대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No2., 239-257. Jun. 2010

미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰

정 연 준*

수학사는 수학적 개념에 관련된 요소들 사이의 관계를 분석할 수 있는 맥락과 이들 관계를 학습하는 과정에서 나타날 수 있는 잠재적 장애 요인을 살펴볼 수 있는 기회를 제공한다. 본 논문은 미분 개념의 역사적 발달 과정을 살펴봄으로써, 학교수학에서 직관적으로 지도되는 미분 개념 학습에 관련된 요소들이 최종적으로 확립된 정의와 어떻게 연결되는지를 분석하고자 하였다. 분석 결과를 바탕으로 하여 교육적 시사점을 제안하였다.

1. 서론

학교수학에서 미분계수는 전통적으로 할선과 접선의 관계, 그리고 평균 변화율과 순간 변화율의 관계를 이용하여 직관적으로 지도된다. 할선과 접선, 평균 변화율과 순간 변화율 사이의 관계가 형식적인 차분의 비의 극한 과정을 직관적으로 파악할 수 있는 맥락을 제공할 수 있을 것으로 간주된다. 그러나 이러한 지도에도 불구하고 미분계수를 유도하는 과정에 대한 학생들의 이해는 매우 부족하다(임선정, 2002; Bejudenhout, 1998; Orton, 1983; Vinner, 1991; Zandieh, 1998). 학생들의 미분계수에 대한 기하적 이해는 원과 포물선 등에 제한된 이미지에 강하게 고착되고 변화율에 대한 이해는 상당히 제한되는 등 개념적 이해가 결여된 채 미분 공식의 적용만 숙달되어 있는 모습을 보인다.

수학사는 일반적으로 수학적 사고의 형성과정을 이해하고 그러한 이해를 바탕으로 학습-지도 활동을 설계하는 방법을 찾는 데 있어 유용한 자원으로 간주된다(우정호·민세영·박미애, 2004). 수학은 연구 결과를 전체적으로 되돌아보는 가운데 재조직되는 과정을 거친다. 이러한 재조직 과정은 지식의 구조화에 필요하지만 핵심 아이디어가 발달하게 된 근본적인 동기가 된 의문과 문제가 구조적으로 조직된 지식체 뒤에 가려지기 쉽다. 수학사는 핵심적인 아이디어가 형식화된 구조물 안에서 다른 요소들과 어떻게 연결될 수 있는지 다른 측면에서 볼 수 있는 안목을 부여할 수 있다. 또한 교사에게 학생들의 수학학습에서 야기되는 장애에 대한 통찰을 할 수 있게 함으로써 학생들을 이해하게 되고 적절한 교수 전략을 준비하여 지도에 이용할 수 있게 한다. 이러한 수학사의 교육적 가치를 고려하면, 미분계수의 역사적 발달 과정 분석은 미분계수 지도와 관련하여 유용한 교육적 시사점을 제공할 수 있을 것으로 판단된다.

미적분은 역사적 분석이 풍부하게 되어 있는 분야이다. 미분계수 개념의 역사에 대한 분석이 Boyer(1959), Coolidge(1951), Grabiner(1982) 등에 의해서 이루어진 바 있다. 그러나 이러한 역사적 분석에도 불구하고, 의미 있는 교육

* 아주대학교 겸임교수 (swamp_monk@lycos.co.kr)

적 시사점은 제시되지 못하였다. “현재의 교재는 역사적 순서와 완전히 반대로 이루어져 있다. 정의에서 출발하여, 정리들을 탐구하고 그 다음 응용 문제를 다루는 식으로 이루어져 있다. 역사적 발달 과정은 이와 정반대라는 점은 교사에게 매우 중요하다(Grabiner, 1982: 205)”는 지적이 가장 명시적인 교육적인 언급에 불과한 정도이다.

본 논문은 미분계수와 미적분의 역사를 분석한 연구들을 재음미하여 미분계수의 역사적 발달을 정리하고, 이로부터 유용한 교육적 시사점을 도출하고자 한다. Boyer(1959)는 미분계수와 정적분 두 개념의 역사적 발달 과정을 극한 개념의 발달을 축으로 하여 정리한 바 있다. 이러한 과정에서 Boyer는 미분계수에 대한 이해가 운동 현상에 대한 이해를 바탕으로 하여 점진적으로 진전되는 모습을 드러내었다. 그러나 그는 극한 과정에만 주목함으로써 운동학적 직관이 형식화되는 과정을 풍부하게 드러내지는 못하였다. 본 논문에서는 미분계수에 대한 운동학적 이해가 형식화되는 과정을 보다 풍부하게 드러내고, 이를 통해서 유용한 교육적 시사점을 얻고자 한다.

II. 미분 개념의 역사적 발달과정 분석

1. 고대 그리스 시대

접선에 대한 연구는 고대 그리스 시대에 활발하게 진행되었다. Euclid는 “원론”의 3권에서 원에 대한 접선을 원과 만나지만 가로지르지 않는 직선으로 정의하였다. “직선이 원과 만나지만 작도했을 때 원을 절단하지 않을 때, 그 직선을 원과 접한다고 한다(Heath, 1956: 41).” 이러한 정의에 뒤이어 Euclid는 접선의 성질을 다루었는데, 3권의 정리 16이 대표적이다. “지름의 끝점에서 지름에 수직이 되도록 그은 선은 원의 바깥에 놓인다. 이 직선과 원 둘레 사이에는 어떠한 직선도 놓일 수 없다(Heath, 1956: 51).” 따라서 접선은 원과 오직 한 번 만날 뿐 아니라 직선 전체가 원의 바깥에 있고, 접점을 지나는 다른 직선은 이러한 성질을 지니지 못한다(Coolidge, 1951: 450). 고대 그리스인들은 이러한 결과를 바탕으로 포물선 등에 대한 접선을 연구하였다(Walker, 1932: 124). 고대 그리스인들은 곡선에 대한 접선을 결정하기 위하여 귀류법을 사용하여 주어진 직선이 곡선과 한 점에서 만나며, 직선 위에 있는 다른 점들은 곡선의 외부에 있다는 것을 보였다(Baron, 2003: 51).

접선에 대한 이러한 연구에도 불구하고 고대 그리스인들이 미분계수에 대한 기초적인 이해에 도달하였다고 하기 힘들다(Boyer, 1959: 58; Sherry, 1982: 38). 함수의 그래프에 해당하는 곡선을 다루었지만 함수에 대한 이해를 가지고 하기 있다고 하기 힘들다. 또한 미분계수 개념은 순간적인 운동 혹은 순간 변화율 개념과 연결되지만, 이것이 고대 그리스 시기에는 불가능하였다. 고대 그리스인들은 순간적인 운동 현상에 대한 논의가 모순을 일으킬 수 있다는 점을 인식하고 이에 대한 논의를 금지하였다. 고대 그리스인들은, 귀류법을 사용할 뿐 아니라 운동학적 관념을 연결하지 않음으로써, “정적인 기하학과 일치되게(Boyer, 1959: 66)” 접선을 다루었다.

순간적인 운동 현상에 대한 논의가 가지고 있는 개념적 문제는 Zeno의 역설을 통해서 극적으로 드러났다. 운동을 비롯한 변화 현상은 고대 그리스 문명의 초기 시절부터 연구의 대상이 되었다(Lloyd, 1970: 59-63). 원자론은 초기에 제시된 변화 현상에 대한 많은 설명들의 토

대가 되었다. 이에 Zeno는 원자론적 관점을 논박하기 위하여 정교하게 구성된 일련의 역설들을 제시하였다(Cajori, 1920; 한대희 2000). Zeno는 ‘이분법’, ‘Achilles와 거북이’, ‘화살’, ‘Stade’ 등 네 가지의 역설[2)]을 제시하였는데, 이는 연속적인 변화에 내재한 무한 과정과, 점과 현재와 같은 공간과 시간의 최소 단위와 연결하여 역설을 유도함으로써 원자론이 운동 현상을 설명할 수 없다는 것을 보이기 위한 것이었다. 원자론을 따른다면 연속체의 분할은 더 이상 나눌 수 없는 불가분량에 도달하게 되며, 따라서 운동에 대해서 순간적인 운동 현상에 대한 논의가 가능하다. Zeno은 운동 곧 위치의 변화에는 시간이 필요하며, 이것이 순간적인 운동 현상에 대한 설명과 충돌을 일으킨다는 것을 보였다. 예를 들어, 각 순간에 위치의 변화가 불가능하다면 운동의 각 순간에 물체가 정지해 있다고 할 수 밖에 없는데, ‘화살 역설’은 이로부터 비롯되는 문제를 제기한다.

> 만약 시간이 더 이상 쪼개질 수 없는 순간들로 이루어져 있다면 움직이는 화살은 항상 정지해 있다. 왜냐하면 매 순간마다 그 화살은 한 고정된 지점에 있기 때문이다. 각 순간에서 이 명제가 참이므로 화살은 결코 움직이지 않는다.(Eves, 1995: 345-6)

만약 이러한 논증에서 벗어나기 위해서 순간적으로 이동할 수 있다고 주장할 경우 ’Stade 역설’을 통해서 순간이 더 이상 나뉠 수 없는 단위가 되지 못한다는 반박이 제기된다. 같은 크기의 입방체를 이어서 만든 막대가 일정한 속도로 움직이는데, 그 속도가 각 순간 마다 하나의 입방체를 차지하는 공간을 지나가는 정도라 하자. 이제 다른 막대를 동일한 속도로 그러나 반대 방향으로 움직인다고 하자. 이제 한 막대를 중심으로 해서 볼 경우 상대편 막대는 두 칸을 이동한 것이 된다. 이때 이 순간이 가장 작은 시간 간격이 될 수 없다. 왜냐하면 막대가 한 칸을 지나가는 시간을 이용하여 더 작은 단위를 만들 수 있기 때문이다.

Aristotle은 실무한과 잠재적 무한을 구분하고 실무한을 금지함으로써 Zeno의 역설을 극복하고자 하였다(Boyer, 1959; Schwayder, 1955: Sherry, 1982). Aristotle에 의하면 무한은 물리적 실재에서 실체화될 수 있을 때에만 가능한 것으로, 오직 시간의 지속, 사물의 생성과 소멸의 반복, 연속적인 양의 계속적인 분할 등과 같은 형태로 나타난다. 잠재적 무한만 실재하며. 완성된 형태의 무한, 실무한은 존재하지 않고 경험의 대상이 될 수 없다. Aristotle은 논리만이 아니라 감각적 경험에 크게 의존하여 감각적 경험을 뛰어넘는 추상화에 대하여 부정적이었다. 이러한 Aristotle의 관점을 따르면, 상식적인 감각적 경험에 기반한 통념과 언어적 용법에서 일관되게 확인될 수 있는 것만이 논의의 대상이 된다. 따라서 Aristotle의 관점에서 보면, 실무한에 대한 논의는 금지되어야 한다. Zeno의 역설은 실무한과 잠재적 무한을 혼동하였기 때문에 발생한 것이다. 실무한이 금지되면 불가분량이 부정된 것처럼 순간적인 운동 현상에 대한 논의 역시 부정된다. Aristotle은 아무 것도 현재에 운동 상태에 있거나 정지 상태에 있

2) ‘이분법’은 주어진 거리를 이동하려면 먼저 주어진 거리를 이등분한 점을 항상 통과해야 하기 때문에 결국 무한히 많은 점을 통과해야 하며 이로 인해서 운동이 불가능하다는 역설이다. ‘Achilles와 거북이’는 느린 거북이가 앞에서 출발하였을 때 Achilles가 거북이가 있던 자리에 도착하였을 때 항상 거북이가 조금 더 앞에 있기 때문에 결코 Achilles가 거북이를 따라 잡을 수 없다는 역설이다. ‘화살’은 각각의 순간마다 화살이 고정된 위치에 있고 따라서 각각의 순간마다 정지해 있기 때문에 운동이 불가능하다는 역설이다. ‘stade’는 순간적으로 이동한 것이 가능하다고 할 경우 엇갈리며 통과하는 두 물체의, 다른 물체에 본 상대적인, 순간속도가 더욱 빨라지며 이것은 더 작은 단위의 순간이 존재한다는 것을 의미하기 때문에 문제가 된다는 역설이다.

다고 말할 수 없다고 주장하였다. 위치의 변화를 수반하는 운동에 대한 논의는 분할될 수 있는 시간 간격이 동반되어야 한다. 현재 혹은 순간은 시간적으로 분할될 수 없다. 따라서 현재 혹은 순간은 운동에 대한 논의에서 사용되어서는 안 된다. 분할할 수 없는 것을 분할 가능한 것으로 생각할 경우 모순이 발생하게 된다.

한편, Aristotle은 실무한의 금지 이외의 방식으로 순간적인 운동 현상에 대한 논의에 영향을 주었다. Aristotle은 운동이 항상, 힘의 작용과 같은 원인이 있을 때에만 가능하며, 원인이 없는 자발적인 운동은 있을 수 없다고 보았다(Lindberg, 2005: 108-9). 하늘을 일주하는 별들의 운동이나 공중에서 떨어지는 돌의 움직임과 같은 것은 물체가 태어난 장소로 향하는 것과 같은 물체의 본질에 의하여 촉발된 자연적인 운동이다. 물체가 본래부터 있던 위치로 향하는 것이 아닌, 다른 방향으로 움직이는 것은 강제 운동의 결과이다. 어떤 물체가 자연 운동을 수행해서 태어난 장소에 도달하면 그것의 운동은 종결된다. 강제 운동의 경우 운동의 원인은 외부의 힘이다. 외부의 힘은 그 물체로 하여금 자연 본성을 어기고 본래의 장소와는 다른 곳으로 움직이도록 강제한다. 강제된 운동은 외부의 힘이 사라질 때 중지하게 된다.

미분계수의 운동학적 측면의 발달은 Aristotle의 관점을 극복하면서 이루어지게 된다. 중세 시대에는 새로운 수학적 개념의 형성보다는 Aristotle 철학이 부과한 제한을 극복하는 토대를 제공하는 것으로서 미분계수의 발달에 중요한 기여를 하였다.

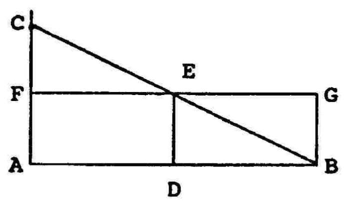
2. 중세 시대

Aristotle의 철학은 중세 스콜라 철학의 토대가 되었다(Grant, 1992). 중세 스콜라 철학자들은 Aristotle의 실무한과 잠재적 무한에 대한 구분을 그대로 받아들였다. 그러나 중세 시대에는 무한에 대하여 중대한 관점의 변화가 일어났다(Boyer, 1959; 김용운 · 김용국, 1986). Aristotle의 무한에 대한 구분을 받아들였지만, 중세 스콜라 철학자들은 Aristotle과 다르게 실무한을 배제하지 않았다. 기독교의 영향에 의해서 신이 무한과 연결되면서, 고대 그리스에서는 사고의 대상이 될 수 없는 것으로 간주된 무한이 중세 시대에는 긍정적으로 평가되고 유한보다 가치 있는 존재가 되었다. 이러한 변화와 함께, 운동과 연속적인 변화의 크기의 양화 문제가 중세 후반기에 본격적으로 다루어지기 시작하였다. Aristotle를 비롯한 고대 그리스의 철학자들은 운동에 대한 형이상학적 사변을 전개하고 천문학 등을 연구하였지만 운동과 연속적인 변화의 양화 문제를 거의 다루지 않았다(Boyer, 1959: 71-2). 14세기에 접어들면서 경험주의적 관점의 영향을 받아서 운동의 본질, 원인과 기제에 대한 철학적 논의보다는 운동의 기술에 관심을 가진 경향이 나타났다(김영식 2001: 64). 14세기에는 등장한 역학자들은 운동에 대한 사변보다는 운동 현상의 규칙성의 기술에 주력하였고, 이러한 과정에서 속도와 속도의 변화, 그리고 순간속도 개념이 등장하게 되었다.

중세 시대의 운동 현상의 기술에 대한 연구, 곧 운동학 연구는 자비심이나 색깔, 온도 등과 같은 성질들이 변하는 양식에 대한 사변적인 연구에서 비롯되었다(Grant, 1992: 91-2; Sherry, 1982: 68-9). 중세 스콜라 철학자들은 질들의 변화에 대한 분석 과정에서 질의 강도와 양을 구분하였다. 14세기 초 Oxford 대학의 Merton 칼리지에서 일단의 학자들이 이러한 구분을 운동 현상에 적용하여 운동의 속도와 이동 거리를 명확하게 구분하였다. Merton 학파는 균일한 속

도와 균일하게 가속된 운동, 곧 등속도 운동과 등가속도 운동을 명확하게 정의하였다(Grant, 1992: 92-3). Merton 학파는 균일한 운동을 '모든' 동일한 시간 간격 동안 동일한 거리를 통과하는 것으로 정의하였다. 단순히 일정한 시간 간격 동안 동일한 이동 거리를 통과하는 운동으로 정의한다면, 균일하지 않은 속도에 의해서도 동일한 거리를 동일한 시간 동안 통과하는 것이 포함될 수 있다. 모든 크기의 동일한 시간 간격 동안 항상 동일한 거리를 이동한다는 것을 명시함으로써 운동의 균일성, 속도의 일정함을 보장한 것이다. 또한 Merton 학파는 이러한 정의를 확대하여, 등가속도 운동, 균일하게 가속된 운동을 정의하였다. 이들은 균일한 가속운동을 모든 동일한 시간 간격에서 동일한 속도의 증가분이 얻어지는 운동으로 정의하였다. 그런데 등가속도 운동에서는 고정된 속도로 움직이는 거리가 발견되지 않는다는 점에서, 속도의 존재성이 문제가 된다. Merton 학파의 연구자들은 순간속도는, 그 순간의 속도로 일정하게 움직일 경우 그려지게 될 경로, 곧 실제의 이동 거리가 아니라 가상적인 이동 거리에 의해 측정될 수 있다고 보았다. 이러한 정의는 정의되어야 할 바로 그 순간속도와 동일한 속도의 균일한 운동을 통해 순간속도를 정의했기 때문에, 순환적이었다고 할 수 있다. 그러나 이상과 같은 논의를 통해 Merton 학파는 속도의 변화 양상에 따라 운동을 다양하게 분류하였으며, 이는 속도를 운동 현상의 기술에서 독립적인 대상으로 삼은 출발점이 되었다. 곧 Merton 학파에 의해 속도를 중심으로 하여 운동을 분류하는 전통이 확립되었다(Krejca, 1992: 13-6). 고대 그리스에서는 속도는 운동에서 종속적인 위치에 있었다. 속도 그 자체를 직접 다루는 일 없이 항상 시간이나 거리로 변환하여 다루었다. 그리고 Merton 학파는 속도의 변화 양상에 따라 운동을 구분하는 것에 머무르지 않고 균일한 가속운동 곧 등가속도 운동에 대한 양적인 규칙을 탐구하였다. 이들은 균일한 가속 운동에 대한 정의를 이용하여 '주어진 시간 동안 일정하게 가속하는 혹은 감속하는 운동이 이동한 거리는 동일한 시간 동안 운동의 최초 속도와 마지막 속도의 산술 평균의 속도를 가지고 동일한 시간 동안 이동한 거리와 동일하다'는 '중간속도정리(mean velocity theorem)'를 발견하고 이를 증명하였다.

Merton 학파의 연구는 프랑스의 Nicole Oresme에게 이어졌다. Oresme은 Merton 학파의 연구를 기하학적으로 다루는 방법, 곧 현재의 시간－속도 그래프를 이용하는 방법을 고안하였다. Oresme은 중간속도정리를 다음과 같이 진술하였다. "일정하게 변하는 모든 질은 그 양이, 변화의 중간 지점에서의 수준에서 질이 일정하게 유지된 것과 동일하다(Krejca, 1992: 47)." Oresme은 원론을 이용하여 삼각형 EFC와 삼각형 EGB가 동일하다는 것을 보인다. 따라서 일정하게 변하는 질의 양을 나타내는 삼각형 ABC의 넓이와 중점 수준의 강도를 일정하게 유지하는 질의 양을 나타내는 직사각형 ABGF의 넓이는 동일하다. 따라서 이들 도형이 나타내는 질의 양은 동일하다. 수는 이산적인 반면 기하학적 크기가 연속적인 것으로 간주한 고대 그리스의 전통을 따라 Oresme은 자연스럽게 연속적인 변화를 기하학적 도형과 연결하였다(Boyer, 1959: 81). Oresme은 속도 함수의 그래프를 이용하여 거리 문제를 다룸으로써 운동을 기하학적으로 다루는 방법을 제시하여 운동학적 직관과 기하학



[그림 II-1] Oresme의 그래프

사이에 연결 고리를 만들었다(Baron, 2003: 5-6). 이를 통해서 시간, 속도, 거리, 순간속도 등의 운동학적 개념들 곡선 연구, 곧 적분과 미분에 대한 기하학적 아이디어와 연결될 수 있게 되었다.

Aristotle은 운동이 일어나는 시간에 대한 개념에 충돌하기 때문에 순간속도를 부정하였다. 그러나 등가속도 운동의 경우 각각의 속도가 순간적으로 존재하는 한편 속도의 변화가 연속적으로 이루어진다는 것과 거리 역시 연속적으로 증가한다는 것은 부정할 수 없다. Oresme의 시간—속도 그래프는 거리의 증가 현상에 대한 기하적 모델을 제공하였다(Sherry, 1982: 89-92). Oresme은 삼각형에서 높이가 연속적으로 변하고 따라서 각각의 높이가 순간적으로 존재하지만 넓이가 증가하는 것에 주목하였다. 곧 Oresme은 운동 현상과 이차원 도형 사이에 동형성이 존재하며 따라서 기하학 도형의 넓이를 이용하여 거리의 증가 현상을 다룰 수 있다는 것을, 속도가 연속적으로 변할 때 증가하는 거리를 계산할 때 나타나는 어려움을 거리를 이차원적 양으로 다루는 것으로 해결할 수 있다는 것을 보였다. 즉 거리를 이차원의 양으로 변환시킴으로써, 고대 그리스인들이 느꼈던 어려움을, Zeno의 역설을 뒷받침하는 상식적인 논리가 지니는 문제를 극복할 수 있는 중요한 계기가 마련되었다고 할 수 있다. 이러한 분석에서 순간 속도는 중요한 역할을 한다. 그러한 양 없이는 연속성을 설명할 수 없으며 운동 현상에 기하학을 적용할 수 없다.

3. 17세기 전반기

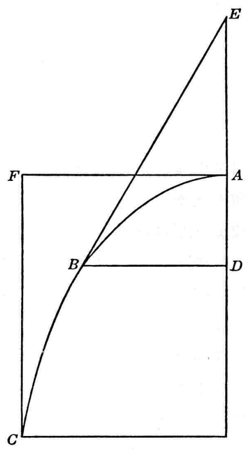
17세기 전반기에 이르면 당시까지 받아들여져 왔던 Aristotle의 역학이 Newton의 역학으로 교체되게 되는 역학 혁명(김영식, 2001: 59)의 토대가 갖추어지게 되며, 이를 통해 운동에 대한 새로운 관점이 확립되어 간다. 이에 따라서 미분계수의 운동학적 측면에 대한 이해가 크게 진전된다. 또한 다른 한편에서는 해석 기하학이 고안되면서 대수적인 방식으로 접선을 다룰 수 있는 방법이 발달하였다.

Copernicus에 의해 제기된 지동설은 지표상에서 진행되는 운동 현상에 대하여 새로운 해석을 요구하였고 이를 통해서 운동에 대한 새로운 개념 체계가 형성되었다(김영식, 2001: 74-7; Westfall, 1971: 33-7). 지구가 공전과 자전을 한다는 Copernicus의 우주 구조를 수용하기 위해서는 '왜 높은 탑에서 떨어뜨린 공이 그 사이에 지구가 움직이는데도 뒤로 처지지 않고 바로 탑의 아래에 떨어지는가', '1일 1회전의 빠른 지구의 회전 운동을 어떻게 지구 위의 사람이 느끼지 못하는가' 등과 같은 역학적 물음에 대하여 올바른 해답을 제공해야 했다. 이는 지표상에서 관찰되는 운동 현상에 대하여 기존과는 전혀 다른 접근과 해석을 요구하며, 이러한 문제를 해결하기 위하여 관성 운동과 운동의 상대성 개념, 그리고 운동의 합성 법칙이 등장하였다. 배가 속도의 변화 없이 일정하게 항해중일 때에는 배의 운동을 느낄 수 없으며, 항해 중인 배의 돛대 위에서 쇠공을 놓으면, 배의 운동에도 불구하고 그대로 돛대 아래로 떨어진다. 이와 동일하게 우리는 운동하는 지구 위에 있기 때문에 지구의 운동을 느낄 수 없으며, 높은 탑 위에서 떨어뜨린 공은, 지구의 운동에도 불구하고, 그대로 탑 아래로 떨어진다. 손에 떨어지게 된 쇠공은 지구의 운동이 전해지지 않지만 방해하는 힘과 작용이 없으면 그 운동에 따라서 계속 운동하며 곧 관성 운동을 하여, 그렇기 때문에 탑의 수직 방향으로 떨어지게 된다. 우리는 지구와 동일하게 운동을 하기 때문에 지구의 운동과 쇠공이 원래부터 지

니고 있는 지구의 운동이 인식되지 않는 것이다. 이러한 관점은 이전까지 받아들여졌던 Aristotle 역학의 핵심적인 관점, 모든 운동에는 원인이 존재하며 힘이 가해지지 않으면 운동이 멈추게 된다는 상식적인 견해를 뒤엎는 것이다. 새로이 등장한 관점에 의하면, 운동은 물체의 본질적 성질과 관계가 없으며, 물체 자체는 운동과 정지 상태에 무관심하다. 따라서 운동을 하기 위해서 항상 외부의 운동 원인이 작용이 필요한 것이 아니라, 운동 상태의 변화에 외부의 작용이 필요한 것이다. 외부의 작용이 없다면 원래의 상태가 계속 유지되는 것이다. 17세기 고전 역학의 토대가 형성되기 이전까지는 상이한 운동이 합성되지 못하고 하나의 운동이 종료된 이후에 다른 운동이 작용하는 것으로 받아들여졌다. 그래서 Tyco Brache와 같은 이조차 대포에서 발사된 포탄이 화약의 힘에 의해 강제된 직선 운동에 따라서 움직이다가 그 힘이 소진된 이후 낙하 운동을 한다고 생각하였다. 그러나 물체가 운동과 정지 상태에 대해 무관하다면 여러 가지 운동이 한 물체에 동시에 진행될 수 있다.

이렇게 새로이 성립된 운동에 대한 개념 체계를 통해서 곡선을 동점의 자취로 보는 것뿐 아니라 동점의 운동이 기초적인 운동의 결합으로 이루어져 있으며, 운동이 결합된 결과는 각 지점에서의 순간적인 운동의 방향을 나타내며, 이때 접선이 순간적인 운동의 방향과 일치한다는 인식이 확립되었다. 예를 들어, 추를 줄에 묶어서 돌리다가 줄을 놓을 경우 추는 접선 방향으로 날아가게 된다. 추의 운동에 영향을 주는 힘인 구심력이 제거된 순간 추의 운동에 변화를 주는 요소가 제거되었고, 따라서 추가 관성 운동, 곧 직선 운동을 해야 하며 그렇기 때문에 접선 방향으로 추가 날아가야 한다.

17세기 초 Galilei는 포탄과 같은 투사체의 운동이 수평 방향의 등속도 운동과 수직 방향의 등가속도 운동이 결합된 것이며 그 결과 투사체의 궤도가 포물선을 따르게 된다는 점을 추론하게 된다(Naylor, 1980). 이러한 과정에서 그는 궤도의 각 지점에서 투사체의 순간적인 운동 방향이 수직 방향의 운동과 수평 방향 운동의 합일 뿐 아니라 포물선의 접선 방향이라는 결론을 이끌어 냈다. Torricelli는 Galilei의 아이디어를 더욱 확장하여 고차의 포물선 $y=x^n$(n은 자연수)에 대한 접선 작도법을 제시하였다(Boyer, 1959: 130-3). Torricelli는 고차의 포물선이 수평 방향으로는 등속도 운동을 하지만 수직 방향으로는 시간의 거듭제곱 곧 x^n에 따라서 증가하면서 움직이는 동점의 궤도가 된다는 것을 이끌어내고, 곡선 위의 점 B에서의 수직 방향의 속도와 수평 방향의 속도의 비, 곧 동일한 시간 동안 두 속도로 이동한 거리의 비를 이용하여 접선을 작도할 수 있다는 것을 보였다. 이와 같은 Torricelli의 접선 작도법에는 순간적인 운동의 방향의 아이디어가 명확하게 포함되어 있고 이를 통해 Torricelli는 고대의 기하학자들의 접선 개념을 넘어서게 된다. 이러한 아이디어는 Barrow를 통해서 Newton에게 전달된다.

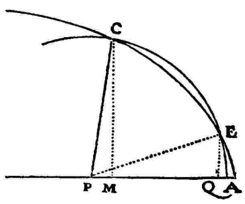


[그림 II-2] Torricelli의 접선작도법

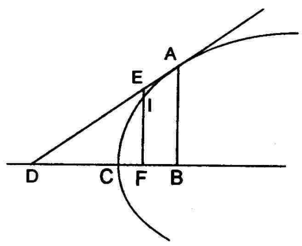
Roberval과 Descartes도 Torricelli와 비슷한 시기에 독립적으로 운동학적인 방법으로 접선을 결정하는 방법을 제시하였다(Pedersen, 1980: 20-2; Walker, 1932: 125-6). Roberval의 방법이 널리 알려지면서 운동학적 아이디어를 이용한

접선 작도법에 Roberval의 이름이 붙게 되었다. 그러나 이와 같은 운동학적인 방법은 속도를 일반적으로 결정하는 방법을 지니고 있지 못하고 각각의 곡선에 대하여 개별적인 방법으로 동점의 운동을 분석하였기 때문에 일반적인 접선 작도법을 제공하지는 못하였다. 때로는 곡선을 따르는 동점의 운동을 잘못 분석하여 틀린 접선 작도법이 제시되기도 하였다.

17세기 전반기에는 미분계수의 대수적 측면도 크게 발달하였다. 바로 이 시기에 Descartes와 Fermat에 의해서 해석 기하학이 고안되었는데, 이들은 대수적인 방식으로 접선을 작도하는 방법을 제시하였다. 이들은 중근 아이디어를 적극적으로 활용하였다. Descartes는 법선을 이용한 대수적 접선 작도법을 제시하였다(Boyer, 1959: 155-7; Pedersen, 1980: 17-8). 법선을 이용하는 대수적 작도법은 주어진 곡선과 접점에서만 만나는 원의 중심을 이용하여 법선을 결정함으로써 접선을 구하는 방법이다. 법선을 이용하는 방법은 중근 조건을 이용하여 원과 곡선의 연립방정식을 계산해야 하기 때문에 식이 간단하지 않은 곡선의 경우 계산이 매우 복잡하며, 다항식으로 표현되지 못하는 곡선에는 적용할 수 없었다. Fermat는, 미분계수의 정의와 유사한, 대수적 접선 작도법을 제시하였다(Boyer, 1959: 156-8; Pedersen, 1980: 26-31). Fermat는 접점과, 곡선 위에 있는 점이 아니라, 접선 위에 있는 접점에 이웃한 다른 점을 이용하여 접선의 방정식을 유도하였다. Fermat의 방법을 현대적으로 정리하면 다음과 같다. 접점의 x축 좌표를 x_0, 이웃한 점의 x축 좌표를 x_0-e라 하면, Fermat는 접선 위에 있다고 가정한 점 곧 E가 곡선 위에 있는 것처럼 다루어 $f(x_0)-f(x_0-e)$를 계산하고 그 값을 e로 나눈 후 e를 포함하고 있는 항들을 소거하였다. 이러한 조작은 결과적으로, 극한 과정을 채택하고 있는, 현재의 미분계수와 일치하게 된다. Fermat의 방법이 자주 e가 0으로 접근하는 변량으로 간주되는 극한 개념으로 해석되지만, Fermat는 결코 극한 과정과 관련된 어떠한 언급도 하지 않았다.[3] 더욱이 Fermat의 방법은 최대·최소값을 결정하는 방법에서 유도된 것인데, Fermat의 최대·최소값 방법은 이차곡선의 최대·최소값 문제에서 방정식의 근이 하나 즉 중근을 지닌다는 아이디어를 기반으로 한 것이었다.



[그림 II-3] Descartes의 접선 작도법



[그림 II-4] Fermat의 접선 작도법

이러한 접선 작도법의 발달은 곡선의 증가와 밀접한 관계를 지니고 있다. 고대 그리스 시대에 다루었던 곡선들의 수는 12개 남짓에 불과하였고, 17세기 초반까지 크게 증가하지 않다가 1630년대 이후 수학에서 다루는 곡선의 종류와 수가 크게 증가하였다(Boyer, 1945). 이에 따라서 일반적인 접선 작도법이 필요하였는데, 1635년과 1638년 사이에 앞에서 언급한 방법들이 고안되었다(Walker, 1932: 124-6). 그러나 이

3) Toeplitz(1963)는 Fermat가 극한 과정의 아이디어를 암묵적으로 사용한 것으로 간주하는 반면, Boyer(1959)는 극한 과정을 사용하지 않았을 뿐 아니라, 이 과정에서 문자들은 변수가 아니라 미지수에 해당한다고 본다.

당시에 고안된 모든 접선 작도법은 당시 다루던 모든 곡선에 적용되지 못하였다. 따라서 당시 수학자들은 상황에 따라서 적절한 방법을 선택하여 사용하였다.

4. Newton과 Leibniz

17세기 전반기 미분계수의 두 측면이 새롭게 등장하면서 미분계수에 대한 이해가 크게 진전되었다. 이와 동시에 정적분에 대한 이해도 크게 진전되었는데, 여기에는 정적분에 대한 무한소 해석의 강화가 수반되었다(정연준・강현영, 2009; Boyer, 1959). 정적분 과정에 대한 이해의 발달은 정적분을 무한소의 무한합으로 간주하는 관점의 발달과 동반하였다. 정적분 개념에 대한 이해에서 나타나는 무한소는 미분계수와도 연결되었다. 17세기 전반기에 나타난 순간 운동 아이디어는 물리학적으로 관성 개념의 뒷받침을 받는 한편, 무한소가 운동을 연결시키는 역할을 하였다(Boyer, 1959: 177-81). 17세기 중반 수학자들은 관성 운동 개념을 매개로 하여 곡선 위를 움직이는 동점의 각 점에서의 순간적인 운동과 접선을 연결시키는 한편, 순간적인 운동을 곡선 위의 무한소적 점 위에서 무한히 짧은 시간 동안 동점이 진행하는 운동으로 간주하는 모습을 보였다.[4] Newton과 Leibniz는 이러한 관점과 대수적 접근을 연결시킴으로써 무한소 계산법으로서 미분법과 미적분을 확립하였다. Newton과 Leibniz의 미분계수 개념의 확립 과정, 곧 운동학적 접근과 대수적인 방법의 통합 과정은 무한소를 이용하여 진행되었다.

Newton과 Leibniz는 다음과 같은 방식으로 미분계수를 결정하였다(Jesseph, 1998, 10; Kitcher, 1984, 232-6). 주어진 $y=f(x)$에 대하여, $x+dx$와 $y+dx$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 것으로 간주하여

(1) $f(x+dx)-f(x)$를 계산하여 $dx(a(x)+B(x,dx))$꼴로 정리한다.

(2) 차를 dx로 나누어 $A(x)+B(x,dx)$를 얻는다.

(3) dx를 인수로 포함하고 있는 항들을 0으로 처리하고 $A(x)$를 얻는다.

이 때, $dy/dx=a(x)$ 혹은 $dy=A(x)dx$이다. 예를 들어 $y=ax^3+bx^2+cx+a$가 주어졌을 때 dx와 dy의 관계식을 유도해 보자. y자리에 $y+dx, x$, x자리에 $x+dx$를 대입하면

$$(y+dy)=a(x+dx)^3+b(x+dx)^2+c(x+dx)+d.$$

이것을 정리하면

$$dy=3ax^2dx+3axdx^2+adx^3+2bxdx+bd^2x+cdx.$$

가 되고, dx로 양변을 나누면

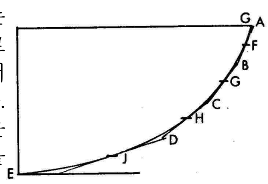
$$dxy/dx=3ax^2+3axdx+adx^2+2bx+bdx+c$$

dx를 포함하고 있는 항들을 배제하여 dy/dx를 계산하면 $dy/dx=3ax^2+2bx+c$.

이러한 과정에서 핵심적인 부분은 $x+dx$와 $y+dx$가 함수 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 것으로 간주하는 점에 있는 것이며, 이것을 뒷받침하는 것이 바로 무한소 아이디어이다.

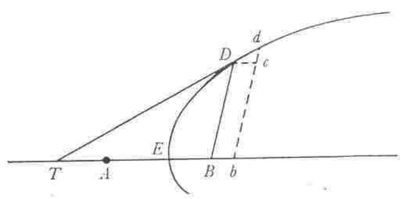
“곡선 도형의 측정에서 사용하는 일반적 원리, 곡선은 무한히 많은 변을 지닌 다각형과 동일한 것으로 간주(Bos(1993) 84쪽에서 재인

4) 다음과 같은 Huygens의 진자의 운동에 대한 설명에서 이러한 인식이 잘 드러난다. Huygens는 진자의 운동을 무한소를 이용하여 다음과 같이 분석하였다. "이 곡선이 무한히 많은 접선들로 이루어진 것처럼 간주하겠다. 또한, 이 모든 접선을 따라 아래로 가속하는 시간 동안 접점에서 강하하기 시작하는 순간 얻은 속도로 각각의 접선을 등속도로 움직인다고 간주하겠다. 이 점을 명확하게 하고 그리하여 이러한 시간들의 합이 무한히 많은 접선을 따르는 자연스러운 강하 시간과 다르지 않다는 것을 분명히 하기 위하여 곡선을 따라 있는 무한히 많은 접선들을 각각 AB, BC, CD 등이라고 하자.(Mahoney, 1990: 478-9에서 재인용)“



[그림 II-5] Huygens의 무한소를 이용한 설명

용)”하는 것은 Leibniz 미적분의 핵심 아이디어이다. 이러한 관점에서 보면 접선을 구하는 것은 곡선과 동치인 무한히 변이 많은 다각형의 한 변을 확장하는 것에 해당한다. Newton은 이러한 아이디어를 운동학적 방식으로 설명하였는데, Newton에 의하면 각각의 무한히 작은 변 위에서 동점은 순간적으로 등속 운동을 한다(Kitcher, 1973, pp.39-40, p.44). 물론 그러한 운동의 최종 순간을 비롯하여 운동 내내 동점은 계속 주어진 함수의 그래프 위에 머무르게 된다.



[그림 II-6] Newton의 접선 작도법

> 유량들의 moment는 무한히 작은 시간 간격 동안 이들 양들이 증가한 무한히 작은 증가량이기 때문에, 무한히 작은 시간 후에 x와 y가 $x+x'o, y=y'o$가 된다. 따라서 유량들 사이의 관계를 나타내는 방정식이 x와 y사이처럼 $x+x'o, y=y'o$ 사이의 관계를 동일하게 나타낼 것이며, 따라서 $x+x'o, y=y'o$를 그 방정식에서 x와 y의 자리에 대입할 수 있다(Kitcher(1973: 39)에서 재인용).

곡선은 무한히 작은 변들이 무한히 모인 다각형이며 따라서, 점(x,y)와 $(x+dx, y+dy)$는 모두 주어진 함수의 그래프 위에 있으며 이 두 점을 잇는 선분이 곡선을 이루면서 동점은 이 무한히 작은 변 위를 무한히 짧은 시간 동안 등속도 운동을 하는 것이다. 이때 두 변수의 무한히 짧은 순간의 증분의 비 $dy\,/\,dx$는 순간 속도와 접선의 기울기에 해당한다.

Newton과 Leibniz는 멱급수 아이디어를 이용하여 이러한 알고리즘을 당시 다루던 모든 곡선에 적용할 수 있었다. 미적분이 보편적인 알고리즘을 갖추게 되는데, 무한급수를 기반으로 하는 대수적 함수가 핵심적 역할을 하였다(Edwards, 1982: 166-9; Kitcher, 1984: 241-2). 무한급수는 Descartes 등 이전의 수학자들이 힘겹게 특별한 방법을 고안해야 했던 곡선까지 다항식을 이용하여 다룰 수 있게 하였다. Newton과 Leibniz는 항별로 미분하고 적분하는 아이디어를 이용하여 다항함수에 대한 미분과 적분 결과를

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

형식으로 표현되는 모든 곡선에 대하여 적용하였다. 이들은 유한한 다항식에 적용되는 방법이 무한급수로 전개되는 모든 함수에도 적용될 것이라고 가정하였다. 성격은 광범위한 곡선에 미적분이 적용가능하게 하였다. 이러한 결과를 바탕으로 18세기 내내 수학자들은 모든 함수가 멱급수 전개 가능하다고 생각하였다(Kline, 1990: 406).

Newton과 Leibniz는 비를 이용하여 미분계수의 기하적 측면과 운동학적 측면, 대수적 측면을 통합하였다. 이들은 접선의 기울기가 순간 속도에 해당하며 동시에 차분의 비를 계산하는 과정을 통하여 이를 계산할 수 있는 대수적 알고리즘을 확립하였다. 그러나 극한 개념 대신 무한소를 이용하여 미분 과정을 설명하였다. 이들은 계산법으로서, 미분법을 포함한, 미적분을 확립하는데 성공적이었지만, 수학적 정당화에 중대한 문제가 있었다(Kitcher, 1984: 235). $dx=0$이면, (1)은 $f(x=dx)-f(x)=f(x+0)-f(x)$ $=f(x)-f(x)=0$이 되어 (2)는 정당하지 못한 0으로 나누기를 포함한다. 만약 $dx \neq 0$이면 비 dy/dx는, 찾고자 하는 접선의 기울기가 아니라 곡선 위에 서로 근접해 있는 점들을 잇는 현의 기울기이며, dx를 인수로 가진 항들을 소거하

는 과정을 설명하기 어렵다. 이러한 문제는 무한소 아이디어를 대수적으로 다루었기에 비롯된 것이다. Newton과 Leibniz는 이러한 문제를 잘 알고 있었다. 이들은 무한소 아이디어를 이용하여 미적분을 확립하였으나, 정작 무한소 자체에 대해서는 상당히 유보적인 태도를 지녔다. Newton은 무한소를 이용하였지만, 계산법이 확립된 이후에는 무한소를 제거하고 비의 극한을 통해서 자신의 계산법을 정당화하고자 하였다(Guicciardini, 2003; Kitcher, 1973). Leibniz는 자신이 제시한 과정과 기호의 의미를 무한소와 관련짓지 않았으며, 무한소 자체에 대한 논의를 명확하게 하지 않았다(Jesseph, 1998). Johann Bernoulli, L'Hopital 등 자신의 제자들이 무한소가 실재하는 것으로 간주하였을 때 ,Leibniz는 오히려 이러한 관점을 비판하였다. Leibniz의 무한소에 대한 관점은 시기에 따라 변하였지만, 무한소를 미적분의 형식적인 대수적 조작을 설명하기 위한 가정적인 대상 혹은 그럴듯한 허구로 간주함으로써 무한소로부터 비롯되는 논쟁을 피하고자 하였다. 그리고 다른 한편으로 자신의 계산법이 매우 효과적인 것이라는 점을 강조하였다.

5. 18세기 이후

Newton과 Leibniz의 정당화는 그 자체로 성공하지는 못하였다. 그러나 무한소에 의존하지 않고 자신의 미분법, 곧 유율법을 정립하고자 시도하는 과정에서 도입된 Newton의 극한 관념은 18세기 이후 극한에 대한 인식의 원천이 되었고, 19세기 초까지 극한 개념의 역사는 Newton의 극한 관념에 내재한 문제를 극복하는 시기에 해당한다(Grabiner, 2005: 81-7). 이러한 과정을 통해서 수치적 극한 개념의 단초가 마련된다. 형식적 정의는 절대값과 부등식, 보편 양화를 이용하여 '근접' 개념을 형식화하여 Newton의 직관적 극한 관념의 문제를 극복하였다(Williams, 1989: 6).

Newton은 최종적으로 미분계수를 구하는 과정을 다음과 같이 설명하였다.

> 양 x가 일정하게 움직일 때 양 x^n의 유율을 찾아야 한다고 하자. 양 x가 $x+o$로 된다면 양 x^n은 $(x+o)^n$이 되고, 이것은 [전개한다면] 무한급수 방법에 의해
>
> $n^n + nox^{n-1} + \frac{1}{2}(n^2-n)o^2x^{n-2} + \cdots .$
>
> 그러면 증분 o와 $nox^{n-1} + \frac{1}{2}(n^2-n)o^2x^{n-2} + \cdots$의 비는 1과 $nx^{n-1}\frac{+1}{2}(n^2-n)ax^{n-2} + \cdots$와 같다. 증분이 사라지게 된다면 이들의 최종적인 비는 1 대 nx^{n-1}이다. 따라서 양 x에 대한 유율은 양 x^n의 유율에 대한 비는 1 대 nx^{n-1}이다. (Guicciardini(2003) 84쪽에서 재인용)

이러한 설명은 Newton이 미분을 비의 극한으로 설명하고 있다는 것을 시사한다. 그러나 Newton의 설명에는 불명확한 부분이 많았다(Boyer, 1959: 193-5; Nikolić, 1993: 211; Sherry, 1982: 161-7). Newton은 도함수의 핵심적인 요소에 도달하였지만, 이를 뒷받침하는 극한과 연속성에 대한 명확한 정의 등이 부재하였다. 이로 인해서 Newton의 미분계수의 핵심 과정, 차분의 비의 극한 과정의 존재성과 정당성을 설득시킬 수 없었다. Newton은 순간속도에 대한 물리적 직관이 이를 뒷받침한다고 생각하였다. 그러나 속도의 의미 자체가 모호하였다. Newton은 운동의 순간성에 대한 질문은 형이상학과 연결되어 있는 것으로 간주하여 운동의 순간성에 대한 정의를 내리는 것을 피하였다. 게다가 Newton은 자주 과거의 무한소를 이용한 방법을 연상시키는 설명을 하였다. 유율은 비의 극한에 해당하는 것이지만 Newton은 이것을 '궁극적인 비'라고 불렀다. 이것은 나중에 혼동의 원인이 된다.

Newton이 유율의 극한을 통해서 무한소를 대체하였으나, 18세기 후반에 이르기까지 극한 개념은 적어도 상당수의 수학자들에게 무한소와 같이 형이상학적 사변이 깔려 있는 것처럼 보였다(Boyer, 1959: 250). Berkeley의 비판이 대표적이다(Boyer, 1959: 225-6; Sherry, 1982: 145-53). Newton의 유율법에 대한 Berkeley 비판의 핵심은 비의 극한의 존재성이 명확하게 정당화되지 못하였다는 것이다. Newton은 물리적 경험을 바탕으로 비의 극한이 존재한다는 것을 당연하게 여겼지만, Berkeley는 사라지는 증분의 궁극적인 비는, 최종적으로 오직 점만 남기 때문에, 무한소 증분의 비이거나 어떠한 비도 아니며 따라서 일관된 개념화가 불가능하다고 비판하였다. Berkeley는 Newton이 여기서 변량이 0 이 아닌 증분을 갖는다고 가정하고는 결론에 도달하기 위하여 증분이 0이 되게 하면서 즉 아무런 증분이 없다고 가정하면서 모순율을 무시했다고 단언하였다. 곧 Berkeley는 증분이 사라진다는 가정은 그들이 증분이었다는 가정을 파괴한다고 본 것이다. Berkeley는 궁극적인 비를 인식할 수 있는지에 대하여 의문을 제기하였지만 Newton은 그러한 아이디어에 도달할 수 있다는 것을 보이기 위하여 운동에 호소하였다. 현대적인 극한 관점에서는 마지막 항 혹은 극한 상태에 도달 가능성을 전혀 고려하지 않는다. Newton의 설명은 이러한 문제에서 충분히 벗어나지 못하였고 그렇기 때문에 궁극적인 비가 어떻게 가능할 수 있는가에 대한 문제가 제기된 것이다.

극한 개념은 Newton 이후로 점진적으로 발달하였지만, 기하적 직관을 바탕으로 하는 Newton의 극한 개념이 지닌 문제를 극복하지는 못하였다(Boyer, 1959: 271-2). 극한 자체에 대한 명시적인 정의는 18세기 중반에 활약한 D'Alembert에 의해서 주어졌다(Boyer, 1959: 246-8). D'Alembert는 극한 개념이 미적분의 기초가 되어야 하며, Newton의 궁극적인 비가 문자 그대로 마지막 비로 해석하는 것이 아니라 극한으로서 해석하여야 한다고 주장하였다. 그는 극한에 대해 다음과 같이 분명하게 정의하였다. "어떤 하나의 양이 주어진 어떤 양보다도 더 가깝게 또 다른 양으로 접근할 수 있고, 둘 사이의 차가 절대적으로 정해질 수 없다면, 후자를 전자의 극한이라고 한다(Boyer, 1959: 247)." 그러나 D'Alembert는 극한 개념에 논리적으로 명백하고 정확한 형식성을 주지 못하였다. 그 또한 기하학적인 관점에서 완전히 벗어나지 못하였고, 무한소를 대체할 수 있을 만큼 극한 개념을 정교하고 명확하게 표현하지 못하였다. 이 과제는 Cauchy에 의해서 해결된다.

Cauchy의 미분계수와 도함수 정의는 정의 자체로는 이전의 수학자와 전혀 다른 것으로 보이지 않을 수 있다(Boyer, 1959: 276-7). 이전의 정의를 함수, 변수, 그리고 극한 개념을 적용하여 명확히 한 것에 불과하게 보인다. 그러나 Cauhcy는 극한을 정확하게 정의함으로써 미적분의 개념에서 무한소를 제거할 수 있었다(Grabiner, 2005: 82; Sherry, 1982: 161-8). Cauchy가 다루는 것은 기하학적 대상들과 이들의 비가 아니라 변수와, 변수에 귀속되는 수치였다. 따라서 더 이상 변수가 0이 되는 것이 존재가 비존재로 질적인 변화를 일으키는 것이 아니라 변수에 대한 값의 할당으로 설명될 수 있게 되었고, 최종 상태에 대한 도달 가능성에 대한 관심을 배제하고 근접성의 여부만을 따질 수 있게 되었다. 순수하게 대수적인 접근이 극한에 도달하는 극한 과정이 제기하는 문제를 무시할 수 있게 하였다. 극한은 더 이상 최종적인 극한 과정의 결과와 연결될 필요가 없으며, 따라서 사라지는 양의 끝에 해당하는 무한소량에 의지할 필요가 없어졌다. 즉 Cauchy가

최초로 철저하게 수치적인 극한 개념을 채택하여 미분법을 포함한 미적분의 기본적인 결과를 확립하였다. 수치적인 극한 개념을 토대로 하여 Cauchy는 미분계수와 도함수를 아래와 같이 정의하였다.

구간 $[a,b]$에 있는 각각의 점 x에 대하여 h가 0에 수렴할 때 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$가 극한에 수렴할 때 오직 이대에만 f는 구간 $[a,b]$의 각 점에서 미분 가능하다. 또한 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$가 x에서의 도함수 값이다. 도함수 $f'(x)$는 $[a,b]$의 각 점 x에서 값 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$를 취하는 함수이다.(Kitcher(1984) 246쪽에서 재인용)

이상과 같이 형식화된 미분계수의 정의에 의해서, 순간 속도는 평균 속도의 극한으로 정의될 수 있게 되었다(Sherry, 1982: 154-5). 극한값 혹은 궁극적인 비는 연속적인 수치적 근사에 의해서 결정되며, 따라서 순간 속도는 평균속도의 극한을 의미하는 것으로 간주되었다. 이러한 점을 통해서 '운동 자체가 없는 순간에 어떻게 속도가 있을 수 있는가'라는 순간 속도에 대한 어려움이 사라지게 되었다. 움직이는 물체가 특정 순간 t_0에 특정한 속도를 지니고 있다고 할 때, 이것은 그 순간에 공간과 시간의 무한히 작은 부분 사이의 비를 찾게 된다는 것을 의미하지 않는다. 그 대신, 순간의 속도는 t_0에서 종결되는 유한한 운동의 평균 속도들의 성질이다. 순간 속도는 평균 속도의 행동을 다루는 효율적인 방법으로 전환되었다.

지금까지 고대 그리스 시대부터 19세기 초반까지 미분계수의 역사적 발달과정을 살펴보았다. 미분계수 개념의 역사적 발달과정은 다음과 같이 정리될 수 있다. 첫째, 미분계수의 기하적 측면에 해당하는 접선은 곡선과 한 점에서 만나지만 곡선을 가로지르지 않는 직선으로서 제일 먼저 정식화되었다. 둘째, 미분계수의 운동학적 측면, 순간 속도(혹은 순간 변화율) 개념은 기하적 측면과 비슷한 시기에 등장하였으나, 개념적인 문제로 인하여 정식화되고 접선과 연결되는데 오랜 기간이 걸렸다. 속도(변화율)은 위치의 변화를 내포하며 여기에는 시간의 경과가 전제되어 있으며, 이러한 점에서 순간속도는 개념적인 문제를 내포하고 있다. 엄밀한 사고를 추구한 고대 그리스인들은 순간속도 개념을 거부하였다. 셋째, 순간 속도 개념의 수용에는 등가속도 운동에 대한 적극적인 사고 실험과 시간—속도 그래프를 이용하여 분석이 중요한 역할을 하였다. 등가속도 운동은 감각적으로 쉽게 파악될 수 있는 현상이 아니다. 속도가 일정한 운동 이외에 속도가 변하는 운동에 대한 사고 실험 중에서 가장 규칙적인 운동으로서 등가속도 운동이 등장하다. 이러한 과정에서 시간—속도 그래프는 등가속도 운동이 지닌 성질을 탐구하는 효과적인 수단을 제공하였다. 등가속도 운동에 대한 분석을 통해서 속도의 순간적인 존재가 명백하게 되었고 순간속도 개념의 필요성이 드러났다. 넷째, 순간속도가 접선과 연결되는 과정에서 관성 운동 개념이 핵심적인 역할을 하였다. 관성 운동은 일상적인 관찰을 통해서 발견될 수 있는 개념이 아니라, 우주의 구조에 대한 이론, 지동설과 일상적으로 관찰되는 지구 표면 위의 운동 현상을 통합하는 과정에서 등장한 이론적인 개념이다. 관성 운동 개념을 통해 17세기 수학자들은 접선을 곡선을 따라 움직이는 동점의 순간적인 운동과 연결시킬 수 있었다. 다섯째, 미분계수의 대수적인 측면은 초기에는 증근 아이디어를 기반으로 하였으나 최종적으로 비 아이디어를 기반으로 하게 되었으며, 이를 통해서 미

분계수의 다른 두 측면, 접선과 순간속도 개념이 연결될 수 있게 되었다. 여섯째, 현대적인 미분계수 정의는 형식화된 극한 개념을 통해서 미분계수를 극한 상태의 비로 간주하는 방식의 문제를 극복하는 과정을 통해서 형성되었다. 무한소는 미분계수를 무한소의 비로 설명할 수 있게 하였으며, 형식화된 극한 개념을 통해서 무한소 개념을 대체할 수 있었다. 또한 형식화된 극한 개념을 통해서 순간 속도는 형식적으로 평균 변화율의 극한으로 전환되었다.

III. 분석 결과에 대한 논의

지금까지 미분계수의 역사적 발달 과정을 살펴보았는데, 이러한 논의가 무조건적으로 미분계수의 지도가 역사적 발달 순서에 따라서 진행되어야 한다는 것을 주장하기 위한 것은 아니다. 미분계수에 직접적으로 관련된 것으로 보기 어려워 분석 과정에서 다루지 않았지만 비 개념 역시 미분계수 이해에서 중요한 역할을 한다. 비는 속도와 직선의 기울기를 통합하는 개념이다. 특히 속도는 이동 거리와 경과 시간이라는 상이한 기하적 대상 사이의 비 곧 외적인 비에 의해서 정의된다. 고대 그리스인들은 동일한 대상들 사이의 비례 관계 곧 내적인 비만을 허용하였고, 이러한 전통은 오래 동안 유지되었다(우정호, 1999: 256). 속도 개념의 발달이 오래 지체된 것은 내적인 비만이 허용된 전통이 큰 영향을 미친 것으로 보인다. 또한 미분계수의 발달에 실수와 함수, 극한 개념의 발달이 필요하였다. 현재의 학생들은 외적인 비를 사용하는데 고대인들과 같은 개념적인 어려움을 지니지 않으며, 미분계수를 학습할 때 잘 정의된 함수와 극한 개념의 도움을 충분히 받을 수 있다. 이러한 점을 고려하면 단순히 역사적 발생 과정을 고려해서 지도한다고 말하는 것은 아무런 의미가 없는 일이다.

미분계수의 역사적 분석 결과에 따르면, 미분계수 정의에 포함된 극한 과정은 단순히 미분 공식을 유도하기 위한 것이 아니라 미분계수 이해의 원천 중 하나였던 순간 속도의 개념적 문제를 극복하는 역할을 수행하였다. 속도 개념은 위치의 변화를 요구하고 여기에는 시간의 경과가 필요하다. 따라서 시간의 경과를 부정하는 순간 속도는 개념적인 문제를 내포하고 있는 것이다. 그러나 이러한 문제에도 불구하고 수학자들은 물리학적 통찰을 이용하여 미분계수에 대한 이해를 발달시켰다. Newton과 Leibniz는 미분계수를 계산하는 과정을 고안하는 한편, 그러한 과정이 순간 속도와 관련 있다는 것을 잘 알고 있었다. 그러나 극한에 대한 동적인 이해로 인하여 극한 과정의 도달 가능성 문제와 무한소의 관련성 문제를 해결하지 못하였다. 순간 속도는 어떠한 측면에서는 당연한 것으로 보이지만 여전히 무한히 짧은 시간 동안 진행되는 운동의 속도로 밖에 설명될 수 없었다. Cauchy가 도입한 수치적 극한은 도달 가능성 문제와 무한소의 관련성 문제를 극복하면서 미분계수를 다룰 수 있게 하였다. 이를 통해서 순간 속도에 대한 정식화도 가능하게 되었다.

이러한 논의에 비추어 본다면, 미분계수 지도가 의미 있기 위해서는 미분계수의 정의에 대한 이해가 미분 공식의 유도뿐만 아니라 순간 속도에 대한 이해와 연결되도록 해야 한다. 이렇게 될 때 미분계수를 이용하여 변화 현상을 파악할 수 있는 안목이 형성될 수 있을 것이다. 현재의 학교수학의 미분계수 지도는 미분계수를 할선과 접선의 관계, 평균 변화율과 순간 변화율의 관계를 이용함으로써 미분계수의 극한 과정을 설명하는 것을 기반으로 하고

있다. 현재의 미분계수 지도는 미분계수와 순간 속도의 관련성을 명확하게 밝히고 있는 것이다. 그런데 순간 속도와 미분계수의 정의의 관계와 관련하여 두 가지 살펴볼 문제가 있다.

첫째, 순간 속도가 자명한 개념으로 제시되어 개념적 문제가 적절히 고려되지 못할 가능성을 살펴보아야 한다. 간단한 운동 상황에 설명을 통해서 순간 속도 개념을 당연한 것으로 제시한다면, 미분계수 정의는 단순히 순간 속도를 계산하는 역할로 한정되기 쉽다. 형식화된 극한 개념에 기반한 정의가 역사적으로 개념적 문제를 극복하면서 순간 속도를 정의할 수 있게 하였지만, 정의 자체를 언어적으로 아는 것만으로는 순간 속도를 깊이 있게 이해할 수 있게 하지 못한다. 수학 관련 전공의 대학생들을 대상으로 하는 교수실험 도중에서 학생들 대다수가 순간 속도를 상당히 짧은 시간 동안의 속도로 인식하는 반응을 보이는 것이 발견된 바 있다(Thompson, 1994: 246-7). 미분계수에 대한 이해가 보다 의미 있기 위해서는 단순히 미분계수를 이용하여 순간 속도를 계산하는 것에서 머무르지 않고, 순간 속도가 지니고 있는 개념적인 문제를 드러내고 미분계수 정의가 그러한 문제를 어떻게 극복하는지 적절히 드러낼 필요가 있다. 그럼으로써 형식적인 정의와 직관 사이에 통합이 일어날 수 있다.

둘째, 순간 속도에 대한 이해가 부족한 상황에서 미분계수 교수—학습이 진행될 가능성에 대해서 살펴보아야 한다. 역사적으로 순간 속도는 운동 현상에 대한 일상적인 경험이 아니라 이론적인 사고 실험을 통해서 그 필요성과 존재성이 부각되었다. 특히 정의에 기반한 등가속도 운동에 대한 사고 실험과 시간—속도 그래프를 이용한 분석은 순간 속도를 수용하고 이에 대한 이해를 발달시키는데 중요한 역할을 하였다. 또한 관성 운동 개념은 함수와 미적분에 대한 형식화된 지식이 확립되기 이전에 접선과 순간적인 운동을 연결시킬 수 있게 하였는데, 관성 운동 개념 역시 일상적인 관찰을 통해서 직관적으로 습득되는 것이 아니라 운동 현상에 대한 통합된 이론을 형성시키기 위한 노력의 산물이다. 김연수・권재술(2000), 김현수(2002), 조영진(2004) 등의 조사 결과에 의하면 관성 운동을 비롯한 역학 이론을 학습하였음에도 불구하고 우리나라의 고등학생들은 관성 운동에 대하여 많은 오개념을 지니고 있다. 이러한 조사 결과는 학생들이 관성 운동에 대한 오개념을 지니고 있을 뿐 아니라 순간 속도에 대한 이해 역시 부족하다는 것을 함축하는 것으로 보인다. 미분계수를 지도할 때 도입되는 운동학적 상황이 순간 운동에 대한 이해를 보다 풍부하게 하고 반성적으로 살펴 볼 수 있는 계기를 제공하도록 해야 할 것이다.

이러한 두 측면이 적절히 고려되어 있지 못하다면, 미분계수 정의는 단순히 순간 속도를 계산할 수 있게 하는 것에 지나지 않으며, 미분 조작은 순간 속도에 대한 직관과 연결되지 못한 형식적인 조작으로 제시되어 있다는 비판을 피하기 어려울 것이다. 반대로, 이러한 두 측면이 적절히 고려된다면 개념적 측면이 고려된 미분계수 교수—학습이 이루어졌다고 할 수 있을 것이다.

Ⅳ. 결 론

현재의 미분계수 지도에 대한 구체적인 논의는 교과서 분석, 학생들의 이해도 조사 등을 요구하며, 따라서 앞서 논의된 문제점은 실제로는 크지 않을 수도 있다. 그러나 학교수학의 전통적인 지도 방식에 대하여 제기되어 있는 알고리즘 숙달에 치중한다는 비판을 의미 있게

생각한다면, 현재의 지도가 가지고 있는 한계에 대해서 진지하게 살펴볼 필요가 있다.

역사적 분석에 의하면, 미분계수 정의는 단순히 미분 공식을 유도하거나 순간 속도를 계산하기 위하여 만들어진 것이 아니었다. 미분계수는 순간적인 운동 현상에 대한 이해를 기반으로 하고 있으나 순간 속도와 순간 변화율에는 개념적인 문제가 내포되어 있었다. 이론적인 사고 실험을 통해서 그 필요성이 인식되면서 적극적으로 순간 속도가 수용되었고, 최종적으로 형식화된 극한에 의해서 개념적 문제없이 순간 속도를 정의할 수 있게 되었다. 한가지 분명한 점은, 이러한 부분이 적절히 드러나지 못한다면, 미분계수는 미분법 공식을 유도하는 과정 혹은 순간 속도를 계산하는 수단이상의 것이 되기 어렵다는 것이다. 이상의 논의에 비추어 볼 때, 학생들의 미분에 대한 이해가 미분 공식의 적용과 기하적 이미지에 대한 고착에 머물러 있다는 조사 결과는 미적분 지도 방식, 정확하게 말하면 미분계수 지도에서 순간 속도와 운동 상황의 제시 방식을 개선할 필요가 있다는 것을 강하게 시사한다. 학생들의 제한된 이해는 교과서 자체가 제한된 측면만을 보여주기 때문이라고 할 수 있는 것이다.

본 논문에서는 역사적 분석을 통해서 미분계수의 개념적 이해를 탐색하였다. 최종적으로 차분의 비의 극한으로 정의된 미분계수의 근원을 드러내고 그러한 형식화된 정의가 나타나게 된 문제와 해결 과정을 살펴보았다. 이러한 내용을 제한된 수업 시간 안에 전개한다는 것은 매우 어려운 일이다. 학생들의 이해 수준에 맞을 뿐 아니라 실제 상황에서 수업 진행이 가능할 정도로 정리되어야 한다. 따라서 본 논문에 제시된 시사점을 실제로 구현되기 위해서는 매우 많은 노력과 연구가 필요할 것이다. 그러나, 본 논문에서 미분계수의 개념적 이해의 면모를 역사적 분석을 통해서 어느 정도 드러낸 바, 이에 대한 교사에 대한 이해가 적어도 간접적으로 미분계수 지도를 개선하는데 도움이 될 수 있으리라 기대한다.

참고문헌

김연수・권재술(2000). 나이에 따른 학생들의 힘에 관한 개념 변화 특성. **한국과학교육학회지** Vol.20(2)

김영식(2001). **과학혁명**. 서울: 아르케

김용운・김용국(1986). **수학사 대전**. 서울: 우성문화사

김현수(2002). **뉴턴의 운동법칙에 대한 학생들의 오개념 연구**. 군산대학교 교육대학원 석사학위논문

우정호(1999). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판사

우정호·민세영·박미애(2004). **역사발생적 수학 교육 원리에 대한 연구**. (KRF-2002-074-BS1051)

임선정(2002). **고등학교 학생들의 미분 개념 이해와 수학적 사고 스타일 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문

정연준・강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰. **학교수학 10**(3), 375-99.

조영진(2004). **고등학생들의 물체의 운동에 대한 과학사적 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

한대희(2000). 제논의 역리의 재음미. **학교수학 2**(1), 243-257.

Baron, M.(2003). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. New York: Dover Publications, Inc.

Bejuidenhout, J.(1998) First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 29(3), 389-99

Bos, H.(1993). *Lectures in the History of Mathematics*. American Mathematical Society.

Boyer, C. B.(1959). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publication Inc.

__________(1945). Historical Stages in the Definition of Curves, *National Mathematics Magazine*. 19(6), 294-310

Cajori, F.(1920). The Purpose of Zeno's Arguments on Motion, Isis 3(1), 7-20

Coolidge, L.(1951). The Story of Tangents, *The American Mathematical Monthly* 58(7), 449-462

Downs, M. & Mamonna-Downs, J.(2000). On Graphic Representation of Differentiation of Real Functions, *Themes in Education* 1(2), 173-198.

Edwards, C.(1982). *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag.

Eves, H.(1995). *An introduction to the history of mathematics*

Grabiner, J.(2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Dover Publications.

__________(1982). The Changing Concept of Change : The Derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine* 56(4) 195-206

Grant, E.(1992). *Physical Science in the Middle Ages* (홍성욱・김영식 옮김, 중세의 과학)

Guicciardini, N.(2003). Newton's Method and Leibniz's Calculus. In H. N. Jahnke(Ed). A *History of Analysis*(pp.73-103). Washington D. C.: Mathematical Association of America.

Heath, T. L.(1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications Inc.

Jesseph, D.(1998). Leibniz on the Foundations of the Calculus : The Questions of the Reality of Infinitesimal Magnitudes. *Perspectives on Science*, 6(1 &2), 6-40.

Kitcher, P.(1984). The Nature of Mathematical Knowledge, The Cambridge University Press

__________(1973). Fluxions, Limits, and Infinite Littleness, A Study of Newton's Presentation of the Calculus, *Isis* 64(1), 33-49

Kline, M.(1990). *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Krejca, S. A.(1992). *The origins of calculus in the medieval period*. Unpublished doctoral dissertations, University of Illinois, Chicago.

Lindberg, D. C.(2005). *The beginnings of western science*, 이종흡 옮김, 서양 과학의 기원들, 나남, 서울

Lloyd, G. E. R.(1970). *Early Greek Science : Thales to Aristotle* W. W. Norton & Company, New York, 이광래 옮김(1996). 그리스 과학 사상사. 지성의 샘, 서울

Mahoney, M. S.(1990). Barrow's mathematics: between ancients and moderns, In M. Feingold (Ed.). *Before Newton, The life and times of Isaac Barrow*, Cambridge University Press, 179-249

Naylor, R. H.(1980). Galileo's Theory of Projectile motion, *Isis* 71, 550-570

Newton, I.(1971). *Mathematical Papers of Isaac Newton Vol. III*. D. T. Whiteside (Ed) London: Cambridge University Press.

Nikolić, A.(1993). Space and time in the apparatus of infinitesimal calculus, *Review of Research* 23(1), 199-218

Orton A.(1983). Students' Understanding of Differentiation, *Education Studies in Mathematics* 14, 235-250

Pedersen, K. M.(1980). Techniques of the Calculus, 1630-1660, I. Grattan-Guiness(ed.), *From the calculus to the set theory, Princeton University Press*, 10-48

Schwayder, D.(1955). Achilles Unbound, *The Journal of Philosophy* 7, 449-459

Sherry D. M.(1982). *A Philosophical history of the calculus*. Unpublished doctoral dissertations, Claremont University.

Thompson, P.(1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 229-274

Toeplitz, O.(1963). *The Calculus - a Genetic Approach*. Chicago: The Press of Chicago University.

Vinner, S.(1991). The Role of Defining in the Teaching and Learning of Mathematics. In Tall, D.(Ed) Advanced Mathematical Thinking, 65-81, Kluwer Academic Publisher

Walker, Evelyn(1932). *A Study of the TRAITÉ DES INDIVISIBLES of Gilles Persone de Roberval*, Doctoral Dissertation, Teacher College, Columbia University

Westfall, R.(1971). *The Construction of Modern Sciences*, John Wiley & Sons, Inc

Williams, Steven. R.(1989). *Understanding of the limit concept in college students*. Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin

Zandieh, M. J.(1998). *The Evolution of Students Understanding of the Concept of Derivative*. Unpublished doctoral dissertation, Oregon State University.

An Investigation on the Historical Development of the Derivative Concept

Joung, Youn Joon (Ajou University)

In school mathematics the derivative concept is intuitively taught with the tangents and the concept of instantaneous velocity. In this paper, I investigated the long historical developments of the derivative concepts and analysed the relationships between the definition of derivative and the related elements. Finally I proposed some educational implications based on the analysis.

* key words : derivative(미분계수), historical developments of calculus(미적분의 역사적 발달), didactical analysis(교수학적 분석)

논문접수 : 2010. 4. 26
논문수정 : 2010. 6. 2
논문완료 : 2010. 6. 11