

탄성 도파봉에서 고주파수 파동의 전파 특성

Propagation Characteristics of High-frequency Waves in an Elastic Waveguide

이 정 구*·김 진 오†

Jung Gu Lee and Jin Oh Kim

(2010년 6월 25일 접수 ; 2010년 8월 12일 심사완료)

Key Words : Ultrasonic Wave(초음파), Waveguide(도파봉), High-frequency(고주파수), Wavelength(파장), Wave-number(파수)

ABSTRACT

The paper presents a theoretical analysis on the propagation characteristics of the high-frequency wave in an elastic waveguide whose diameter is less than or similar to the wavelength. The theoretical results were verified by comparing them with the numerical results obtained by the boundary-element method. The ratio of the waveguide diameter to the wavelength affects the number of the existing wavenumber, and thus it affects the propagation characteristics. In the media with attenuation, the trend is similar to that in the media without attenuation except the decreasing amplitude.

1. 서 론

초음파의 응용은 초음파의 전파 신호를 계측에 이용하는 센서 기술과 초음파의 전달 에너지를 이용하는 액추에이터 기술로 분류될 수 있다⁽¹⁾. 초음파 센서 기술은 유량 측정⁽²⁾, 비파괴 검사⁽³⁾ 등의 분야에 활용되고 있으며, 초음파 액추에이터 기술은 드릴⁽⁴⁾, 절삭⁽⁵⁾, 용접⁽⁶⁾, 세척⁽⁷⁾, 모터⁽⁸⁾ 등의 분야에 활용되고 있다.

센서 기술에 사용되는 초음파는 주파수가 수십 kHz 또는 그 이상이다. 적용 분야의 환경에 따라 도파봉이라는 파동 유도 기구를 덧붙여 사용하기도 한다. 그 대표적인 경우가 고온 유체의 유량 측정에 사용되는 초음파 유량계이다. 퀴리 포인트(curie point, 압전 현상이 사라지는 온도)이상의 유체의

유량을 측정하는 경우 압전 변환기를 보호하기 위해 원통형 도파봉이 사용된다. 도파봉에서 진행하는 펄스의 분산과 열전달을 고려하여 도파봉의 치수가 결정된다⁽⁹⁾.

초음파 액추에이터에서는 대상체에 초음파 에너지를 전달하며 진동을 증폭시키기 위해 도파봉을 사용한다. 초음파 용접기, 드릴, 절삭기에 사용되는 원통형 금속 봉이 그러한 사례이다. 또한 반도체 공정에 이용되는 우수식(shower-type) 초음파 세척기에서 물줄기 또한 도파봉의 역할이다. 현재까지 액추에이터에서 사용되는 주파수의 범위는 수십 kHz 이고 이런 경우에는 초음파의 파장이 도파봉의 지름보다 크기 때문에 도파봉에서 길이 방향으로 전파하는 파를 하나의 평면파로 가정하여 도파봉을 설계한다⁽¹⁰⁾.

하지만 주파수가 수 MHz 이상인 고주파수 파동에서는 초음파의 파장이 도파봉의 지름과 비슷하거나 이보다 작다. 이런 경우에는 전파하는 파동을 평면파라고 가정 할 수가 없고 여러 개의 진동 모드

† 교신저자; 정희원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02)820-0662, Fax : (02)820-0668

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

가 증첩되어 복잡한 양상이 나타난다. 따라서 고주파수 파동의 경우에 대한 액추에이터용 도파봉에서 전파 특성에 대한 연구가 필요하다.

이 논문은 액추에이터용 원통형 도파봉의 단면 지름이 파동의 파장과 비슷하거나 이보다 작은 경우에, 도파봉에서 고주파수 파동의 전파 특성을 보인다. 대상으로 삼은 도파봉은 원통형이다. 원통형 도파봉에서 고주파수 파동 전파 특성을 이론적으로 해석하고, 그 결과를 경계요소법에 의한 수치 해석 결과와 비교하여 검증한다.

2. 이론적 해석

Fig. 1과 같은 고주파수 액추에이터용 원통형 도파봉에서 고주파 파동을 이론적으로 해석하고, 비감쇠 전파 특성과 감쇠 전파 특성을 파악한다.

2.1 파동방정식 및 경계조건

원통형 도파봉에서 탄성과 전파에 따른 압력 변화, 즉 음압 $p(r, \theta, z, t)$ 는 반경방향 좌표 r , 원주방향 좌표 θ , 길이방향 좌표 z 와 시간 t 의 함수로서, 다음과 같은 파동 방정식의 지배를 받는다⁽¹¹⁾.

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1)$$

여기서 c 는 파동 전파 속도이다. 식(1)의 해의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$p(r, \theta, z, t) = \sum_m R_m(r) e^{jm\theta} Z(z) e^{j\omega t} \quad (2)$$

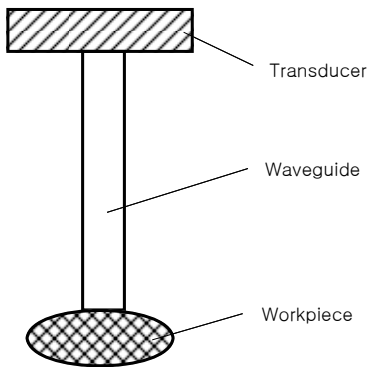


Fig. 1 Schematic diagram of a high-frequency actuator

축대칭 파동의 경우에는 식(2)가 다음과 같이 단순화 된다.

$$p(r, z, t) = R(r) Z(z) e^{j\omega t} \quad (3)$$

식(3)을 식(1)에 대입하여 변수 분리하면 다음 두 식을 얻는다.

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + (k^2 - k_z^2) R = 0 \quad (5)$$

여기서 k 는 ω/c 인 파수(wavenumber)이고, k_z 는 길이 방향의 파수이다. 식(4)의 해는 다음과 같다.

$$Z(z) = A_1 e^{jk_z z} + A_2 e^{-jk_z z} \quad (6)$$

+z방향으로의 파동 전파만을 고려한다면 $A_1=0$ 이 되고, 식(6)은 다음과 같이 간단해진다.

$$Z(z) = A e^{-jk_z z} \quad (7)$$

베셀 방정식(5)의 해는 다음과 같이 베셀 함수로 표현된다.

$$R(r) = B_1 J_0(k_r r) + B_2 Y_0(k_r r) \quad (8)$$

여기서 k_r 은 반경 방향의 파수이며, 다른 파수들과의 관계가 다음과 같다.

$$k_r^2 = k^2 - k_z^2 \quad (9)$$

중심 축($r=0$) 위치에서 음압은 유한한 값을 가지므로 식(8)에서 $B_2=0$ 이 되고, 식(8)은 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$R(r) = B J_0(k_r r) \quad (10)$$

식(10)에 도파봉 원주면의 경계조건을 대입하면 k_r 을 구할 수 있다.

도파봉 원주면의 경계조건으로 두 가지를 고려한다. 하나는 자유경계면이고 다른 하나는 고정 경계면이다. 자유경계면은 떨어지는 물줄기처럼 도파봉 원주면이 공기 중에 노출되어 있는 경우이다. 원주면($r=r_0$)에서 음압 $p=0$ 인 경계조건을 적용하면 다

음과 같이 된다.

$$J_0(k_r r_o) = 0 \tag{11}$$

고정 경계면은 고체 관 내부 공기에서의 음파처럼 도파봉 원주면이 구속되어 있는 경우이다. 원주면 ($r=r_o$)에서 속도 $v=0$ 인 경계 조건을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\left. \frac{d}{dr} [J_0(k_r r)] \right|_{r=r_o} = 0 \tag{12}$$

2.2 비감쇠 파동 전파

도파봉 원주면이 자유경계면이면, 식 (11)을 만족하는 $k_r r_o$ 값은 2.40, 5.52, 8.66, ... 이다. 이때 k_r 값은 도파봉의 반지름에 따라서 그 값이 결정되고, 식 (9)를 만족하는 실수(real number) 범위에서 그 개수 N 이 결정된다. 해를 나타내는 식은 다음과 같이 된다.

$$p(r, z, t) = \sum_{n=1}^N C_n J_0(k_{r,n} r) e^{j(\omega t - k_{z,n} z)} \tag{13}$$

예를 들어 재질이 물이고 $r_o = 1.5$ mm인 원통형 도파봉에서 파동이 1.6 MHz로 전파할 때, k_r 값은 1.60, 3.68, 5.77, ... 이다. 하지만 식 (9)를 만족하는 k_r 은 $k_{r,1}=1.60$, $k_{r,2}=3.68$ 이고 $N=2$ 이다. 이때 식 (13)은 다음과 같이 된다.

$$p(r, z, t) = C_1 J_0(k_{r,1} r) e^{j(\omega t - k_{z,1} z)} + C_2 J_0(k_{r,2} r) e^{j(\omega t - k_{z,2} z)} \tag{14}$$

중심축($r=0$) 위치에서 길이 방향 좌표 z 의 함수로 음압을 나타내면 Fig. 2와 같다. 식 (14)에서와 같이 두 항이 합쳐지는 경우에 음압이 일정한 간격으로 반복되는 분포를 보인다.

일반적으로 식 (11)과 식 (12)를 만족하는 $k_r r_o$ 의 값은 무수히 많이 존재한다. 하지만 앞서 언급했듯이, 도파봉의 반지름 r_o 와 식 (9)에 의해서 $k_r r_o$ 는 유한한 개수를 갖는다. 도파봉 원주면이 자유경계면인 경우에 무차원화된 반지름 r_o/λ 에 따라서 식 (9)와 식 (11)을 만족하는 k_r 값과 k_z 값을 Table 1에 나타내었다. 여기서 λ 는 도파봉을 전파하는 파의

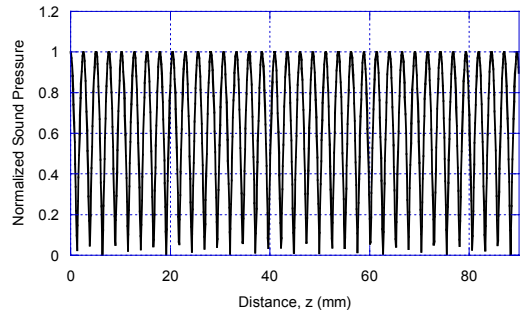


Fig. 2 Sound pressure variation along the central axis of a waveguide when two radial wavenumbers exist

Table 1 Radial wavenumbers according to the radius of the waveguide cross-section for the free circumferential surface

r_o/λ	$k_{r,n} r_o$			$k_{z,n} r_o$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0.53	2.40			2.34		
1.07	2.40	5.52		6.25	3.80	
1.60	2.40	5.52	8.66	9.75	8.25	5.1

Table 2 Radial wavenumbers according to the radius of the waveguide cross-section for the fixed circumferential surface

r_o/λ	$k_{r,n} r_o$			$k_{z,n} r_o$		
	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1.07	3.83			5.49		
1.60	3.83	7.02		9.30	7.20	
1.86	3.83	7.02	10.12	11.08	9.40	5.83

파장이다. 도파봉 원주면이 고정 경계면인 경우의 k_r 값과 k_z 값을 Table 2에 나타내었다.

자유경계면인 경우 r_o/λ 값이 0.53일 때, 고정 경계면인 경우 r_o/λ 값이 1.07일 때 도파봉에서 전파하는 파는 하나의 파수만 존재하여 평면파처럼 진행한다. 중심축($r=0$) 위치에서 길이 방향 좌표 z 의 함수로 음압을 Fig. 3에 나타내었다. 하지만 r_o/λ 값이 그 이상일 때는 파수가 2개 이상 존재하며 이때는 음압이 일정한 간격으로 반복되는 양상을 나타낸다. 파수가 3개 존재하는 경우에 도파봉 중심축에서 길이 방향 좌표에 따른 음압을 Fig. 4에 나타내었다.

2.3 감쇠 파동 전파

도파봉에서 고주파로 전파하는 파는 열 손실과 에너지 분자 교환 등에 의한 에너지 손실로 인해 전파 거리에 따라 파동의 크기가 감소한다. 이러한 파동 감쇠를 고려한 파수 \bar{k} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{k} = k - j\alpha \quad (15)$$

여기서 α 는 손실 계수(attenuation coefficient)이다.

도파봉의 재질이 고체이면 손실 계수 α 는 주파수 f 와 다음과 같은 관계가 있다⁽¹²⁾.

$$\alpha = \beta_0 f^2 \quad (16)$$

여기서 β_0 는 상수이며 물질에 따라 그 값이 다르다. 또한 도파봉 내부가 유체로 채워진 경우, 손실 계수 α 와 주파수 f 의 관계는 다음과 같다.

$$\alpha = \alpha_0 f^n \quad (17)$$

여기서 α_0 는 상수이며 물과 같은 대부분의 유체인

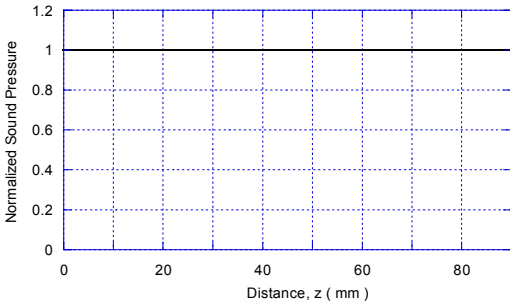


Fig. 3 Sound pressure along the axis of a waveguide when one radial wavenumber exists

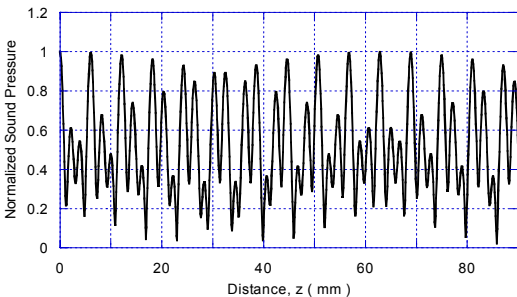


Fig. 4 Sound pressure variation along the central axis of a waveguide when three radial wavenumbers exist

경우 n 값은 2라고 알려져 있다⁽¹³⁾.

파가 전파하는 방향의 손실만을 고려하면 식 (13)은 아래와 같이 표현된다.

$$p(r, z, t) = \sum_{n=1}^N C_n J_0(k_{r,n} r) e^{j(\omega t - k_{z,n} z)} e^{-\alpha z} \quad (18)$$

감쇠를 고려한 음압은 파동 전파 거리가 증가함에 따라 지수 함수적으로 감소된다. 2.2절에서 언급된 비감쇠 파동 전파에 감쇠를 고려하여, 중심축에서 길이 방향 좌표 z 의 함수로 음압을 Fig. 5에 나타내었다.

3. 경계요소 해석

원통형 도파봉에서 고주파 파동을 이론적으로 해석한 결과의 타당성을 확인하기 위하여, 경계요소법에 의한 수치 해석 결과와 비교한다. 경계요소 해석용 상용 프로그램인 SYSNOISE를 사용하였다.

해석 대상은 2.2절에서 언급된 길이 방향 파수 k_z 가 한 개, 두 개, 세 개 존재하는 원통형 도파봉이다. 각각의 도파봉의 길이는 90 mm로 동일하며, 반지름은 각각 0.45, 1.25, 1.50 mm이다. 모델링에 사용된 요소는 사각형 shell63이고, 정확한 해석을 위해서 가진되는 주파수인 1.6 MHz의 파장을 고려하여 요소의 최대 길이를 0.1 mm로 하였다. 매질은 앞 절과 같이 물로 가정하였고, 그에 해당하는 파동의 전파 속도 1500 m/s와 밀도 1000 kg/m³를 입력하였다.

감쇠를 고려한 해석의 경우에는 손실 계수를 파동의 전파 속도에 표현시켜야 한다. 이를 위해 파동의 전파 속도를 다음과 같이 표현하였다.

$$c = a + ib \quad (19)$$

여기서 a 는 실제 파동의 전파 속도인 1500 m/s이고, b 는 손실 계수를 속도로 환산한 값이다. 손실 계수 α 를 속도 b 로 표현하기 위해 식 (19)를 식 (13)에 대입하여 식 (18)과 계수끼리 비교하면 아래와 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$b = \frac{a^2}{2\pi f} \alpha \quad (20)$$

식 (20)으로 구해진 파동의 전파 속도의 허수 성분 b 의 값은 가진주파수 f 가 1.6 MHz일 때 16 m/s이다.

원통형 도파봉의 윗면에는 크기가 1 m/s 이고, 가
진주파수 1.6 MHz인 속도 경계조건을 주고 아랫면에는
압력이 0인 자유경계조건을 주었다. 원주면의 경
계 조건은 도파봉이 자유경계면인 경우는 $p=0$ 이고
고정 경계조건인 경우는 $v=0$ 이다.

경계요소해석을 통해 구한 음압을 중심축($r=0$) 위
치에서 길이 방향 좌표 z 의 함수로 Fig. 6에 이론적
인 결과와 비교하여 나타내었다. 정규화된 음압 크기
의 차이는 이론해석에서 파동 간섭이 강하게 나타나는
근접음장(near field)의 영향을 무시하였기 때문이
다. 하지만 이론수치 해석으로 구한 반 파장의 값은

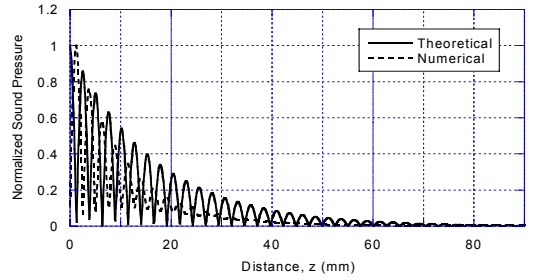
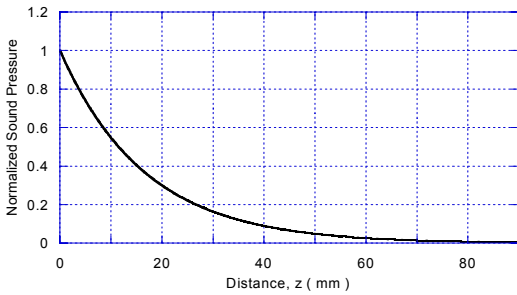
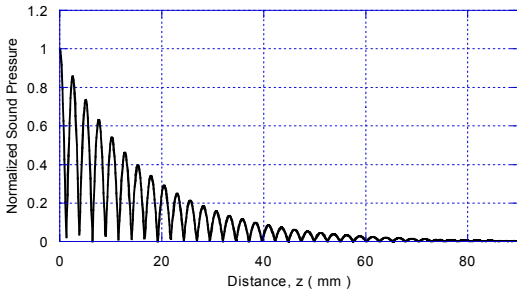


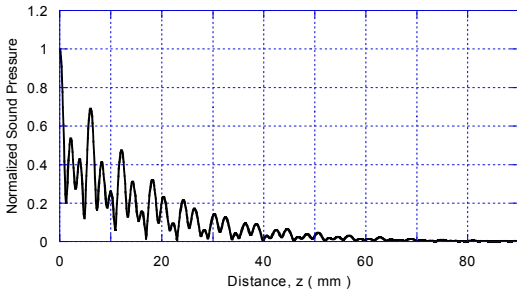
Fig. 6 Comparison of the normalized sound pressure by theoretical and numerical analyses



(a)

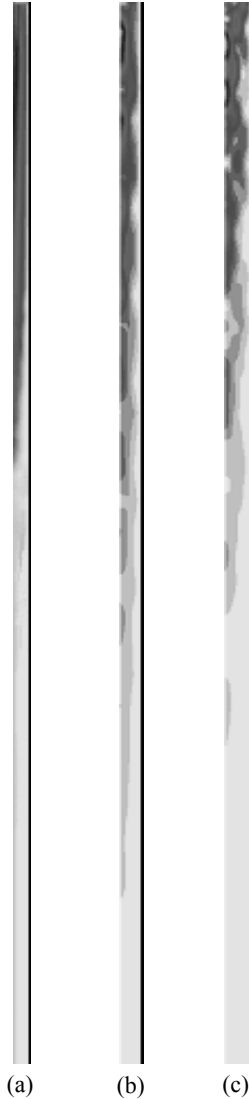


(b)



(c)

Fig. 5 Sound pressure variation along the central axis of a waveguide with attenuation: (a) one wavenumber, (b) two wavenumbers, (c) three wavenumbers



(a)

(b)

(c)

Fig. 7 Sound pressure distribution in the central cross section: (a) diameter 0.9 mm, (b) diameter 2.5 mm, (c) diameter 3.0 mm

2.57이며 이 값은 이론적 반 파장 값인 2.52와 비슷하다.

파수가 1개, 2개, 3개인 경우에 도파봉 중심축 단면에서의 음압 분포를 Fig. 7에 나타내었다. 파수가 1개인 경우에는 Fig. 7의 (a)와 같이 단순한 음압 분포를 보이나 파수가 2개 이상인 경우에는 (b)와 (c)와 같이 다소 복잡한 음압 분포를 나타낸다.

4. 결 론

액추에이터용 원통형 도파봉에서 고주파수 파동의 전파 특성을 이론적으로 해석하였다. 이론적 결과를 검증하기 위해 경계요소법에 의한 수치해석을 하여 비교하였고, 고주파수 파동의 전파에서 음압 크기는 다소 차이가 있지만 음압의 주기성 경향은 잘 일치함을 확인하였다.

원통형 도파봉의 반지름과 파장의 비에 따라 파수 값 개수가 달라지고 이에 따라서 고주파수 파동 특성이 달라졌다. 파수 값이 1개 존재하는 경우에는 파동이 하나의 평면파처럼 진행하지만, 파수 값이 2개 이상인 경우에는 여러 개의 평면파가 전파하므로 파동이 중첩되는 현상이 나타나서 음압이 일정 간격으로 반복되는 분포를 보였다.

감쇠가 고려되는 매질에서도 비슷한 경향을 보였다. 전파 거리에 따라서 파동의 세기가 물론 작아지면서, 비감쇠 파동 특성처럼 파수 값의 개수에 따른 파동 전파 특성이 나타났다.

후 기

이 연구는 지식경제부 및 정보통신산업진흥원의 “IT융합 고급인력과정 지원사업”의 지원으로 수행되었음(NIPA-2010-0004).

참 고 문 헌

(1) Kim, J. O., 2000, “Ultrasonic Sensors and Actuators,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 10, No. 5, pp. 723~728.
 (2) Lynnworth, L. C., 1989, Ultrasonic Mea-

surements for Process Control, Academic Press, New York.

(3) Schmerr, L. W., 1998, Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation, Plenum Press, New York.

(4) Maurer, W. C., 1968, Novel Drilling Techniques, Pergamon Press, Oxford, pp. 44~49.

(5) Thoe, T. B., Aspinwall, K. K., Wise, W. L. H., 1998, “Review on Ultrasonic Machining,” International Journal of Machine Tools and Manufacturing, Vol. 38, No. 4, pp. 239~255.

(6) Harman, G., 1997, Wire Bonding in Microelectronics, Material, Processes Reliability, and Yield, McGraw-Hill, New York, Chapter 2.

(7) Kim, J. O., Choi, S., Kim, J. H., 1999, “Vibroacoustic Characteristics of Ultrasonic Cleaners,” Applied Acoustics, Vol. 58, No. 2, pp. 211~228.

(8) Ueha, S., Tomikawa, Y., Kurosawa, M., Nakamura, N., 1993, Ultrasonic Motors, Clarendon Press, Oxford.

(9) Choi, I.-S., Chun, H. Y., Kim, J. O., Kim, I.-S., 2003, “Improving Wave Propagation Performance of an Ultrasonic Waveguide for Heat Isolation,” The Journal of the Acoustical Society of Korea, Vol. 22, No. 7, pp. 543~553.

(10) Kim, D. S., Kim, J. O., 2007, “Vibration Transmission Characteristics due to the Variation in the Cross-section of a Waveguide,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 4, pp. 310~316.

(11) Kinsler, L. E., Frey, A. R., Coppens, A. B., Sanders, J. V., 2000, Fundamentals of Acoustics, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, Chapter 7.

(12) David, J., Cheeke, N., 2002, Fundamentals and Applications of Ultrasonic Waves, CRC Press, Chapter 5.

(13) Sushilov, N. V. and Cobbold, R. S. C., 2003, “Wave Propagation in Media Whose Attenuation Is Proportional to Frequency,” Wave Motion, Vol. 38, No. 3, pp. 207~219.