아닌 것의 존재 가능성을 조사하고 있으며, 예가 아닌 것이 개념 형성 과정에서 어떤 역할을 하는지 알아보는 연구들이 수행되고 있다(Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008). 최근 많은 연구자들이 수학 교수 - 학습 과정에서 개인의 '예의 범주(Example Space)'를 강조하고 있다(Goldenberg & Mason, 2008; Watson & Mason, 2005).

기본 도형의 개념 이해에 관한 연구들에서 특히 예와 관련된 최근 선행연구들을 살펴보면, Tasmir, Tirosh와 Levenson (2008)은 학생들이 직관적으로 원형적인 예를 안다면 원형적으로 예가 아닌 것도 직관적으로 알 수 있을 것이라 가정하고, 5, 6살 아동을 대상으로 원형적으로 삼각형이 아닌 예가 존재하는지 알아보고, 아동이 어떤 추론을 통해 삼각형이 아닌 예를 식별하는지 알아보았다. 연구 결과 모든 아동들이 사각형과 육각형, 타원을 즉각적으로 삼각형이 아닌 예로 식별하였으며, 속성 추론보다는 시각적 추론을 통해 식별하였다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예는 분석적 사고보다는 시각적 사고를 촉진하였으며, 한 개 이상의 속성이 제거된 삼각형이 아닌 예(예를 들어, 둥근 삼각형 모양, 지그재그 삼각형 모양, 열린 삼각형 모양)에 대해서는 많은 아동들이 삼각형의 본질적인 속성(예를 들어, 세 변, 세 각, 세 꼭짓점, 닫힌 도형 등)에 기초하여 추론하였다.

Monaghan (2000)은 수학적 이해의 평가 수단으로서 중등 수학교육에서 학생들이 쓴 활동지에 사용된 언어의 양상을 조사하였다. 특히 다각형에 대한 학생들의 개념화와 학생들이 다각형들의 관계를 식별하는 과정에 초점을 두었다. Zazkis와 Leikin (2008)은 예비 중등교사를 대상으로 교사들에 의해 생성된 예를 접근 가능성과 정확성, 풍부함, 일반성의 범주에 기초하여 분석하였다.

최근 국내 연구들을 살펴보면, 김수미 · 정은숙 (2005)은 초등학교 4학년 42명 학생들에게 다각형에 대한 예와 예가 아닌 것을 제시하여 지도한 결과 학생들의 성취 수준과는 별개로 다각형의 기본 성질들을 탐구하는데 긍정적인 효과가 나타났다. 연구에 참여한 학생들은 주어진 예와 예가 아닌 것에서 4, 5개 이상의 성질을 발견해 내어 다각형의 개념을 결정짓는 조건이 어떠한 성질인지에 대하여 쉽게 추론하였다. 예와 예가 아닌 것을 구분하는 것은 개념의 이해를 평가하는데 중요한 기준이 되어 의사소통 과정에서 학생들이 개념을 정립하고,

교사가 학생들의 오개념을 점검하고 교정하는데 도움을 준다. 박경미 (2007)는 한국어, 중국어, 영어를 모국어로 사용하는 학생들을 대상으로 도형 개념의 이해와 관련된 언어적 측면을 연구하였다. 연구 결과 학생들은 사물의 이름을 빌려온 용어와 도형의 정의를 반영한 용어를 습득할 때 언어의 영향을 받았다. 또한 많은 학생들이 다각형의 ‘닫혀있음’의 성질을 다각형의 정의 개념으로 이해하고 있었고, 학생들이 제시한 다각형의 예는 단순한 볼록다각형에 제한되어 있었으며 꼭짓점과 변에 대하여 개념이 모호하게 형성되어 있었다. 홍성관·하정임·박철호 (2007)의 연구에 의하면, 몇몇 학생들은 각으로 다각형의 정의를 서술하였으며 다각형의 정의로 ‘닫혀있음’의 성질을 서술하지 않아도 학생들은 닫혀있음의 성질을 이해하고 있었다. 김남희 (2001)는 기하관을 활용하여 학생들이 도형에 대한 흥미와 관심을 갖고 공간 감각 및 수학적 문제해결 능력을 향상시킬 수 있는 구체적인 예를 제시하였고, 이종영 (2001)은 LOGO와 GSP와 같은 기하 소프트웨어를 사용하여 도형을 이루고 있는 구성요소 중 비본질적인 부분을 자유롭게 변화시켜 역동적인 도형을 만들고, 도형 간의 관계를 명확히 이해할 수 있도록 하였다.

우리나라에서는 최근 기본 도형의 개념 이해에 관한 연구들이 이루어졌으나, 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준을 분석한 연구는 아직 수행되지 않았다. 따라서 본 연구에서는 초등학생을 대상으로 삼각형을 어떻게 정의하고 있으며, 학생들이 어떤 추론을 통해서 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는지 알아보려고 한다. 또한 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준은 어떤 관련성이 있는지 알아보려고 한다. 다음은 본 연구의 연구문제이다.

1. 학생들은 삼각형을 어떻게 정의하고 있는가?
2. 학생들은 어떤 추론을 통해서 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하고 있는가?
3. 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준은 어떤 관련성이 있는가?

## II. 이론적 배경

### 1. 기하적 개념의 습득

지금까지 기하적 개념 형성에 관한 많은 연구들이 수행되어 왔다(Battista, 2007; Clements, 2003; Hershkowitz, 1990). 기하적 개념에 관한 많은 연구들은 van Hiele 모델을 이론적 틀로 하고 있다. van Hiele은 학생들의 기하적 사고의 발달 수준을 5수준으로 계층화하였다. van Hiele의 이론에 따르면, 가장 기본적인 수준인 시각적 인식 수준(Visualization or Recognition)에서 학생들은 시각적인 추론을 사용하며, 도형이 각각의 구성요소로 구성되어 있다고 여기기보다는 전체적인 형태를 다룬다. 이 수준에서 학생들은 도형에 이름을 붙일 수 있고 유사하게 보이는 도형들을 구별할 수 있다. 1수준은 주변의 구체물을 외형적인 형태로 인식하는 수준으로 전체적인 형태만을 변별할 수 있는 단계를 말한다. 삼각형, 사각형, 원이 다르다는 것을 인지하지만, 직사각형과 정사각형, 정삼각형과 이등변삼

각형을 구분하지는 못한다. 두 번째 분석적 인식 수준(Analysis or Descriptive)에서 학생들은 다른 도형들이 다른 속성을 가지고 있음을 알기 시작하지만 속성들의 관계는 알지 못한다. 2수준은 구체물에서 벗어나 도형이 학습대상이 되고, 도형이 갖는 성질이 고찰의 방법이 되는 단계이다. 삼각형을 대상으로 그 구성요소가 학습의 방법이 되며, 정사각형과 마름모의 성질은 알지만 포함 관계는 알지 못한다. 세 번째 비형식적 연역 수준(Informal Deduction or Ordering)에서 학생들은 도형의 속성들 사이의 관계를 인지한다. 3수준에서 학생들은 도형에 관한 간단한 성질을 규명할 수는 있으나, 관찰한 결과를 입증할 수 있는 예비적인 보조명제를 구성하지는 못한다. 도형 분류를 정당화하기 위해 비형식적 논증을 제시하는 수준이다. 삼각형에서 두 변의 길이가 같다는 성질을 바탕으로 “삼각형의 두 변의 길이가 같으면 두 각의 크기도 같다”는 명제를 이해하지만, 연역적 증명을 이해하지는 못한다. 네 번째 형식적 연역 수준(Formal Deduction or Deduction)에서는 수학적 명제가 연구의 대상이 되고, 이들 명제들의 논리관계가 학습방법이 됨으로써 연역적 추론이 가능하다. 4수준은 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 그 필요성을 인지할 수 있는 사고 수준이다. 마지막으로 다섯 번째 엄밀화 수준(Rigor)에서는 수학적 논리와 이론이 연구의 대상이 되므로 논리를 엄밀하게 분석하고, 추론함으로써 일반적인 도형의 성질을 발견할 수 있다. 5수준은 여러 수학 체계에 대하여 형식적으로 추론할 수 있는 수준을 말한다.

초등학생의 기하적 수준은 보통 3수준까지를 말하며, 2수준의 분석적 인식 수준에서 학생들이 인식하는 도형의 속성(Attribute)은 본질적인 속성과 비본질적인 속성으로 구분할 수 있다(Hershkowitz, 1989). 수학에서 본질적인 속성은 개념이미지로부터 발현되며, 정의는 개념의 예를 확인하기 위한 필요·충분조건을 포함하기도 한다. 다른 본질적인 속성은 정의로부터 결정될 수도 있다. 만약 사각형(quadrilateral)을 “네 변으로 이루어진 다각형”으로 정의한다면, 사각형은 닫힌 형태이며, 네 개의 꼭짓점과 네 개의 각으로 이루어졌다고 추론할 것이다. 본질적인 속성은 (a)닫힌 도형, (b)네 변, (c)네 꼭짓점, (d)네 각을 포함한다. 비본질적인 속성은 전반적인 도형의 크기(크다 또는 작다), 방향(수평으로 놓였는지)을 포함한다. 교사는 학생들이 예를 확인하고 기하적 개념을 형성하는데 있어 본질적인 속성을 사용하도록 한다. 본질적인 속성에 기초하여 추론한 학생은 van Hiele의 두 번째 수준에서 가장 낮은 수준이다(Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008). 어떤 학생이 도형을 보고 네 개의 변이 있기 때문에 사각형이고, 그렇기에 네 개의 각과 네 개의 꼭짓점이 있다고 한다면 그 학생은 van Hiele의 세 번째 수준에 있는 학생으로 추측할 수 있다. 본질적 속성에 기반한 추론은 나이와 함께 발달된다(Hershkowitz & Vinner, 1983; Hershkowitz, 1989).















## 2. 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예

Tsamir, Tirosh와 Levenson (2008)는 삼각형인 예를 직관적으로 삼각형인 예(도형 1, 4)와 비직관적으로 삼각형인 예(도형 2, 5, 6, 8, 10)로 구분하여 제시하였다. 직관적으로 삼각형인 예로 정삼각형과 이등변삼각형을 제시하였고, 그 외 삼각형이 비스듬하거나 꼭짓점이 아래로 향한 삼각형, 둔각삼각형, 바늘 모양처럼 가늘고 긴 모양의 삼각형 등 직관적으로 삼각형으로 인식하기 어려운 삼각형들을 비직관적으로 삼각형인 예로 제시하였다. 삼각형이 아닌 예도 두 유형으로 구분하였다. 첫 번째 유형은 직관적으로 삼각형이 아닌 예(도형 3, 9, 11)로 학생들이 직관적으로 삼각형이 아님을 알 수 있는 예이다. 예컨대, 원, 정사각형, 정육각형의 경우는 학생들이 즉시 삼각형이 아님을 판별할 수 있다. 두 번째 유형은 비직관

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생의 추론 유형 분석

적으로 삼각형이 아닌 예(도형 7, 10, 12, 14)로 삼각형과 흡사한 부분이 많아 학생들이 삼각형의 예로 잘못 인식하는 경우가 많다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예는 학습자가 직관적으로 삼각형이 아닌 예임을 알 수 있는 경우이고, 비직관적으로 삼각형이 아닌 예는 학습자가 예와의 유사성 때문에 삼각형의 예로 착각하는 경우가 빈번한 경우를 말한다.

<표 II-1> 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예(Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008)

Dimensions	Psycho-didactical	
	Intuitive <sup>1</sup>	Non-intuitive <sup>1</sup>
Mathematical		
Examples	1.  4.  Isosceles triangle      Equilateral triangle	2.  5.  6.  8.  13.  Sideways triangle      Upside down triangle      Right triangle      Scalene triangle      Obtuse triangle
Non-examples	3.  9.  11.  Square      Hexagon      Ellipse	7.  10.  12.  14.  Zig-zag "triangle"      Pentagon      Open "triangle"      Rounded "triangle"

Tsamir, Tirosh와 Levenson (2008)는 삼각형이 아닌 예를 세 가지 범주로 구분하였다. 삼각형이 아닌 원형적인 기하적 모양과 삼각형이 아닌 비-원형적인 기하적 모양, 삼각형의 속성 중 한 개 이상의 속성이 제거된 삼각형 모양으로 구분하였다. 삼각형이 아닌 예로 제시된 정사각형, 정육각형, 타원 등은 삼각형이 아닌 원형적인 기하적 모양에 포함되며, 삼각형이 아닌 비-원형적인 기하적 모양에 <표 II-1>의 도형 10이 포함되는데, 도형 10의 오각형은 전형적인 오각형이 아니며, 삼각형 형태로 인식될 수 있는 오각형이다. 세 번째 범주는 삼각형의 속성 중에 하나 또는 그 이상의 속성을 가지고 있지 않지만, 그 외는 원형적인 삼각형의 대부분의 속성을 가지고 있는 모양이 포함된다. 직관적으로 삼각형인 예, 비직관적으로 삼각형인 예, 직관적으로 삼각형이 아닌 예와 비직관적으로 삼각형이 아닌 예를 구분하는 것과 그것이 학생의 사고에 어떤 영향을 주는지는 매우 중요하다.

### III. 연구방법

#### 1. 참여자

서울시 강북에 소재한 초등학교의 3, 4, 5, 6학년을 대상으로 A구청과 B대학이 주최한 수학교실에 참여하기를 희망하는 학생들을 인터넷으로 접수받은 후 전자추첨을 통하여 무작위

로 30명을 추출하였다. 그 중 수업에 불참한 1명을 제외한 29명의 학생이 본 연구에 참여하였다. 29명은 강북에 소재한 18개 초등학교에 재학 중인 초등학생으로 3학년은 7명, 4학년은 15명이었고, 5학년은 5명, 6학년은 2명이었다. 남자는 14명, 여자는 15명이었다. 가정의 사회경제적 수준은 대부분 중하위권의 학생이었다. 본 연구에 참여한 학생들의 기하적 개념 지식을 알아보기 위하여 진단평가를 실시하였다. 진단평가 결과 모든 학생들은 사각형을 네 변, 네 꼭짓점으로 이루어진 도형으로 정의하였다. 그러나 사각형의 포함관계에 관하여 정확하게 알고 있는 학생은 3명(학생 O, S, BB)뿐이었다. 정사각형(27명), 직사각형(20명), 사다리꼴(20명), 평행사변형(22명), 마름모(17명) 등의 모든 사각형의 종류에 대하여 정확한 설명을 한 학생들 중에서 사각형의 포함관계에 관하여 정확하게 알고 있는 학생은 3명뿐이었다. 도형의 측정영역을 학습한 학생들 중 삼각형과 사각형의 내각의 합, 사각형의 둘레, 넓이를 구하는 문항에 대하여 각각 21명, 28명, 10명의 학생들이 정확히 풀었다. 하지만 원에 관하여 정확한 정의를 내린 학생은 단 1명(학생 DD)뿐이었고 다른 학생들은 원을 둥그런 모양, 곡선으로 되어 있는 것 등의 시각적인 모양으로 인식하고 있었으며 원을 그려보았을 때 정확한 원보다는 원과 함께 타원을 그린 학생들도 있었다. 대부분의 학생이 직각에 대하여 설명하였으나, 6명의 학생들은 직각을 “네모 모양으로 되어있는 각”으로 말하거나 아무 대답도 하지 못하였다. 예각과 둔각의 정확한 정의를 설명한 학생은 17명, 이상과 이하의 개념을 아직 파악하지 못한 학생은 4명, 각의 종류에 대하여 아직 학습하지 않아 무응답을 한 학생은 9명이었다. 또 다각형과 정다각형의 정의를 정확하게 내린 학생들보다는 각의 개수에 대하여 언급하거나 정삼각형, 정사각형 등 정다각형의 한 종류를 말하여 정의하는 학생들도 있었다.

## 2. 연구 설계

초등학생이 삼각형을 어떻게 정의하고 있으며, 어떤 추론을 통해서 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는지 알아보기 위하여 3, 4, 5, 6학년 29명을 대상으로 설문과 면담을 실시하였다. 우선 학생의 일반적인 수학 수준과 수학적 성향 및 사회적 배경에 관한 정보를 알기 위해 진단평가와 사회적 배경 관련 설문을 실시하였다. 학생들이 삼각형을 어떻게 정의하고 있으며, 어떤 추론을 통해서 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는지 알아보기 위하여 삼각형에 관한 설문을 실시하였는데, 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 각각 직관적인 경우와 비직관적인 경우로 범주화하여 설문을 실시하였다. 그 다음 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준은 어떤 관련성이 있는지 알아보기 위하여 설문지의 결과를 토대로 분석 틀을 고안하고, 그 분석 틀에 기초하여 면담지를 작성한 후 학생들과 반구조화 면담을 실시하였다. 설문지로 확인할 수 없는 부분들에 대해서는 개별 면담을 실시하여 확인하였으며, 모든 개별 면담은 비디오로 촬영하여 전사하였고, 이 자료는 학생들의 기하적 수준을 파악하는 자료로 사용되었다.

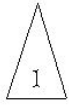






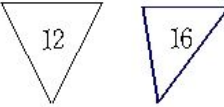
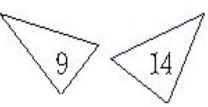
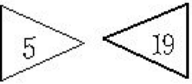
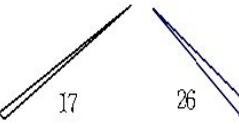
## 3. 자료 수집 및 분석

학생이 작성한 설문지와 평가지, 면담 과정이 녹화된 비디오테이프, 면담 과정에서 학생이

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생의 추론 유형 분석

작성한 활동지와 면담지, 연구자가 적은 기록물과 녹음 내용 등의 자료를 수집하였고, 일정 비교 분석법(Constant Comparative Method)을 사용하여 자료를 분석하였다. 학생들이 삼각형을 어떻게 정의하고 있는지 알아보기 위하여 삼각형의 정의를 쓰게 하고(예를 들어, “삼각형이란 무엇인가요?”), 모눈종이에 여러 가지 삼각형을 그리고 이름을 붙여보게 하였다. 또한 학생들이 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 어떤 추론을 사용하여 식별하고 있는지 알아보기 위하여 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 각각 직관적인 경우와 비직관적인 경우로 범주화하여 설문을 실시하였다. 즉, 직관적으로 삼각형인 예와 비직관적으로 삼각형인 예, 직관적으로 삼각형이 아닌 예와 비직관적으로 삼각형이 아닌 예의 4가지 유형으로 범주화한 31개의 도형을 학생들에게 제시하였다. 그리고 삼각형인 예는 동그라미(O) 표시를 하고, 삼각형이 아닌 예는 엑스(X) 표시를 하게 하였으며, 그렇게 생각한 이유에 대하여 자세히 쓰게 하였다. 추측을 통한 식별의 가능성을 최소화하기 위하여 문항을 무작위로 배치하였다. 학생들이 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 어떤 추론을 사용하여 식별하고 있는지 알아보기 위하여 Tsamir, Tirosh와 Levenson (2008)의 연구에서 사용된 대표 평가 문항들을 본 연구에 맞게 재구성하였다. 다음은 본 연구에서 사용된 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예이다.

<표 III-1> 학생들에게 제시한 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예

별주	예				
직관적으로 삼각형인 예	이동변삼각형 		정삼각형 		
직관적으로 삼각형이 아닌 예	타원 	정사각형 	정육각형 	원 	정오각형 
비직관적으로 삼각형인 예	아래를 향한 삼각형 		비스듬한 삼각형 		
	옆을 향한 삼각형 		뾰족한 삼각형 		

	<p>직각삼각형</p>	<p>둔각삼각형</p>	
비직관적으로 삼각형이 아닌 예	<p>다각형</p>	<p>지그재그 삼각형 모양</p>	
	<p>열린 삼각형 모양</p>	<p>등근 삼각형 모양</p>	
	<p>오목한 삼각형 모양</p>	<p>볼록한 삼각형 모양</p>	<p>부채꼴</p>

학생들이 작성한 설문지를 토대로 분석틀을 고안하였고, 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준이 어떤 관련성을 갖는지 알아보기 위해 임상 면담을 실시하였다. 그리고 학생들의 기하 수준을 van Hiele의 기하적 사고의 발달 수준으로 범주화하기 위하여 학생들과 면담 시 삼각형의 포함관계를 묻는 평가지를 작성하도록 하였다. 이 자료를 분석하고 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는 과정에서 나타난 추론의 특징과 van Hiele의 기하적 사고의 발달 수준의 특징을 비교 대조하여 학생들의 기하적 수준을 결정하였다.

#### IV. 연구결과 및 분석

##### 1. 삼각형의 정의

Vinner (1991)는 수학적 개념은 주로 정의로 획득되며 이 정의를 이용하여 문제를 해결하고 정리를 증명한다고 가정하였다. 이러한 정의는 어떤 말이나 사물의 뜻을 명백히 밝혀 규정하는 상식적인 수준과 더불어 용어의 본질적인 속성을 제시하는 논리적인 정의 또한 학교 수학에서 중요한 역할을 하고 있다. 한국어의 ‘삼각형’, 중국어의 ‘三角形’, 영어의 ‘Triangle’은 모두 ‘세 개의 각을 갖는 도형’이라는 의미의 용어이다. 그에 반해 삼각형에 대한 정의는 세 언어 모두에서 ‘세 개의 선분(변)으로 둘러싸인 도형’으로 용어는 ‘각’의 관점인 반면 정



의는 ‘변’의 관점이다(박경미, 2007). 박경미 (2007)의 연구에 의하면, 학생들은 초등학교에서 삼각형은 세 개의 선분으로 둘러싸인 도형이라고 배웠고, 세 개의 각은 하나의 삼각형을 결정하지 않기 때문에 삼각형에 대한 적절한 정의가 아님에도 불구하고 상당수의 학생들이 용어로부터 추출한 정의를 더 선호하였다. 그러나 본 연구에서는 삼각형을 “변이 3개 있다(M:Def)”와 같이 ‘세 선분으로 둘러싸인 도형’으로 정의하고 있는 학생이 9명, “각과 변이 3개로 이루어진 도형(E:Def)”, “변과 꼭짓점이 3개이고 각이 3개인 도형(G:Def)”과 같이 삼각형의 요소를 2개 이상 제시하여 삼각형을 정의하고 있는 학생이 16명으로 가장 많았다. 학생 A를 제외한 모든 학생들이 삼각형의 요소를 이용하여 삼각형을 정의하였는데, 학생 A는 기하적 수준이 가장 낮은 학생으로 삼각형의 식별 과정에서 대부분 시각적 추론을 통해서 삼각형을 식별하였으며, “삼각형이란 무엇인가요?”라는 질문에 대하여 “세모 모양을 뜻한다(A:Def)”라고 대답하였다. A는 3학년 학생으로 다른 학생들에 비하여 기하적 수준이 낮은 것으로 보였으며, 삼각형을 요소와 성질로 인식 하기 보다는 ‘세모 모양’이라는 원형에 입각하여 ‘세모 모양’을 만족하면 삼각형이 된다고 정의하였다. 특히 본 연구에서는 몇몇 학생들이 삼각형의 본질적인 속성과 함께 ‘삼각형의 세 내각의 합은 180도’라는 삼각형의 성질을 덧붙여 “변이 3개 있는 것, 합이 180도 인 것(J:Def)”과 같이 정의하기도 하였고, “각이 세 개이고 그 세 각의 합이 180도가 되는 도형, 변이 세 개인 도형, 변이 곡선이 아닌 직선인 도형, 꼭짓점이 세 개인 도형(DD:Def)”와 같이 삼각형의 모든 속성을 나열하여 삼각형을 정의하였다. 각이 3개가 모여서 하나의 삼각형을 작도할 수는 없지만 몇몇의 학생들은 ‘삼각형은 각이 3개이다’라는 명제의 역을 참으로 인식하였다. 학생 C, D는 “꼭짓점이 3개 있다(D:Def)”와 같이 꼭짓점의 개수로 삼각형을 정의하였고, 학생 AA는 “삼각형이란 세 각의 크기의 합이 180도인 도형(AA:Def)”와 같이 삼각형의 정의로 삼각형의 성질을 기술하였다. 학생 AA 이 외에도 삼각형의 성질을 학습한 4, 5, 6학년 학생들은 정의와 성질을 구분하기에는 어려움이 있는 초등학생들로 ‘삼각형의 세 내각의 합은 180도’라는 삼각형의 성질을 삼각형의 정의 개념으로 이해하고 있었다. 도형의 정의를 옳게 구성하는 것은 학생들에게 다른 도형과의 관계를 분석하는데 도움을 준다(Driskell, 2004). 따라서 교사는 학생들이 삼각형에 대한 정확한 정의를 알고, 적절한 개념이미지를 갖도록 안내해야 한다.

## 2. 도형의 식별과정에서 나타난 학생들의 추론 유형

본 연구에서는 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 크게 시각적 추론, 속성 추론, 형식적 추론으로 범주화하였다. 시각적 추론은 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 추론할 때 도형을 구성하는 요소와 성질보다는 ‘둥근 모양’, ‘뾰족한 모양’ 등으로 도형의 물리적인 외양에 의존하여 식별하는 것을 의미한다. 학생들이 도형을 관찰하고 식별할 때 기하적 도형의 이름은 아니지만 ‘산’, ‘호리병’, ‘종’ 등과 같이 자신이 나름대로 비-기하적인 이름을 붙여 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는 경우도 시각적 추론에 해당된다.

속성 추론은 비본질적 속성에 의한 추론과 본질적 속성에 의한 추론으로 구별하였는데, 비본질적 속성에 의한 추론은 ‘좁다’, ‘작다’ 등의 도형의 전반적인 크기와 ‘빠뿔다’, ‘균형이 맞지 않다’ 등의 도형이 놓인 방향, 변의 길이와 각의 크기 등의 삼각형의 비본질적 속성에 기초한 추론을 말하며, 본질적인 속성에 의한 추론은 ‘변, 각, 꼭짓점의 유무’와 ‘세 개(Threeness)’라는 의미를 강조한 ‘세 변’, ‘세 각’ 그리고 ‘단한 도형’, ‘직선성’ 등의 본질적인

속성에 기초한 추론을 말한다.

형식적 추론은 ‘정삼각형’, ‘둔각삼각형’ 등의 삼각형의 종류나 ‘원’, ‘육각형’ 등의 다각형의 이름 즉, 기하적인 도형의 이름을 붙여 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별한 경우를 말한다. Tsamir, Tirosh와 Levenson (2008)는 도형의 이름이 옳은지 그른지에 상관없이 “이것은 마름모예요”라는 기하적 도형의 이름을 사용하여 도형에 이름을 붙이는 학생들과 사물의 이름을 빌려와서 “이것은 텐트와 비슷해요”처럼 비-기하적인 이름을 붙이는 학생들도 포함하여 시각적인 추론의 범주에 시각적인 모양과 함께 부분 범주로 도형의 이름 붙이기를 포함하였다. 하지만 본 연구에서는 오각형이지만 삼각형 모양과 비슷하게 생긴 비직관적으로 삼각형이 아닌 예들을 구별할 때 학생들이 사용하는 추론을 분석한 결과 ‘오각형’이라는 도형의 이름을 제시한 학생들과 ‘총알’과 같이 도형이 아닌 형태가 유사한 사물의 이름을 빌려 추론한 학생은 차이가 있다고 판단하고 학생이 “둔각삼각형이니까”와 같이 도형의 정확한 이름을 제시하여 삼각형을 식별한 경우엔 형식적 추론으로 간주하였다.

1) 직관적으로 삼각형인 예

본 연구에서는 29명의 모든 학생들이 이등변삼각형, 정삼각형과 같이 직관적으로 삼각형인 예를 삼각형으로 정확히 식별하였다. 학생들은 교과서와 일상생활에서 많이 접해보았던 직관적인 삼각형에 대하여 의심할 여지없이 삼각형임을 식별하고 곧바로 이유를 적어나갔다. 대부분의 학생들이 직관적인 삼각형의 예에 대하여 변, 꼭짓점, 각 등의 유무와 ‘세 개’라는 삼각형의 본질적인 속성에 기초한 추론을 통해 도형을 식별하였다.

<표 IV-1> 직관적으로 삼각형인 예(IE)의 추론 유형 및 식별 결과

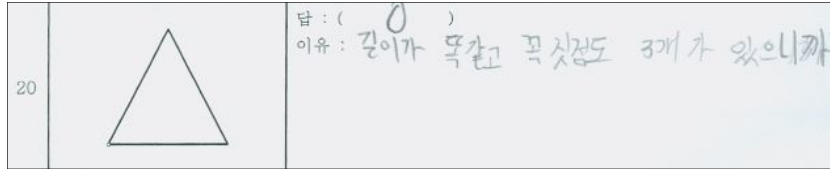
범주(문항)		추론유형	시각적 추론		속성 추론				형식적 추론	
			전체 모양		비본질적 속성		본질적 속성		도형의 이름	
			정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답
IE	1	이등변삼각형	3명	0명	0명	0명	28명	0명	1명	0명
	20	정삼각형	1명	0명	0명	0명	25명	0명	5명	0명

\*중복 인원 포함

직관적으로 삼각형인 예인 1번 이등변삼각형에서 학생들의 추론 유형을 분석한 결과 본질적 속성에 기초한 추론이 28명, 시각적 추론이 3명, 형식적 추론이 1명 순으로 나타났다. 대부분의 학생들이 “변과 꼭짓점이 3개여서(B:IE1)”와 같이 변, 꼭짓점이라는 요소가 3개임을 제시하거나, “세 변으로 이어져 있어서(I:IE1)”처럼 삼각형의 요소와 더불어 이어짐, 즉 닫힌 도형의 속성을 제시하였다. 학생 I처럼 학교에서는 삼각형의 속성으로 닫혀 있음을 정의하지 않았지만 은연 중 이어져 있어야 함을 인식한 학생들도 있었다. “각이 세 개이고 꼭선이 없고 변이 세 개이니까(P:IE1)”처럼 직선성을 언급한 학생도 있었다. 또한 “세 각이 있고 세 변이 있고 세 모서리가 있어서(K:IE1)”와 같이 모서리를 제시한 학생도 있었는데 면답 결과 K는 면과 면이 만나서 이루어진 모서리를 생각한 것이 아니라 ‘모퉁이’의 의미로 모서리를 언급한 것이었다. 물론 “직선이요 두 변의 길이가 같은 이등변삼각형이기 때문이다(L:IE1)”와 이등변삼각형의 성질과 함께 도형의 이름을 제시하면서 추론한 학생도 있었는데 이 학생은 삼각형을 “세 변이 맞댄 것(L:Def)”으로 정의하였다.

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학교 학생의 추론 유형 분석

20번 정삼각형 또한 대부분의 학생들이 삼각형의 본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별하였다. 이는 Tsamir, Tirosh와 Levenson (2008)의 결과와 일치한다. 예를 들어, 학생 D는 <그림 IV-1>과 같이 정삼각형을 “길이도 똑같고 꼭짓점도 3개가 있으니까(D:IE20)”처럼 본질적인 속성과 더불어 ‘변의 길이’라는 비본질적인 속성을 덧붙여 식별하였다.



<그림 IV-1> 정삼각형에 대한 D의 식별 결과

학생 H는 “변이 모두 같기 때문에 정삼각형이다(H:IE20)”와 같이 1번 이등변삼각형과 마찬가지로 정삼각형의 이름을 언급하여 삼각형을 식별하였다. 하지만 직관적으로 삼각형인 예에 대하여 비본질적 속성에 기초한 추론과 형식적 추론을 한 학생은 드물었다. 이는 대부분의 학생들에게 삼각형의 원형 이미지로는 이등변삼각형과 정삼각형이 인식되어 있다 할 수 있고, 변의 길이를 제시하거나 변의 길이가 같음을 표시하였다면 형식적 추론에 의한 식별이 더 많이 나타났을 것이다. 특히 삼각형을 ‘세모 모양’으로 정의했던 학생 A는 직관적인 삼각형의 예를 식별할 때에도 변이나 꼭짓점이 3개여야 하는 본질적인 속성과 함께 ‘세모 모양’을 제시하는 등 시각적 추론이 많이 발견되었다.

2) 직관적으로 삼각형이 아닌 예

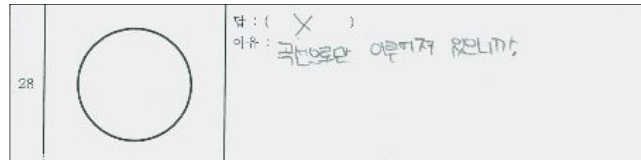
29명의 모든 학생들이 타원과 원, 정육각형과 같은 직관적으로 삼각형이 아닌 예에 대하여 삼각형이 아님을 정확히 식별하였다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예의 식별과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 분석한 결과 본질적 속성에 기초한 추론, 형식적 추론과 시각적 추론 순으로 많이 나타났다. 특히 직관적으로 삼각형이 아닌 예에서는 도형의 크기나 방향, 각의 크기 등 도형의 비본질적 속성에 기초한 추론이 발견되지 않았다. 그 이유는 타원과 원, 정육각형과 같은 직관적인 원형의 예는 빠르게 식별가능하기 때문이다(Smith et al., 1974).

<표 IV-2> 직관적으로 삼각형이 아닌 예(IN)의 추론 유형 및 식별 결과

범주(문항)		추론 유형	시각적 추론		속성 추론				형식적 추론	
			전체 모양		비본질적 속성		본질적 속성		도형의 이름	
			정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답
IN	3번	타원	2명	0명	0명	0명	20명	0명	10명	0명
	8번	정사각형	2명	0명	0명	0명	19명	0명	10명	0명
	18번	정육각형	1명	0명	0명	0명	23명	0명	7명	0명
	28번	원	3명	0명	0명	0명	21명	0명	7명	0명
	31번	정오각형	1명	0명	0명	0명	21명	0명	9명	0명

\*중복 인원 포함

직관적으로 삼각형이 아닌 예들의 식별과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 자세히 살펴보면, 3번 타원과 28번 원의 경우 20명의 학생들이 삼각형이 아닌 이유로 “선분이 아닌 것으로 둘러싸여 있어서(N:IN3)”, “꼭선으로 되어 있어서(N:IN28)”, “꼭선으로만 이루어져 있으니까(P:IN28)”, “선분으로 이루어지지 않아서(T:IN28)”와 같이 도형의 본질적인 속성인 ‘직선성’을 제시하였다. 이 사례들로 삼각형의 본질적인 속성에는 직선성이 내포되어 있어 학생들이 삼각형을 식별하는 과정에서 하나의 기준이 된다.



<그림 IV-2> 원에 대한 P의 식별 결과

형식적 추론을 통해 3번 타원을 식별한 학생들 중에서 ‘타원’이라는 정확한 이름을 언급한 학생(학생 D, F, P)보다 ‘원’이라는 이름을 언급한 학생(7명)이 더 많았고, 28번 원에서는 7명의 학생이 형식적 추론을 통해 도형을 식별하였다. 이 학생들은 2학년 때 ‘원’을 학습하였지만 형식적인 추론보다는 본질적인 속성 추론이 더 많은 것으로 보아 주어진 도형이 삼각형인지 아닌지를 식별 하는 과정에서 삼각형의 요소나 속성 중 어느 하나에 알맞지 않으면 삼각형이 되지 않음을 인식하고 있었다.

8번 정사각형은 삼각형이 아닌 예의 원형으로서 “삼각형은 세 변인데 네 개의 변이 있다(M:IN8)”와 같이 네 개의 변이 있기 때문에 삼각형이 아님을 이유로 제시한 학생과 “각, 변, 꼭짓점이 세 개가 아니어서(BB:IN8)”와 같이 삼각형의 요소가 ‘세 개’가 아님을 강조하여 쓴 학생들이 있었다. 이 학생들은 삼각형의 요소가 ‘세 개’가 모여야 삼각형이 이루어짐을 필수적으로 생각하고 있었다. 또한 형식적 추론을 한 10명의 학생들 중 학생 L은 “선이 네 개 있고 꼭짓점이 네 개가 있는 사각형이기 때문이다(L:IN8)”와 같이 네 개의 선분과 네 개의 꼭짓점이 있기에 사각형이 된다는 인과관계의 추론으로 정사각형이 삼각형이 아님을 식별하였다.

직관적으로 삼각형이 아닌 예 중 18번 정육각형을 가장 많은 학생들이 속성 추론을 통해 식별하였으며 이 학생들 중 “변과 꼭짓점이 여섯 개 이어서(U:IN18)”, “변이 3개보다 많아서(S:IN18)”에서 알 수 있듯이 8번 정사각형과 유사하게 삼각형의 요소의 개수에 중점을 두어 개수가 ‘세 개’ 이상이 되면 삼각형이 될 수 없음을 인식하였다. 이와 마찬가지로 31번의 정오각형의 경우에도 “꼭짓점이 5개, 변과 각도 5개여서(K:IN31)”, “각과 변이 세 개가 아니니까(E:IN31)”와 같이 삼각형의 본질적인 속성인 ‘세 개’에 기초하여 도형을 식별하였다. Hershkowitz (1990)에 의하면, ‘세 개’라는 착각은 삼각형의 원형을 암시하며 이러한 원형의 예는 직관을 받아들이는데 중요한 역할을 한다. 이는 학생들은 도형을 이루는 요소 중 어느 하나가 ‘세 개’를 넘거나 미치지 못하면 삼각형이 아님을 인식한다는 것을 나타낸다.

직관적으로 삼각형인 예에서 시각적 추론을 한 A는 직관적으로 삼각형이 아닌 예에서도 “동그라미 모양이고 꼭짓점이 없다(A:IN28)”와 “변이 6개이고 꼭짓점이 6개이고 세모 모양이 아니기 때문에(A:IN18)”와 같이 시각적 추론을 통해 도형을 식별하였다. 학생 A는 대부분의 도형을 전체적인 모양에 입각하여 식별하였다.

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생의 추론 유형 분석

직관적으로 삼각형이 아닌 예에는 도형의 기하적 이름을 가진 도형들이 많았기 때문에 유독 직관적으로 삼각형이 아닌 예에 대하여 많은 학생들이 형식적 추론을 통해 도형을 식별하였다. 예컨대, J는 “이것은 육각형이기 때문(J:IN18)”, “오각형이라서(J:IN31)”와 같이 자신이 알고 있는 다각형의 이름을 사용하여 도형을 식별하였다. 자신이 학습한 결과로 알고 있는 정다각형의 이름을 제시하여 삼각형이 아닌 예를 식별한 것으로 나타난다.

3) 비직관적으로 삼각형인 예

비직관적으로 삼각형인 예들은 옆을 향한 삼각형, 뾰족한 삼각형, 둔각삼각형 등 학생들이 교과서나 일상생활에서 많이 접해보지 않았던 삼각형으로 구성되어 있다. 대부분의 학생들이 삼각형임을 식별하였지만 16번 아래를 향한 삼각형에서 1명의 오답자(학생 D)가 나타났고, 7번 직각삼각형에서 2명의 오답자(학생 D, J), 21번 둔각삼각형에서 3명의 오답자(학생 A, B, D)가 나타났다. 그리고 17번과 26번 바늘 모양으로 뾰족한 삼각형에서는 각각 5명(학생 A, B, D, J, P), 4명(학생 A, B, D, J)의 오답자가 나타났다.

비직관적으로 삼각형인 예의 식별과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 분석한 결과 본질적 속성에 기초한 추론이 가장 많았으며, 직각삼각형, 둔각삼각형의 예에서는 형식적 추론을 통해 삼각형을 식별한 학생들이 상대적으로 많았고 기하적 수준이 낮은 몇몇 학생들에게서 시각적 추론이 나타났다.

<표 IV-3> 비직관적으로 삼각형인 예(NE)의 추론 유형 및 식별 결과

범주(문항)		추론 유형	시각적 추론		속성 추론				형식적 추론	
			전체 모양		비본질적 속성		본질적 속성		도형의 이름	
			정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답
NE	5번	옆을 향한 삼각형	2명	0명	3명	0명	26명	0명	1명	0명
	19번		2명	0명	0명	0명	27명	0명	1명	0명
	12번	아래를 향한 삼각형	2명	0명	3명	0명	26명	0명	0명	0명
	16번		0명	0명	0명	1명	27명	0명	2명	0명
	9번	비스듬한 삼각형	2명	0명	1명	0명	27명	0명	2명	0명
	14번		0명	1명	0명	0명	27명	0명	3명	0명
	17번	뾰족한 삼각형	1명	1명	0명	1명	23명	2명	0명	0명
	26번		0명	0명	0명	3명	24명	1명	2명	0명
	7번	직각삼각형	0명	0명	0명	0명	24명	1명	4명	0명
	30번		1명	0명	0명	0명	26명	0명	4명	0명
	21번	둔각삼각형	0명	0명	0명	3명	19명	1명	6명	0명
	25번		0명	0명	0명	0명	24명	0명	5명	0명

\*중복 인원 포함

5번과 19번의 옆을 향한 삼각형은 직관적인 삼각형을 회전하여 수평인 변이 수직으로 놓여있는 도형으로 모든 학생들이 삼각형임을 식별하였고, 12번과 16번의 아래를 향한 삼각형은 수평인 변의 아래에 다른 꼭짓점이 놓인 비직관적인 삼각형인 예로서 학생 D만 16번에서 옳게 식별하지 못하였다. “꼭짓점과 변이 3개여서(B:NE5)”, “세 각과 세 변이 있으니까(X:NE19)”, “각이 세 개이고 꼭선이 없고 변이 세 개여서(P:NE12)”, “세 변과 꼭짓점이 있어서(U:NE16)”처럼 본질적인 속성에 기초한 추론으로 식별한 학생들이 가장 많았지만 다른 범주의 삼각형인 예보다 “한 쪽 변이 길지만, 울퉁불퉁한 모양이 없어서(H:NE19)”,

“삼각형을 회전시킨 것 같다(C:NE5)”와 같이 변의 길이와 삼각형의 회전에 초점을 두어 식별한 학생과 “세모 모양인데 모양만 바뀌었기 때문에(A:NE12)”와 같이 세모 모양이라는 시각적 추론과 모양이 바뀌었다는 비본질적인 속성, “뒤집혀 있지만 삼각형이다(F:NE12)”처럼 삼각형이 회전되어 있다고 인식하는 등 비본질적 속성에 기초한 추론이 더 많았다. 16번 아래를 향한 삼각형을 삼각형으로 식별하지 못한 D는 삼각형이 아닌 이유로 “삼각형의 균형이 깨뚫어져서(D:NE16)”라고 작성하였다.

9번과 14번의 비스듬한 삼각형과 17번, 26번의 뾰족한 삼각형은 삼각형의 어느 한 변도 수평이나 수직으로 되어 있지 않고 삼각형을 회전한 모양으로 Shaughnessy와 Burger (1985)가 제시한 비직관적인 삼각형의 전형적인 예이다. Shaughnessy와 Burger (1985)의 연구에서 뾰족하고 좁고 길쭉한 삼각형에 대하여 학생들은 세 개의 점과 세 개의 직선이 있음을 인정하였지만 삼각형으로 식별하지는 못하였다. 본 연구에서도 17번과 26번의 뾰족한 삼각형에 대하여 총 5명의 가장 많은 오답자가 나타났다. 이 범주의 삼각형에 대하여 다른 범주의 삼각형과 마찬가지로 “세 변과 세 각으로 맞추어져 있는 도형이므로 삼각형이다(I:NE14)”, “세 개의 변과 꼭짓점이 있어서(W:NE16)”와 같이 본질적 속성에 기초한 추론을 한 학생이 대부분이었다. 하지만 학생 H는 “길쭉하지만 세모 모양으로 되어 있기 때문에(H:NE17)”와 같이 삼각형이 길쭉하게 생겼지만 세모 모양으로 되어 있어서 삼각형이라고 하였고, “길쭉하지만 세 변이다(M:NE26)”, “조그만 하지만 각이 세 개 있고 변도 세 개 있기 때문에(Q:NE26)”와 같이 길쭉하거나 작은 삼각형이어도 변이라는 삼각형의 요소가 있으면 삼각형이 된다는 본질적인 속성에 기초한 추론을 통해 삼각형을 식별한 학생도 있었다. 뿐만 아니라 “두 변의 길이가 같은 이등변삼각형이기 때문이다(L:NE9)”, “예각삼각형이어서(Z:NE26)”처럼 실제로는 이등변삼각형이나 예각삼각형은 아니지만 형식적 추론을 통해 삼각형을 식별한 학생들도 있었다.

17번과 26번 바늘 모양으로 뾰족한 삼각형을 모두 틀린 학생 D는 “위에 꼭짓점이 뾰족하지 않아서(D:NE17)”와 “삼각형이 길기 때문이다(D:NE26)”라는 이유를 제시하였다. 17번 문항은 바늘 모양으로 뾰족하게 생긴 삼각형인데 ‘뾰족하지 않아서’라는 이유를 제시하였기에 다시 삼각형인지 아닌지 질문을 하였다. D는 17번 뾰족한 삼각형에 대하여 “윗부분의 꼭짓점이 삼각형이 아닌 것 같다”라는 이유를 제시하였다. D는 꼭짓점이 둥근 것은 삼각형이 아니지만 너무 뾰족하게 생긴 것 또한 삼각형이 아닌 것으로 인식하고 있었다. D는 비직관적으로 삼각형인 예를 식별할 때 “꼭짓점이 3개가 있어서(D:NE3)”와 같이 삼각형의 본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별하였지만 “위치는 다르지만 모양은 정확하게 되어 있어서(D:NE5)”나 “위치만 다르고 꼭짓점이 3개 이어서(D:NE12)”, “눌러져 있지만 꼭짓점이 3개 있어서(D:NE25)”와 같이 삼각형인 이유에 삼각형의 위치, 삼각형의 방향 등 도형의 비본질적인 속성이 포함되었다. 면담 결과 학생 D는 길거나 균형이 맞지 않은 삼각형은 삼각형이 아니라고 생각하였다.

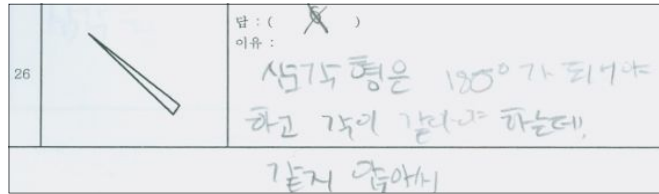
학생 J는 “이상해서(J:NE17)”라는 이유로 17번 뾰족한 삼각형을 삼각형이 아니라고 하였고, “삼각형은 180도가 되어야 하고 각이 같아야 하는데 같지 않아서(J:E26)”라는 이유로 26번 뾰족한 삼각형을 삼각형이 아니라고 하였다. 다음은 J와 26번 뾰족한 삼각형에 대해서 면담한 내용의 일부분이다.

R : (설문지의 26번을 가리키면서) 이건 삼각형이 아닌가요?

J : 맞아요.

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학교의 추론 유형 분석

R : 여기에 ‘삼각형은 180도가 되어야 하고 각이 같아야 하는데 같지 않아서’라고 썼어요. 무슨 뜻인지 선생님께서 설명해 줄래요?  
 J : 각의 크기가 달라요.  
 R : 아, 각의 크기가 달라요?  
 J : 네.



<그림 IV-3> 뾰족한 삼각형에 대한 J의 식별 결과

J는 면담 과정에서 뾰족한 모양의 삼각형에서 가장 크기가 작은 각이 삼각형의 두 밑각의 크기와 다르기 때문에 삼각형이 아니라고 대답하였다. J는 세 각의 크기가 같아야 삼각형이라고 잘못 생각하고 있었다. 도형의 크기, 각의 크기 등 도형의 비본질적 속성은 학생들이 도형의 원형을 형성하는데 일조하기도 하지만, 비본질적 속성을 본질적 속성과 혼동하여 잘못된 개념이미지를 갖게 하기도 한다. 따라서 교사는 학생들에게 도형의 비본질적 속성을 변화시킨 다양한 예를 제시해야 한다(Hannibal, 1999).

7번과 30번의 직각삼각형과 21번, 25번의 둔각삼각형은 삼각형의 한 변이 수평으로 놓여 있고, 삼각형의 종류를 생각할 수 있는 삼각형으로 구성되어 있다. 이 범주의 삼각형에 대하여 학생 A를 제외한 대부분의 학생들이 본질적 속성에 기초한 추론으로 삼각형을 식별하였다. 또한 “삼각형의 종류에는 직각삼각형이 있는데 이 모양에는 직각이 들어 있기 때문에(H:NE7)”와 “둔각삼각형이라서(M:NE25)”, “직각도 있지만 변이 세 개, 각이 세 개여서(P:NE30)”처럼 삼각형의 형식적 이름을 제시하여 추론한 학생들이 다른 범주의 추론보다 많았다. 다른 삼각형들에 대하여 ‘예각삼각형’이라는 이유를 제시하지 않은 것으로 보아 학생들에게 직각삼각형과 둔각삼각형은 특별한 삼각형이지만 예각삼각형은 특별한 삼각형으로 여기지 않는 것으로 보였다. 대부분의 도형을 시각적 추론과 비본질적 속성에 기초한 추론을 통해 식별한 학생 A는 21번에 대하여 “변이 세워있어야 하는데 변이 누워있다(A:NE21)”라는 이유를 제시하여 삼각형이 아니라고 하였다. A는 비본질적 속성에 기초한 추론을 통해 삼각형을 식별하였기에 길고 좁은 형태의 삼각형은 삼각형이 아니라고 생각하였다. Hershkowitz (1990)에 의하면, 비본질적 속성에 기초한 추론은 van Hiele의 속성 추론이지만 부분적으로 시각적 추론도 될 수 있다. 이는 원형의 부적절한 속성은 강한 시각적 특성을 가진다는 의미로 van Hiele의 1수준과 2수준의 경계에 속한다. 비직관적으로 삼각형인 예의 범주에서 특히 비본질적인 속성 추론이 많이 나타난 것으로 보아 학생들의 기하적 수준은 보편적으로 낮은 것으로 보였다.

4) 비직관적으로 삼각형이 아닌 예

본 연구에서는 비직관적으로 삼각형이 아닌 예들에 대하여 열린 삼각형 모양, 오각형, 오목한 삼각형 모양 등과 같이 삼각형은 아니지만 삼각형과 유사한 모양이기에 ‘삼각형 모양’이라는 이름을 붙여 범주화하였다. 모든 학생들은 삼각형이 아닌 예들이 모두 삼각형이 아

나라는 것을 정확히 식별하였으며, 학생들의 추론 유형을 분석한 결과 본질적 속성에 기초한 추론이 가장 많았지만 다른 범주의 예에 비하면 시각적 추론이 많이 나타났다. 또한 비직관적으로 삼각형인 예에서와 마찬가지로 오각형, 육각형, 사각형과 같이 특정 도형의 예에서 형식적 추론이 상대적으로 많이 나타났다.

<표 IV-4> 비직관적으로 삼각형인 아닌 예(NN)의 추론 유형 및 식별 결과

범주(문항)		추론 유형	시각적 추론		속성 추론				형식적 추론	
			진체 모양		비본질적 속성		본질적 속성		도형의 이름	
			정답	오답	정답	오답	정답	오답	정답	오답
NN	10	열린 삼각형 모양	1명	0명	0명	0명	29명	0명	0명	0명
	23		0명	0명	0명	0명	29명	0명	0명	0명
	27		0명	0명	0명	0명	29명	0명	0명	0명
	2	등근 삼각형 모양	12명	0명	0명	0명	19명	0명	0명	0명
	22		9명	0명	1명	0명	19명	0명	0명	0명
	6	지그재그 삼각형 모양	10명	0명	0명	0명	26명	0명	0명	0명
	4	오각형	6명	0명	0명	0명	23명	0명	1명	0명
	15	육각형	8명	0명	0명	0명	18명	0명	3명	0명
	29	사각형	5명	0명	0명	0명	24명	0명	3명	0명
	11	오목한 삼각형 모양	4명	0명	0명	0명	26명	0명	0명	0명
	13	불룩한 삼각형 모양	5명	0명	0명	0명	25명	0명	0명	0명
	24	부채꼴	6명	0명	0명	0명	23명	0명	1명	0명

\*중복 인원 포함

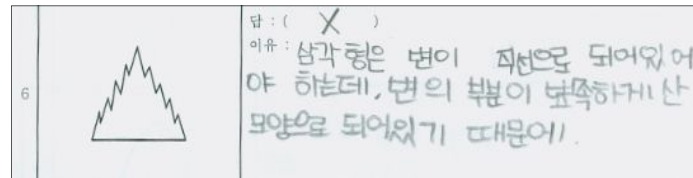
10번, 23번, 27번의 열린 삼각형 모양은 꼭짓점이 없거나 변이 이어지지 않은 ‘단현 도형’이라는 삼각형의 본질적인 속성이 결여되어 있는 예로 거의 모든 학생들이 “한쪽 부분이 이어져 있지 않으므로(H: NN10)”, “다 이어지지 않아서(F: NN23)”, “변 하나가 이어지지 않아서(W: NN27)”와 같이 이어져 있지 않다는 도형의 단현 있음의 속성에 기초하여 삼각형이 아님을 식별하였다. 하지만 “각과 변이 세 개가 아니니까(E: NN23)”, “2개의 각이 있고 2개의 모서리, 하지만 3개의 변이 있다. 그래도 2개의 각, 2개의 모서리가 있으니까 삼각형이 아니다(K: NN10)”처럼 삼각형의 요소가 ‘세 개’라는 본질적인 속성이 결여되어 있으면 삼각형이 아님을 언급한 학생들도 있었다. 또한 “도형이 아니어서(Z: NN23)”처럼 선분으로 둘러싸여 있지 않기 때문에 도형이 아니라고 추론한 학생도 있었다. 여기에서 알 수 있듯이, 학생들은 삼각형을 식별함에 있어 단현있지 않은 도형은 삼각형이 아닌 예로 식별하였다. 이는 단현 도형과 세 꼭짓점은 세 변을 의미하므로 단현 있지 않으면 삼각형이 될 수 없음을 나타낸다.

교통 표지판에서 쉽게 볼 수 있는 등근 삼각형 모양인 2번과 22번은 삼각형의 요소 중 꼭짓점 또는 각이 결여되어 있는 삼각형 모양으로서 “꼭짓점이 없으므로 삼각형이 아니다(CC: NN2)”와 “한 개의 각이 부족해서(DD: NN22)”와 같이 꼭짓점이나 각이 없으므로 삼각형이 아니라고 대답하거나 “꼭선으로 되어 있는 도형이라서(I: NN2)”와 “삼각형에 꼭선이 들어 있기 때문이다(L: NN22)”와 같이 삼각형의 ‘꼭선성’을 언급하였다. 그러나 “꼭짓점이 뽕족하지 않고 둥그렇게 되어 있어서(D: NN2)”나 “한 각이 둥글어서(K: NN22)”, “위쪽이 튀어나와 있어서(F: NN22)”처럼 뽕족해야 할 꼭짓점이나 각이 등근 모양으로 되어 있거나 자신이 알고 있는 삼각형 모양과는 다르게 보이기 때문에 삼각형이 아니라고 대답한 학생들도 있었



다. 특히, 등근 삼각형 모양에서 시각적 추론이 많이 발견되었다.

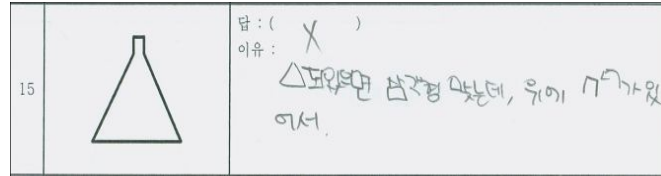
Tsamir, Tirosh와 Levenson (2008)의 연구에서는 33%의 학생들이 사물의 이름을 빌려 ‘불이 타고 있는 모양’, ‘산 모양’ 등과 같이 이름을 붙인 지그재그 삼각형 모양에 대하여 본 연구에서도 “뾰족한 게 여러 개 있고 꼭 산처럼 되어 있어서(J:NN6)”, “삼각형은 변이 직선으로 되어 있어야 하는데, 변의 부분이 뾰족하게 산 모양으로 되어 있기 때문에(H:NN6)”와 같이 비-기하적 도형의 이름을 붙여 이유를 제시하였다. 또한 “변이 있어야 되는데 이 도형은 변이 없으니까(D:NN6)”와 같이 지그재그로 표현되어 있는 부분이 변이 아니기 때문이라는 이유를 제시하였고, “꼭짓점이 많고 변이 1개만 있기 때문에(A:NN6)”처럼 역시 지그재그로 표현되어 있는 부분은 변이 되지 않고 변이 한 개여서 삼각형이 아니라고 한 학생도 있었다. 하지만 “각은 11개가 있고 변도 9개이고 모서리도 11개이기 때문에(K:NN6)”, “꼭짓점이 12개이다(C:NN6)”와 같이 꼭짓점, 변, 각의 개수를 세어보아서 3개 보다 많은 점을 지적하여 삼각형이 아니라고 한 학생들도 있었다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예에서 정다각형의 식별 과정에서 사용된 추론이 이 도형에서도 사용됨이 보였다. 이는 ‘세 개’라는 본질적인 속성을 잃어버리면 삼각형이 될 수 없음을 보여준다.



<그림 IV-4> 지그재그 삼각형 모양에 대한 H의 식별 결과

실제로는 오각형, 육각형이지만 삼각형과 비슷하게 생긴 도형에 대하여 많은 학생들이 “변이 다섯 개여서(B:NN4)”, “삼각형은 변이 세 개이고 직선으로 세 개가 있지만 이 도형은 변이 다섯 개가 되기 때문이다(L:NN4)”와 같이 변의 개수를 언급하여 변이 3개가 아니면 삼각형이 아니라고 하였다. 예컨대, G는 “변이 3개, 꼭짓점도 3개여야 하는데 둘 다 5개 씩이라서(G:NN4)”라는 이유로 변과 각, 꼭짓점의 개수를 세어서 삼각형이 아님을 추론하였다. 반면 “위의 꼭짓점은 뾰족한데 밑 부분이 꼭짓점이 없으니까(D:NN4)”와 같이 오각형의 아랫부분을 꼭짓점이 없다고 생각하거나 “위에는 각이 있지만 밑에가 각이 이상해서(X:NN4)”, “삼각형 같지만 위가 이상해서(J:NN15)”와 같이 각의 모양에 중점을 두어 삼각형이 아님을 식별한 학생들도 있었다. 특히 학생 A는 “변 중에 꼭짓점이 세모 모양이어야 하는데 네모 모양으로 되어 있다(A:NN15)”와 같이 오각형의 아랫부분이 네모 모양이기에 삼각형이 아니라는 시각적인 추론으로 삼각형이 아닌 예를 식별하였다. 학생 F 또한 “위에가 물병 모양이라서(F:NN15)”와 같이 물병 모양이라는 비-기하적 이름을 제시하였으며, 학생 P는 <그림 IV-5>와 같이 삼각형이 아닌 예에 직접 그림으로 표시하고 “△되어 있으면 삼각형 맞는데, 위에 ㄱ가 있어서(P:NN15)”로 이유를 제시하였다. 이 범주에서 특이한 경우로 “오각형이어서(Z:NN4)”, “이 도형은 여섯 개의 변으로 되어 있으므로 육각형이다(I:NN15)”와 같이 기하적 도형인 다각형의 정확한 이름을 제시하여 식별한 학생들이 있었다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예 중 18번 정육각형과 31번 정오각형에 대하여 “오각형이다(M:NN31)”, “육각형이어서(X:NN18)”과 같이 도형의 이름을 제시한 학생들은 모두 8명이지만

비직관적으로 삼각형이 아닌 예에서 다각형인 15번과 4번에 대하여 다각형의 이름을 제시한 학생은 각각 3명(학생 I, N, Z)과 1명(학생 Z)으로 나타났다. 이는 학생들이 그동안 접해보았던 오각형, 육각형의 비원형적인 예이기 때문에 쉽게 이름을 제시하지 않은 것으로 분석되었다. 원형은 도형의 예에서 어떤 비본질적인 속성이 자주 나타날 때 형성되며 학생들은 도형의 예와 함께 이러한 비본질적인 속성을 연관 짓기 시작하므로(Kellogg, 1980) 직관적으로 삼각형이 아닌 예를 제시하여 삼각형인 예의 식별과정에서 학생들이 혼동하지 않도록 도와주어야 한다.



<그림 IV-5> 육각형에 대한 P의 식별 결과

11번 오목한 삼각형 모양과 13번 볼록한 삼각형 모양, 24번 부채꼴에 대하여 대부분의 학생들이 “밑에 부분이 휘어져서(D:NN11)”, “세 변이 곧게 나가지 않았기 때문에(A:NN13)”, “굽어져 있어서(N:NN24)”와 같이 ‘직선성’이라는 본질적 속성에 기초한 추론을 통해 도형을 식별하였다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예인 타원과 원에서도 학생들이 삼각형이 아닌 이유로 ‘직선성’을 많이 언급하였는데, 많은 학생들이 삼각형인 예를 식별할 때 변이 직선이어야 함을 필수적인 요소로 인식하고 있음을 알 수 있다.

### 3. 학생들의 기하적 수준과 추론 유형

van Hiele의 기하적 사고의 발달 수준을 사용하여 학생들의 기하적 수준을 범주화한 결과 분석적 인식 수준인 2수준에 해당되는 학생들이 22명으로 가장 많았으며, 비형식적 연역 수준인 3수준에 해당되는 학생들이 5명, 시각적 인식 수준인 1수준에 해당되는 학생들이 2명(학생 A, D)으로 나타났다. 학생들의 기하적 수준과 추론 유형을 분석한 결과 1수준의 학생들은 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 시각적 추론을 통해 식별하는 학생들이 다른 수준에 비하여 상대적으로 많았으며, 2수준과 3수준의 학생들은 대부분 삼각형의 본질적인 속성에 기초한 추론을 통해 삼각형을 식별하였다. 본 연구에서는 추론 유형 간에 기하적 수준 차이가 발견되었지만, 제시된 도형의 특성이 학생들의 추론 유형에 영향을 주기도 하였다. 예를 들면, 직관적으로 삼각형이 아닌 예에는 도형의 기하적 이름을 가진 도형들이 많았기 때문에 유독 직관적으로 삼각형이 아닌 예에 대하여 많은 학생들이 형식적 추론을 통해 도형을 식별하였다. <표 IV-5>은 학생들의 기하적 수준과 추론 유형을 나타낸 것이다.

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 초등학생의 추론 유형 분석

<표 IV-5> 학생들의 기하적 수준과 추론 유형

기하적 수준 \ 추론 유형	시각적 추론	속성 추론		형식적 추론	합계
	전체 모양	비본질적 속성	본질적 속성	도형의 이름	
1 수준 (2명)	11개(35.5%)	3.5개(11.3%)	16개(51.6%)	0.5개(1.6%)	31개(100%)
2 수준 (22명)	2.5개(8.1%)	0.1개(0.4%)	25개(80.6%)	3.4개(10.9%)	31개(100%)
3 수준 (5명)	0.6개(1.9%)	0개(0%)	28.4개(91.6%)	2개(6.5%)	31개(100%)

van Hiele의 1수준은 주변의 구체물을 외형적인 형태로 인식하는 수준으로 전체적인 형만을 변별할 수 있는 단계를 말한다. 1수준의 학생 A는 삼각형을 정의할 때 삼각형을 요소가 아닌 ‘세모 모양’으로 정의하였고, 학생 D는 ‘꼭짓점’으로 정의하였지만 이 두 학생은 삼각형의 식별과정에서 다른 수준의 학생들과 달리 시각적 추론을 많이 사용하여 식별하였다. 물론 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는 과정에서 시각적 추론을 사용하여 식별하는 것 보다 본질적 속성에 기초한 추론을 하는 경우가 많았지만 그 수는 2수준과 3수준의 학생들보다는 현저하게 적었다. 또한 1수준의 학생들은 삼각형의 기본적인 정의를 알지 못하였고 직각, 둔각, 예각 등의 각의 정의를 알지 못했으며 삼각형의 종류를 학습하지 않아 삼각형의 포함관계를 정확하게 파악하지 못한 것으로 나타났다. 다음은 학생 A의 면담 과정이다.

R : 21번은 삼각형이에요, 아니에요?

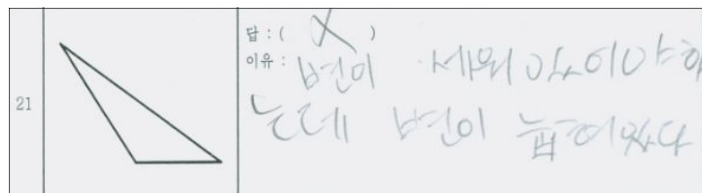
A : 아니에요.

R : 이유를 얘기해 주세요.

A : (삼각형의 위쪽 꼭짓점을 가리키며) 여기가 넓혀져 있어요.

R : 넓혀져 있는 것이라 삼각형이 아니에요?

A : 네.

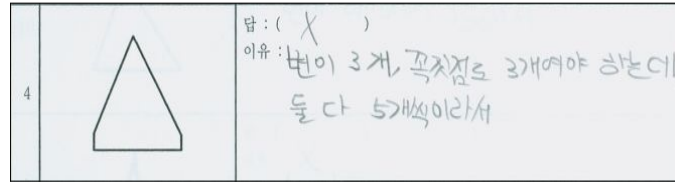


<그림 IV-6> 둔각삼각형에 대한 A의 식별 결과

A는 ‘세 변’, ‘세 꼭짓점’ 등 삼각형의 요소와 ‘닫힌 도형’이라는 삼각형의 본질적인 속성보다는 도형의 전체적인 형태에 기초하여 삼각형을 식별하였다.

본 연구에 참여한 29명의 학생들 중 22명(3학년 5명, 4학년 12명, 5학년 4명, 6학년 1명)의 학생들이 기하적 수준이 2수준으로 분석되었다. 그 중 9명(학생 B, E, G, O, S, T, V, Y, CC)의 학생들은 31문항을 모두 본질적 속성에 기초한 추론을 통해 도형을 식별하였다. 13명의 학생들은 시각적 추론과 형식적 추론을 사용하여 식별하였지만 본질적 속성에 기초한 추론을

통해 삼각형인 예를 식별한 경우가 더 많았다.



<그림 IV-7> 오각형에 대한 G의 식별 결과

G는 “변이 3개, 꼭짓점도 3개여야 하는데 둘 다 5개씩이라서(G:NN4)”와 같이 꼭짓점, 변의 개수를 세어 3개보다 많으므로 삼각형이 아니라고 추론하였다. 이는 ‘세 개’라는 삼각형의 본질적인 속성에 기초하여 추론한 경우이다. 2수준의 많은 학생들이 삼각형의 본질적인 속성인 ‘세 개’, ‘직선성’, ‘닫혀 있음’, ‘변’, ‘꼭짓점’ 등에 입각하여 도형들을 식별하였다. 3수준은 4학년 3명(학생 L, P, BB), 5학년 1명(학생 W), 6학년 1명(학생 DD)으로 총 5명이었다. 이 학생들은 직각, 둔각, 예각 등의 각의 정의뿐 아니라 삼각형의 포함관계를 정확하게 알고 있었으며, 다른 학생들보다 진단평가에서 우수한 성적을 보인 학생들이었다. 3수준의 학생들 중 학생 W, BB, DD는 삼각형인 예의 식별과정에서 모든 도형을 본질적인 속성에 기초하여 추론하였다. 학생 P도 삼각형인 예의 식별 과정에서 대부분 본질적 속성에 기초한 추론을 통해 도형을 식별하였지만 다각형은 시각적 추론으로 식별한 경우도 있었다. 또한 학생 P와 L는 대부분의 예를 본질적인 속성 추론으로 식별하였지만 본질적인 속성과 함께 도형의 이름을 제시하여 형식적 추론을 통해 도형을 식별하였다. 3수준의 학생들에서만 비본질적 속성에 기초한 추론이 나타나지 않았다. 비본질적인 속성은 시각적인 추론의 요소를 가지고 있으며, 시각적 추론은 van Hiele의 1수준이나 2수준에서 사용되기 때문이다(Burger & Shaughnessy, 1986).

시각적 추론과 비본질적 속성에 기초한 추론은 1수준의 학생들에게서 가장 많이 나타났으며, 본질적 속성에 기초한 추론은 3수준의 학생들에게서 가장 많이 나타났다. 특히 형식적 추론이 3수준보다 2수준의 학생들에게서 많이 나타났는데, 이는 도형의 이름을 제시한 학생들 중에서 도형의 성질과 포함 관계를 이해한 학생이 많지 않았기 때문이다. 본 연구에서는 제시된 도형의 특성이 학생들의 추론 유형에 영향을 주기도 하였지만, 추론 유형 간에 기하적 수준 차이가 발견되었다. 따라서 도형의 식별과정에서 나타난 학생들의 추론 형태를 살펴보면 학생의 기하적 수준을 다소 파악할 수 있다.

## V. 요약 및 제언

학생들의 개념 형성 과정은 매우 복잡하며 개념 형성 과정에서 예(Example)는 중요한 역할을 한다(Tsamir, Tirosh & Levenson, 2008; Zodik & Zaslavsky, 2008). 학생들이 삼각형의 개념을 학습할 때 주어진 예뿐만 아니라 그러한 예를 토대로 하여 자신들의 예를 구성해가도록 해야 한다. 본 연구에서는 초등학교 학생들이 삼각형을 어떻게 정의하고 있는지 알아보고, 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 조

사하였다. 그리고 학생들의 추론 유형과 학생들의 기하적 수준이 어떤 관련성이 있는지 알아보았다. 본 연구에서는 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 각각 직관적인 경우와 비직관적인 경우로 구분하여 학생들에게 제시하였다. 연구 결과 대부분의 학생들이 삼각형의 요소를 2개 이상 제시하여 삼각형을 정의하였으며, 학생 A만이 삼각형을 ‘세모 모양’으로 정의하였다. 학생 A는 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 식별하는 과정에서도 시각적 추론을 가장 많이 보였으며 기하적 수준도 가장 낮은 학생이었다. 몇몇 학생들은 자신이 알고 있는 삼각형의 모든 속성들을 나열하여 정의하기도 하였으며, ‘삼각형의 세 내각의 합은 180도’라는 삼각형의 성질을 삼각형의 정의 개념으로 이해하고 있었다.

삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별 과정에서 나타난 학생들의 추론 유형을 분석한 결과 대부분의 학생들은 ‘세 변’, ‘세 꼭짓점’, ‘세 각’, ‘직선성’, ‘닫혀 있음’ 등 삼각형의 본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별하였으며, 몇몇 학생들은 삼각형의 전체적인 모양과 같은 시각적 추론을 통해 삼각형을 식별하거나 도형의 크기와 방향 등 도형의 비본질적인 속성에 기초하여 삼각형을 식별하였다. ‘도형의 크기’, ‘각의 크기’ 등 도형의 비본질적 속성은 학생들이 도형의 원형을 형성하는데 일조하기도 하지만, 비본질적 속성을 본질적 속성과 혼동하여 잘못된 개념이미지를 갖게 하기도 한다. 따라서 교사는 학생들에게 도형의 비본질적 속성을 변화시킨 다양한 예를 제시해야 한다.

정삼각형과 이등변삼각형과 같이 직관적으로 삼각형인 예는 학생들이 그동안 많이 접해왔던 삼각형의 예이므로 모든 학생들이 삼각형임을 식별하였고 대부분의 학생들이 본질적 속성에 기초한 추론을 통해 삼각형을 식별하였다. 비본질적 속성에 기초하여 추론한 학생은 아무도 없었는데, 이는 많은 학생들이 변이 수평으로 놓인 정사각형을 정사각형의 원형으로 생각하는 것과 같이(Clements & Battista, 1992), 이등변삼각형과 정삼각형을 삼각형의 원형적인 예로 여기고 있었음을 알려준다. 원형적인 예는 기하적 개념 습득에서 중요한 역할을 하기도 하지만, 제한된 개념이미지를 형성시킬 수 있음을 항상 염두에 두어야 한다.

타원과 원, 정사각형은 직관적으로 삼각형이 아닌 예로서 학생들은 본질적인 속성 추론과 형식적 추론으로 도형의 이름을 제시하여 식별하였으며 비본질적인 속성 추론은 나타나지 않았다. 특히 타원과 원은 곡선으로 둘러싸여 있는 도형으로 학생들은 삼각형이란 ‘선분’으로 둘러싸여 있어야 함을 무의식적으로 인식하고 있었으며, 정사각형과 정육각형 등의 정다각형의 경우 도형의 요소가 ‘세 개’ 이상이 되면 삼각형이 될 수 없다고 생각하였다. 직관적으로 삼각형이 아닌 예에는 도형의 기하적 이름을 가진 도형들이 많았기 때문에 유독 직관적으로 삼각형이 아닌 예에 대하여 많은 학생들이 형식적 추론을 통해 도형을 식별하였다.

비직관적으로 삼각형인 예를 식별하는 과정에서 잘못 식별한 학생들이 가장 많았으며 다양한 추론이 나타났다. 비직관적으로 삼각형인 예들은 옆을 향한 삼각형, 뾰족한 삼각형, 둔각삼각형 등 학생들이 교과서나 일상생활에서 많이 접해보지 않았던 삼각형으로 구성되어 있다. 따라서 몇몇 학생들은 삼각형의 비본질적인 속성에 기초한 추론을 통해 삼각형을 정확히 식별하지 못하였다. Martin과 Strutchens (2000)의 연구에서 학생들이 전형적인 정사각형이 아닌 45도 회전된 정사각형을 정사각형으로 인식하지 못하고 다이아몬드라고 생각한 것과 같이 본 연구에서도 많은 학생들이 뾰족한 삼각형이나 비스듬한 삼각형을 삼각형으로 인식하지 못하였다. 따라서 학생들에게 직관적인 예뿐 아니라 비직관적인 예도 제시하여 ‘도형의 크기’, ‘방향’ 등 도형의 비본질적 속성과는 상관없이 도형을 정확히 식별할 수 있도록 지도해야 할 것이다.

비직관적으로 삼각형이 아닌 예는 모든 학생들이 정확히 식별하였으며 삼각형의 본질적

속성 중 ‘닫힌 도형’과 ‘꼭짓점의 유무’, ‘삼각형 요소의 개수’, ‘직선성’ 등 삼각형의 본질적 속성에 기초한 추론이 많이 나타났다. 다른 범주의 예들에 비하여 그림으로 표현하거나 ‘종 모양’이나 ‘산 모양’과 같이 사물의 이름을 빌린 시각적 추론이 비교적 많이 나타났다. 학생들은 도형의 성질에 대한 질차적 이해가 결여되어 있는 상태에서 친숙한 그림을 접하는 되는 경우 시각적 원형에 의존하는 경향이 있다(van Hiele, 1986). 또한 비직관적으로 삼각형인 예에서와 마찬가지로 오각형, 육각형, 사각형과 같이 특정 도형의 예에서 형식적 추론이 상대적으로 많이 나타났다. 특히 열린 삼각형 모양에 대해서 학생들은 삼각형을 식별함에 있어 닫혀있지 않은 도형은 삼각형이 아닌 예로 식별하였다. 본 연구를 통해 학생들이 비직관적으로 삼각형이 아닌 예보다는 비직관적으로 삼각형인 예를 더욱 식별하지 못한다는 것을 알 수 있었다.

본 연구에서는 van Hiele의 기하적 사고의 발달 수준을 사용하여 학생들의 기하적 수준을 범주화한 결과 분석적 인식 수준인 2수준에 해당되는 학생들이 22명으로 가장 많았으며, 비형식적 연역 수준인 3수준에 해당되는 학생들이 5명, 시각적 인식 수준인 1수준에 해당되는 학생들이 2명으로 나타났다. 학생들의 기하적 수준과 추론 유형을 분석한 결과 1수준의 학생들은 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예를 시각적 추론을 통해 식별하는 학생들이 다른 수준에 비하여 상대적으로 많았으며, 2수준과 3수준의 학생들은 대부분 삼각형의 본질적인 속성에 기초한 추론을 통해 삼각형을 식별하였다. 본 연구에서는 추론 유형 간에 기하적 수준 차이가 발견되었지만, 제시된 도형의 특성이 학생들의 추론 유형에 영향을 주기도 하였다. 시각적 추론과 비본질적 속성에 기초한 추론은 1수준의 학생들에게서 가장 많이 나타났으며, 본질적 속성에 기초한 추론은 3수준의 학생들에게서 가장 많이 나타났다. 특히 형식적 추론이 3수준보다 2수준의 학생들에게서 많이 나타났는데, 이는 도형의 이름을 제시한 학생들 중에서 도형의 성질과 포함 관계를 이해한 학생이 많지 않았기 때문이다.

기하에 대한 직관, 지식, 통찰 등은 일상생활에 유용하게 작용할 뿐 아니라 수학의 다른 영역을 이해해 나가는 경우에도 강력한 영향을 미친다(김남희, 2001). 학생들은 교과서와 수업활동에서 전형적으로 제한된 도형의 예들을 접하거나, 도형의 원형 이미지만 학습하게 된다면 학생들은 삼각형에 대한 불충분한 개념이미지를 생성하게 된다(Clements & Battista, 1992). 본 연구에서는 모든 학생들이 비직관적으로 삼각형인 예를 제외하고는 모든 도형을 정확하게 식별하였다. 몇몇 학생들은 비스듬한 삼각형, 뾰족한 삼각형, 둔각삼각형과 같이 비직관적으로 삼각형인 예들을 삼각형으로 인식하지 못하였으며, 비본질적 속성에 기초한 추론이 상대적으로 많이 나타났다. 학생들은 취학 전 그들의 환경에서 사물과 상호작용을 통해 기하적 도형의 비형식적 지식을 구성하며 오직 이러한 경험이 학생들에게 도형의 시각적 표상을 제공해준다. 교사는 학생들이 도형에 대한 적절한 개념이미지를 형성할 수 있도록 도와주어야 한다. 따라서 교사는 직관적으로 삼각형인 예와 직관적으로 삼각형이 아닌 예뿐 아니라 비직관적으로 삼각형인 예와 비직관적으로 삼각형이 아닌 예들도 학생들에게 충분히 제시하여 학생들이 삼각형에 대한 풍부한 예의 범주(Example Space)를 형성할 수 있도록 해야 한다.

## 참고문헌

김남희 (2001). 기하관을 활용한 학교수학의 지도, 대한수학교육학회지<학교수학> 3(1),

155-184

- 김수미 · 정은숙 (2005). 범례 제시를 통한 도형 개념의 지도 방안, 대한수학교육학회 논문집 15(4), 401-417.
- 박경미 (2007). 도형 개념의 이해에 영향을 미치는 언어적 측면에 대한 연구-용어의 어원과 조어 방식을 중심으로-, 한국수학교육학회 시리즈 A 46(3), 245-261
- 이종영 (2001). 컴퓨터 환경에서 초등학교 기하 지도에 관한 고찰, 대한수학교육학회지 11(1), 89-102
- 홍성관 · 하정임 · 박철호 (2007). 격자점 과제지 활동에서 나타난 중학생의 다각형 개념에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E 21(3), 431-450
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Burger, W. & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Clements, D., Swaminathan, S., Hannibal, M., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 192-212.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cohen, M., & Carpenter, J. (1980). The effects of non-examples in geometrical concept acquisition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 11(2), 259-263
- Driskell, S. O. S. (2004). Fourth-grade students' reasoning about properties of two-dimensional shape. Unpublished Doctoral dissertation, University of Virginia.
- Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics* 69, 183-194
- Hannibal, M. (1999). Young children's developing understanding of geometric shapes. *Teaching Children Mathematics* 5(6), 353-357
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th PME International Conference* (pp. 223-228). Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry - two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11(1), 61-76.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge, UK:

- Cambridge University Press.
- Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics* 32, 157-179.
- Kellogg, R. (1980). Feature frequency and hypothesis testing in the acquisition of rule-governed concepts. *Memory & cognition* 8, 297-303.
- Martin, G. W., & Strutchens, M. E. (2000). Geometry and measurement. In E. A. Silver, & P. A. Kenney(Eds.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 193-234). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Michener, E. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science*, 2, 361-383.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics* 42, 179-196.
- Petty, O., & Jansson, L. (1987). Sequencing examples and non-examples to facilitate concept attainment. *Journal for Research in Mathematics Education* 18(2), 112-125.
- Shaughnessy, J., & Burger, W. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. *Mathematics Teacher* 78(6), 419-427.
- Smith, E., Shoben, E., & Rips, L. (1974). Structure and process in semantic memory : A featural model for semantic decisions. *Psychological Review* 81, 214-241.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples : The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics Education* 69, 81-95.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65 - 81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a Constructive Activity: Learners generating examples*. Mahwah: Erlbaum.
- Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education* 17, 130-139.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics* 69, 131-148
- Zodik, I., & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 69, 165-182.



## The Analysis of Children's Reasoning Types In Identifying Examples and Non-examples of a Triangle

Kim, Kyungmi<sup>3)</sup> · Kim, Hyun Eun<sup>4)</sup>

### Abstract

The purposes of the study were to investigate how children define a triangle, their reasoning types in identifying examples and non-examples of a triangle, and the relationship between their reasoning types and geometrical levels. Twenty-nine students consisted of 3th to 6th grades were involved in the study.

Using the van Hiele levels of geometrical thought, children's reasoning types for identifying a figure as a triangle or non-triangle were categorized into visual reasoning, reasoning based on the figure's attributes and formal reasoning. The figure's attributes were further divided into critical and non-critical attributes.

Most children identified a figure as a triangle or non-triangle based on critical attributes of the figure(e.g. closed figure, three, vertices, straight sides etc.) Some children identified a figure based on non-critical attributes of the figure(e.g. the length of the sides, the measurement of the angles, or the orientation of the figure). Particularly, some children who had lower levels of geometry identified a figure using visual reasoning, taking in the whole shape without considering that the shape is made up of separate components.

Key Words : Examples of a Triangle, Nonexamples of a Triangle, Reasoning

---

3) Korea University, Center for Curriculum and Instruction studies (kyungmi@korea.ac.kr)

4) Korea University, Graduate School (jsmkhe@korea.ac.kr)