대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 2, 185-202. May 2010

최적화 문제해결 활동에서 “CAS의 도구화”가 교육과정 내용제시 순서에 미치는 영향

한 세 호*

본 연구는 중등수학교육에서 도구화된 CAS에 기반한 최적화 문제해결 활동을 통해 CAS가 교육과정 내용제시 순서에 영향을 줄 수 있는지를 분석하기 위해 설계되었다. 이를 위하여 본 연구자는 CAS를 활용한 최적화 문제해결 활동을 구안하였으며 3개월간의 CAS 활용 수업 경험이 있으나 아직 미적분학을 접해 본 적이 없는 고등학교 2학년 7명을 선정하여 총 9차시의 수업을 실시하고, 수업녹화자료와 면담을 통해 학생들의 활동을 분석하였다. 분석 결과, 학생들은 CAS를 이용하여 미 학습된 교육내용인 미분과 삼차방정식, 무리방정식의 해구하기와 그래프 분석이 포함된 최적화 문제해결활동을 수준 높게 다룰 수 있는 것으로 나타나 CAS가 교육과정 내용제시 순서에 영향을 줄 수 있음을 확인할 수 있었다.

Ⅰ. 서론

수학적 개념원리의 응용과 모델링을 중시하는 대수교육의 최근 경향은 기법 중심의 전통적인 대수교육에 대한 재고와 중등수학교육분야의 CAS활용 수업에 더욱 관심을 갖게 한다.

CAS는 지필계산에 대한 인지적 부담을 줄여주고, 그래프를 빠르게 그릴 수 있을 뿐 아니라 다양한 표상을 제공하며 여러 측면에서 조작할 수 있게 해주는 도구이다. 일찍이 NCTM(2000)은 기술공학의 원리에서 기술공학 도구는 가르쳐야할 수학내용에 영향을 주며 학생들이 수학을 더 넓고, 깊게 학습할 수 있게 해줄 수 있다고 주장하였다. 그러나 CAS가 저절로 수학교육에서 학생들의 수학학습 능력을 향상시켜줄 수 있는 것은 아니며, CAS를 언제, 어떻게 활용할 것인지에 대해 교사는 신중히 결정할 필요가 있다.

CAS가 수학교육에서 유용한 도구가 되는 과정에 주목하여 학생들의 사고 특성을 분석한 연구들은(Atigue, 2001; Lagrange, 2001, 2005; Trouche, 2000, 2002, 2005) 수학 학습과정에서의 도구발생을 다음 두 가지 관점에서 논의하고 있다.

첫째, 학습자는 CAS의 도구장착(Instrumen-tation) 과정을 통해 학습을 향상시킬 수 있다는 관점이다. 처음에 학생들은 CAS의 제약으로 고충을 겪게 되지만 시간이 지나면서 적절한 스킴이 개발되고, 나아가 학습의 가능성으로 작용하여 결국 학습에 도움이 된다는 것이다. Drijvers(2003)는 도구장착과정 분석을 통해 학생들에게서 ‘방정식을 푼다’는 개념에서 ‘한 문자를 다른 문자에 대하여 푸는’ 개념으로의 의미 확장과, CAS의 결과 값으로 나온 식을 ‘과정’에서 ‘대상’으로 볼 수 있는 능력을 확인하였다.

* 수지고등학교, hanseho1@hanmail.net

둘째, CAS의 도구화(Instrumentalization)가 학습자의 추측 및 발견 활동을 촉진시키고, 수학적 모델링을 용이하게 하며, 계산 알고리즘보다는 의미에 주목하는 활동을 가능하게 한다는 관점이다. Rivera(2005)는 IT기반에서의 수학적 증명 출현 분석을 통해 IT가 학습자의 수학적 지식을 발달시키는데 역동적인 형태의 중재를 수행한다고 하면서 기술공학의 도구화를 인류학적 관점에서 언급하였다. 또한 Kieran & Drijvers(2006)은 $x^n - 1$의 인수분해 활동을 통한 분석에서 지필 기법과 CAS 기법과의 긴밀한 연관성을 확인하였으며 추측 및 발견활동에서의 도구화된 CAS의 역할을 규명하였다.

최근 우리나라에서도 CAS 사용에 대한 관심이 나타나고 있다. 장경윤, 한세호(2009)는 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생과정 분석을 통해 학생들은 CAS를 활용한 대수교육에서 매우 수준 높은 문제를 다룰 수 있음을 확인하였고, 도구발생의 핵심요소인 도구장착과 도구화와 관련된 스킴[1]을 규명하였다. 또한 김화경(2006)은 컴퓨터와 수학교육의 구성요소인 학생, 수학, 컴퓨터에 대한 분석을 통해, 학교 수학이 컴퓨터 없이도 할 수 있는 내용이나 컴퓨터가 있으면 오히려 방해가 되는 내용 뿐 아니라, 컴퓨터가 필요한 내용도 다루어야 한다고 말하면서 학교수학 영역의 확장을 주장하였다.

CAS와 같은 기술공학도구들은 개념의 이해와 적용에 초점을 맞추는데 도움을 줄 수 있는 장점이 있다. CAS를 활용한 대수교육을 극대화하기 위해서는 대수의 지도 내용과 계열이 의미 있게 재구성되어야 한다.(Drijvers, 2003)

CAS의 도구발생 과정을 통찰하는 것은 기존 지필 중심의 중등 수학교육에서 CAS 활용 수학수업의 가능성을 좀 더 분명히 드러낸다는 측면에서 그 중요성이 강조된다. 따라서 도구장착과정에서의 CAS 활용 가능성뿐만 아니라 도구화 측면에 대한 문제해결활동의 설계와 이에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

본 연구는 중등수학교육에서 미적분학을 배우지 않은 학생들을 대상으로 CAS를 활용한 최적화 문제해결 활동 사례 연구를 통하여 CAS의 도구화 과정을 분석하고자 한다. 따라서 이 연구는 중등 수학교육에서 CAS의 도구화가 교육과정 내용제시 순서에 어떠한 영향을 줄 수 있는지에 대한 사례를 제공함으로써 CAS가 도입된 이후의 우리나라 중등수학교육과정 편성에 유용한 정보를 제공할 것이다.

II. 이론적 배경

본 논문에서는 미적분학을 학습하지 않은 고등학생들의 CAS 활용 최적화 문제 해결 활동의 특징을 분석하기 위하여 CAS 활용과 관련하여 최근 논의되고 있는 교육과정 변화, 의미표출 여부, 수학적 절차, 과정과 대상 관점, 도구발생 관점을 간략하게 설명하기로 한다.

가. 학습 계열과 강조점의 변화

전통적인 수업의 재계열화와 강조점 변화의 필요성을 언급한 연구들은(Pierce & Stacey, 2002; Heid, 2003; Kutzler, 2003) CAS의 도입으로 ‘개념 먼저, 응용 나중’이라는 수업 계열의 변화가 불가피함을 강조하고 있다. Heid & Edwards (2001)는 CAS를 사용하면 개념이나 기술 습득이 반드시 문제해결보다 선행될 필요가 없으므로 응용문제를 개념과 기술습득에 앞서 지도할 수 있다고 제안한다. 또한 Pierce & Stacey(2002)는

1) 도구화된 행동스킴(Instrumented action scheme)과 사용스킴(Usage scheme)에 대한 자세한 설명은 한세호(2009)논문을 참고할 수 있다.

CAS의 출현이 대수교육에서 핵심적인 능력이 무엇인지에 대해 재고하게 한다는 점과, 다중표상 능력과 기호 감각을 포함하는 대수통찰능력이 CAS 환경에서의 성공적인 대수문제해결을 위한 필수능력이라고 주장하고 있다.

나. 화잇박스와 블랙박스

CAS 사용에서 연산 절차는 그 과정과 의미 표출 여부에 따라 화잇박스(white box)가 되기도 하고 블랙박스(black box)가 되기도 한다. 연산 절차를 드러내지 않고 결과를 출력하면 CAS를 블랙박스로 이용한 사례가 된다. 반면, 연산 절차를 단계적으로 드러내고 출력된 결과에 대해 학생이 완전히 이해하고 있으면 CAS를 화잇박스로 이용한 사례가 된다.

Drijvers(1999)는 학생들이 문제해결에 성공했음에도 불구하고 결과를 이론적으로 정당화하지 못할 때 심리적인 불편함을 경험할 수 있다고 주장하였다. 반면 새로운 주제를 완전히 이해(화잇박스)한 후, 보다 높은 수준의 새로운 주제를 학습하는 동안 사소한 계산에 CAS를 사용(블랙박스)하게 하는 경우 CAS는 화잇박스/블랙박스(W/B)의 역할을 동시에 할 수 있게 된다.

다. 거시절차와 미시절차

Heid(2003)는 수학적 절차를 거시절차와 미시절차로 구별하고, 거시절차는 몇 단계의 주요한 미시절차로 구성된다고 하였다. 예를 들면, x에 관한 이차방정식 풀이 과정이라는 거시절차는 <표 II-1>와 같은 3단계의 미시절차로 구성된다.

<표 II-1> 이차방정식 풀이 절차

단계	단계별 미시절차
1	• 우변이 0 이 되도록 식을 다시 정리한다.
2	• 좌변을 인수의 곱으로 표현한다.
3	• 각각의 인수를 0으로 만드는 값을 찾는다.

이에 비해 CAS를 사용하면, 계산기 메뉴에서 수행하는 여러 미시절차를 조합하여 3단계의 미시절차를 하나의 미시절차로 만드는 것이 가능하다(<표 II-2> 참고).

<표 II-2> CAS에서 이차방정식 풀이 절차

단계	단계별 미시절차
1	• 매개변수 a, b, c의 값을 정한다.
2	• Solve($ax^2+bx+c=0, x$)와 같이 [solve] 명령어를 실행한다.

CAS는 서로 다른 다양한 수준에서 미시절차를 수행하기 위한 메뉴 명령어를 지닌다. 예를 들면, 방정식의 단계적 풀이를 사용하거나 또는 [solve] 명령어 사용하기가 그것이다.

라. 과정(Process)과 대상(Object)

수학적 개념은 때로는 수행될 수 있는 과정으로 정의될 수도 있고, 다른 한편으로는 고급 수준의 대상으로 간주되기도 한다. 대수에서 문자로 표현된 $a+b$를 계산할 수는 없으며, 그러므로 ‘+’는 “a와 b의 합”으로 대상을 규정하는 기호일 뿐이다. Drijvers(2005)는 특정 상황에서 그 모호한 표기가 과정인지 대상인지를 판단하기 위한 수학적 전문지식이 대수에서는 매우 중요하다고 주장하였다. 또한 그는 학생들이 새로운 개념을 학습할 때 과정, 즉 계산하고 절차를 수행하며 알고리즘을 배우려는 경향이 강하다고 하였다. 그러나 최종적으로는 대상적 측면이 더해져야 하며 “그 동전의 양면”이 하나의 개념으로 통합될 수 있어야 함을 강조한다. 수학적 개념의 이중적 속성인 과정-대상관점은 최근 CAS를 수학교육에 활용하려는 시도에서 주요 쟁점으로 부각되고 있다.

마. 도구발생(Instrumental Genesis)

도구발생을 IT(인공물)와 주체(학생) 두 방향에서 진행되는 것으로 파악한 Artigue(2001)는 도구발생의 두 구성요소를 다음과 같이 설명하고 있다. 도구발생의 첫 번째 방향은 "주체(subject)에서 인공물을 향하는 것으로, 점진적으로 인공물에 가능성을 실어 그것을 특정 용도로 변형"하는 도구화(Instrumentalization)이며 사용스킴(Usage Schemes)이 이에 속한다. 두 번째 방향은 인공물에서 주체로 향하는 것으로, 주어진 과제에 효과적인 반응 기법을 점진적으로 구성하도록 도구화된 행동스킴(Instrumented Action Scheme: 이하 IAS)을 개발 또는 전유하게 하는 도구장착(Instrumentation)이 있다. 학생들은 처음에 CAS의 제약으로 고충을 겪게 되지만 시간이 지나면서 적절한 스킴이 개발되고, 나아가 학습의 가능성으로 작용함으로써 결국 학습에 도움이 된다는 것이 도구장착과정의 주요한 특징이다.

도구발생의 관련요소인 대표적인 IAS를 기존연구(Drijvers & Gravemeijer, 2005, Drijvers, 2003; Kutzler, 2003)를 기초로 살펴보면 다음과 같다.

바. 분리-대입-풀이 스킴

CAS를 이용한 수학개념학습을 분석한 Drijvers & Gravemeijer(2005)는 IAS 중의 하나인 분리-대입-풀이(Isolate Substitute Solve : 이하 ISS) 스킴에 대해 다음과 같이 설명하고 있다. ISS 스킴의 첫 단계는 '풀이(Solve)' 명령어를 이용하여 하나의 변수를 분리하는 단계이고, 두 번째 단계는 치환 기능을 수행하는 조건삽입기호 '|'를 사용하여 기호의 오른쪽 식을 왼쪽에 대입하는 단계이다. 마지막 세 번째 단계는 치환에 의해 구해진 방정식을 '풀이(Solve)' 명령어를 이용하여 해를 구하는 단계이다. 연구에서 그들은 방정식에 쓰이는 [Solve] 명령어와 변수 분리에 쓰이는 [Solve] 명령어를 동일하게 사용하였는데, 동일한 [Solve] 명령어가 "한 변수를 분리시키는 것"과 "과정을 더 진행시키기 위해 다른 변수를 사용하여 한 변수를 식으로 나타내는 것" 또한 의미한다는 것이다. 이는 '방정식을 푼다'는 개념이 확장되고 있음을 보여주는 사례로 볼 수 있다(<표 II-3> 참고).

<표 II-3> 분리-대입-풀이(ISS) 핵심요소

목록	ISS 스킴의 핵심 요소
1	• 미지수 상수가 포함된 방정식에서 변수 중 하나를 분리하는데 이 기법을 적용하기 (Isolate).
2	• 앞 단계에서 도출된 결과를 다른 방정식에 대입하는데 수식 대입 기법을 적용하기 (Substitute).
3	• 해를 구하는데 방정식 풀이 기법을 한 번 더 적용하기(Solve).

사. 연립방정식 풀이에서 IAS

장경윤, 한세호(2009)는 국외연구(Drijvers & Gravemeijer, 2005; Drijvers, 2003; Kutzler, 2003)를 참고하여 연립방정식 풀이에서의 IAS를 <표 II-4>와 같이 설명하고 있다.

목록 중 (1)항목은 기술적 특성을 다른 것들은 순수하게 개념적 특성을 지닌다. 또한 (3)번에서 (5)번 단계는 그 순서가 의미가 있으므로 뒤바뀌면 안 된다. (2)번 항목에서 학생들이 전반적인 전략의 궤도를 유지하는 것을 어려워할 수도 있다. 학생들은 $x+y=a \mid y=a-x$와 같이, 분리된 형태를 그것이 도출된 방정식에 대입하려 할 수도 있는데, 그 결과는 "true"가 나오게 된다. (3)번과 (4)번 항목에서는, 학생들이 분리를 잊어버리고 미 분리된 형태를 직접 대입하는 오류를 범하기도 한다. (5)번 단계의 풀이에서 가장 빈번하게 나타나는 오류는 방정식을 그 방정식에는 더 이상 나타나지 않는 잘못된 미지수에 대해 푸는 것이다. 활동 시간이 지속되면서 이러한 오류는 점점 줄어든다. (6)

번 단계에서는 학생들이 이전의 IAS와 같이 계산 결과에 여전히 변수가 남아있을 때 과정-대상 문제와 미완성 상태의 고충을 우연히 경험하게 된다.

<표 II-4> 연립방정식 풀이에서 IAS 핵심 요소

목록	연립방정식 풀이에서 IAS 핵심 요소
1	• [Setting] 확인하기(복소모드, 실수모드, 표준모드, 십진모드, 호도법, 각도법, 변수 확인, 그래프 [window setting])
2	• ISS 전략이 문제 해결 방법이라는 것 알기 • 특히 전체적인 문제 해결 궤도 유지하기
3	• 미지수상수가 포함된 방정식에서 변수 중 하나를 분리하는데 이 기법을 적용하기(I)
4	• 앞 단계에서 도출된 결과를 다른 방정식에 대입하는데 수식 대입 기법을 적용하기(S)
5	• 해를 구하는데 방정식 풀이 기법을 한 번 더 적용하기(S)
6	• 계산 결과 해석하기 • 특히, 해가 식일 때 미완성 상태 수용하기

도구화된 행동스킴인 IAS의 목록1은 도구화와 관련이 있는 사용스킴을 포함하고 있다. 본 연구에서는 목록1의 사용스킴 중 표준모드와 십진모드, 그래프 [Window setting]등 몇 가지 기능들을 사용스킴과 IAS 둘 다로 보는 관점에 주목하였다. 따라서 CAS를 사용한 문제해결에서 관찰할 수 있는 사용스킴이 IAS스킴으로 어떻게 변화되는지와 이와 관련된 교육적 가치를 고찰하고자 한다.

III. 연구 방법

1. 대상

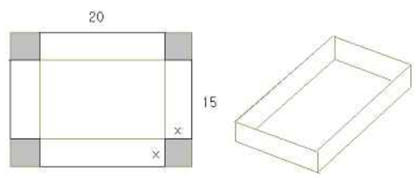
본 연구의 대상은 경기도 용인시에 소재한 S 고등학교 2학년 남학생 7명이다. CAS를 활용한 간단한 연립방정식 풀이 경험이 있는 학생들로 자원하여 본 연구에 참여하였다. 학생들의 학업성취도 수준은 2008년 11월 시행된 대학수학능력 모의평가 등급기준으로 1등급 3명, 2등급 3명, 3등급 1명이었다. 또한 참여 학생 7명 모두 집에 인터넷 사용이 가능한 컴퓨터를 갖추고 있었다.

2. 도구

학생들의 배경지식과 교육과정을 고려하여 최적화개념이 포함된 모델링 문제를 활동지 형태로 제작하였다. 삼차방정식, 무리방정식 개념, 미분 개념은 학생들이 아직 학습하지 않은 내용이었고 미적분 지식은 모든 문항에 포함되어 있다. 활동지의 주요문항은 다음과 같다[그림 III-1], [그림 III-2], [그림 III-3] 참고).

· 상자 만들기(최적화1)

가로, 세로가 각각 $20cm$, $15cm$ 인 직사각형 모양의 보드지에서 합동인 정사각형 네 개를 잘라내어 낸 후 그림과 같이 상자를 만들었다.



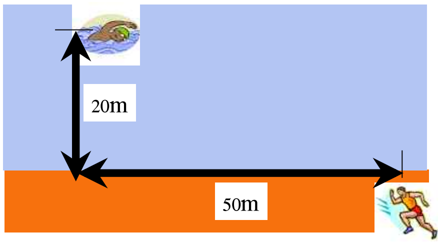
▷ 상자의 부피가 $300cm^3$ 일 때, x값은 얼마인가?

▷ 이 상자의 부피는 최대 얼마인가?

[그림 III-1] 최적화문제1

· 구조 활동(최적화2)

잔잔한 바다에서 사람이 물에 빠져 매우 위태로운 상황에 놓여있다. 구조원의 수영 속도는 2m/s 이고, 평지에서는 8m/s의 속도로 달릴 수 있다. 위급한 상황을 감지한 구조원은 사람을 구하기 위해 먼저 달리기 시작 하였고, 임의 지점부터는 수영을 시작하였다.

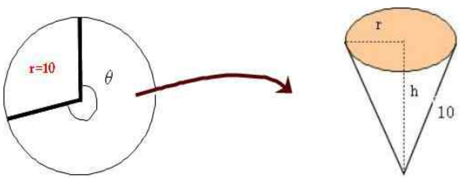


A. 물에 빠진 사람에게 최대한 빠른 시간에 도달하기 위해서 구조원은 몇 m를 달린 후 다이빙을 해야 하는가(단, 위급한 사람은 육지와 수직거리로 20m 떨어져 있고, 구조원은 이 점에서 50m 거리에 있다)

[그림 III-2] 최적화문제2

· 초콜릿 공장(최적화3)

부피가 $1cm^3$짜리 정육면체 초콜릿을 여러 개 녹여 원뿔 모양의 대형 초콜릿을 만들려고 한다. 반지름이 $10cm$인 원 모양의 기름종이를 잘라 원뿔 모양을 만들어 거기에 초콜릿을 녹여 부으려고 한다. A.정육면체 초콜릿 1개 값이 100원이라고 할 때, 원뿔 부피를 최대로 하기 위해 필요한 초콜릿 값은 얼마인가? 그리고 B. 원뿔 제작에 사용된 부채꼴의 중심각 θ의 크기는?



[그림 III-3] 최적화문제3

활동지는 최적화 문제에 대한 CAS의 도구화 과정을 분석하기 위해 기존연구(장경윤, 한세호, 2009; Drijvers & Gravemeijer, 2005; Drijvers, 2003; Kutzler, 2003)를 토대로 개발되었으며 상자부피를 최대로 만드는 문제, 물에 빠진 응급상황 문제, 초콜릿 문제 등 총 3문항과 각각 2-4개의 세부문항으로 구성되어 있다.

3. 자료수집 및 절차

본 연구를 위해, 7명의 학생을 대상으로 50분 수업을 1차시로 하여, 총 9차시에 걸쳐 수업을 진행하였다. 활동은 2009년 3월 11일에서 2009년 4월 29일 까지 수요일 저녁 시간에 실시되었다.

활동 장소는 프로젝션 TV가 구비된 특별실에서 이루어졌고, 활동시간은 저녁 7시와 8시 사이에 이루어졌다. 수업시간에 학생들이 사용한 계산기는 Casio Classpad300이었으며 개인당 1개씩 주어졌다. 교사 노트북에는 Classpad300 계산기 소프트웨어가 내장되어 있고, 프로젝션 TV와 연결되어 있었으며, 교사와 학생들이 자유롭게 사용할 수 있었다. 또한 계산기는 수업 후에도 자유롭게 사용할 수 있도록 실험 기간 동안 학생들에게 대여하였다.

지도교사는 본 연구자로 경력 17년차인 수학교사이며 6년간의 CAS 활용 수업 경험을 갖고 있다. 연구에 참여한 7명의 학생들은 협동학습 및 개인별 탐구학습을 자유롭게 할 수 있도록 했다. 학생들의 문제풀이 활동은 학생1,2,3과 학생4,5 그리고 학생6,7이 각각 한 조가 되어 총 3개조로 편성되어 이루어졌다. 처음부터 의도적으로 조를 편성한 것은 아니었고 자연스럽게 최적화문제풀이 활동 1에서 형성된 조가 그대로 마지막 문항을 해결할 때까지 이어졌다. 문제풀이 활동은 자유롭게 친구들과 대화를 나

누거나 질문을 하면서 이루어졌다.

수업을 녹화하기 위해 고정식 카메라 한 대를 교실 뒤편에 설치하였으며, 이동식 카메라로 학생들의 개별 활동을 녹화하였다. 지도교사인 본 연구자는 실험과정의 학습조력자와 문제해결 활동을 촉진시키는 발문자로서의 역할을 수행하였다. 수업은 최적화문제 1번에서 3번 순으로 진행하였으며 각각 2시간은 개별문제풀이 활동을 하였고, 나머지 1시간은 발표와 토론 순으로 진행하였다(<표 III-1> 참고).

<표 III-1> 수업 절차

차시	수업내용
1-2	• 직사각형 모양의 보드지를 이용한 최적화 문제 풀이(최적화문제1-1) • $y=-x^2+4x$, $y=\sqrt{16-x^2}$ 를 이용한 최적화문제풀이(최적화문제1-2)
3	• 최적화문제1에 대한 발표 및 토론(학생1,학생2)
4-5	• 수영장에서 물에 빠진 위태로운 사람을 구하는 최적화 문제풀이(최적화문제2-1, 2-2, 2-3)
6	• 최적화문제2에 대한 발표 및 토론(학생3,학생4)
7-8	• $1cm^3$정육면체 초콜릿을 녹여서 만들 수 있는 원뿔모양의 대형 초콜릿을 구하는 최적화문제풀이(3-1,3-2)
9	• 최적화문제3에 대한 발표 및 토론(학생5,학생6, 학생7)

4. 분석초점

먼저, 최적화 문제풀이 활동을 통해 수집한 비디오 녹화 내용, 활동지, 면담자료를 기초로 관련 문제의 교육과정을 살펴본다. 두 번째로 CAS명령어 사용에서 화잇박스와 블랙박스 사용 여부를 분석한다. 세 번째로 최적화문제에서의 미시절차를 살펴보고, CAS를 활용한 상황에서의 미시절차와 비교한다. 마지막으로 도구발생의 핵심요소인 활용스킴과 IAS를 분석해보고 도달 수준과 함께 학생들의 최적화 문제해결 활동에서 관찰된 특징을 기술한다.

IV. 결과 분석

CAS가 교육과정 내용제시 순서에 미치는 영향을 분석하기 위하여 최적화 문제해결활동에서 발견할 수 있는 교육과정, 절차와 의미표출 여부, 도구발생의 주요요소와 그 특징에 대한 분석결과를 제시하고자 한다,

1. 최적화문제의 교육과정 분석

본 연구에 사용된 최적화문제를 학생들의 학습경험에 근거하여 분석한 결과는 <표 IV-1>와 같다.

<표 IV-1> 교육과정 분석

활동지	학습에 필요한 교육과정 내용		시수
	학습한 내용	미학습한 내용	
최적화1	· 다항식의 연산과 인수분해 · 3차 방정식의 해법 · 유리수와 유리식 · 무리수와 무리식	· 3차 방정식의 일반 해법 · 3차 함수의 그래프 · 무리함수 그래프 · 미분	3
최적화2	· 피타고라스 정리 · 무리식	· 무리함수 그래프 · 미분	3
최적화3	· 호도법 · 삼각비의 정의 · 무리식	· 무리함수 그래프 · 미분	3

모든 문항에는 학생들이 아직 학습하지 않은 미분개념, 삼차방정식, 무리방정식과 같은 교육과정을 포함되어 있다.

최적화1에서 학생들은 상자의 부피가 300일 때 x값을 구해야 한다. 이때 3차 방정식의 일반해를 구해야 하지만, CAS의 도움으로 쉽게 해결할 수 있었다. 따라서 도함수 개념이나 도함수 계산을 학습하지 않고도 그래프에서의 최댓값 구하기가 가능하다. 또한 미분을 이용하여 3차 함수 그래프와 무리 함수 그래프를 그려야 하지만 CAS의 그래프 그리는 기능이 이

역할을 대신 할 수 있었다.

최적화2에서 학생들은 간단한 거리, 속도, 시간에 관한 물리 법칙과 피타고라스 정리만 알 수 있으면 문제해결에 필요한 무리함수식을 구할 수 있음을 확인하였다. 무리 함수 그래프 그리기는 지필환경에서 매우 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 그러나 CAS환경에서 무리함수 그래프 그리기는 학생들이 학습한 간단한 함수그래프 기능만으로 충분히 가능하였다.

최적화3에서 학생들은 문제풀이에 필요한 함수식을 구하기 위하여 호도법을 이해하고 있어야 했다. 그리고 원뿔 부피 y를 반지름 x로 표현하였다. 원뿔의 부피 $y=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{100-x^2}$ (x는 반지름) 가 최대가 되는 x값을 구하기 위해서는 학생들이 미분을 이용하여 무리함수 그래프를 그려야 한다. 학생들은 CAS의 그래프 그리는 기능을 이용하여 원뿔의 부피변화를 확인하였다.

CAS를 활용한 최적화문제 풀이 활동에서는 수학II와 미적분학에서 학습할 수 있는 삼차함수, 무리함수 그래프그리기는 미분을 학습하지 않고도 CAS의 그래프그리기 기능만으로 최댓값, 최솟값 구하기가 가능하다. 따라서 이는 교육과정상 최적화 문제를 미적분 앞 과정에서도 다룰 수 있는 가능성을 시사한다.

2. 화잇박스와 블랙박스의 사용여부

최적화문제풀이 활동에서 CAS명령어 사용에 대한 학생 각각의 의미 있는 사용여부를 활동지와 면담을 기초로 분석한 결과는 <표 IV-2>와 같다.

표에서 "○"는 학생들이 CAS명령어를 사용하고 있는 상태, "√"는 일부 불완전한 화잇박스로 사용함을 의미한다. 예를 들어 최적화

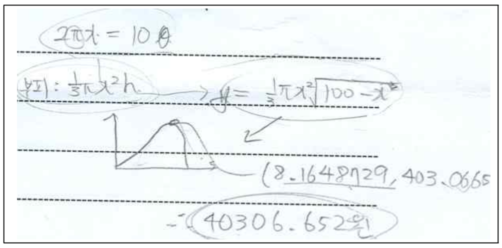
<표 IV-2> 화잇/ 블랙 박스로의 계산기 사용여부

문항	CAS명령어	학생	화잇	블랙	비고
1	3차방정식 해를 구하는 명령어 $Solve((20-x)(15-2x)x=300)$	1		○	√
		2		○	√
		3		○	√
		4		○	√
		5		○	
		6		○	√
		7			
2	무리방정식 그래프를 그리고 최솟값을 구하는 명령어 $Min(\frac{\sqrt{400+(50-8x)^2}}{2}+x)$	1	○	○	
		2	○	○	
		3	○	○	
		4	○	○	
		5		○	
		6		○	√
		7		○	
3	삼차함수의 그래프를 그리고 최댓값을 구하는 명령어 $Max(-\frac{h^3}{3}\pi+\frac{100h}{3}\pi)$	1	○	○	
		2	○	○	
		3	○	○	
		4	○	○	
		5		○	
		6	○	○	
		7		○	√

문제1에서 학생5는 삼차방정식에서 Solve명령어를 단지 블랙박스로만 사용할 수 있음을 의미하고, 학생7은 Solve명령어를 전혀 사용할 수 없음을 의미하며 학생4는 Solve 명령어를 불완전하게 화잇박스로 사용할 수 있음을 나타낸다.

표를 통해, 학생들은 최적화1에서 보다 최적화3에서 CAS명령어를 좀 더 의미 있는 화잇박스로 사용하고 있음을 관찰할 수 있었다.

특히 학생6과 학생7은 최적화 식을 계산기에 입력하지 못하는 수준에서 삼각방정식의 해를 보다 의미 있게 구할 수 있는 수준까지 발전하였다. [그림 IV-1]에서와 같이 학생6은 최적화1에서는 화잇박스를 불완전하게 활용하다가 최적화3에 가서는 계산기를 블랙박스 → 화잇박스→블랙/화잇박스로 자유롭게 사용하고 있음을 확인할 수 있다.



[그림 IV-1] 학생6의 초콜릿 문제 활동지

3. CAS 활용 최적화문제의 미시절차

최적화 문제를 해결하는 해법으로 학생들은 CAS명령어를 이용하는 방법과 그래프를 이용하는 방법으로 문제를 해결하였다. 이는 CAS를 사용하면, 계산기 메뉴에서 수행하는 여러 미시절차를 조합하여 최적화문제를 해결하는 거시절차를 만들 수 있음을 나타낸다. 최적화2를 바탕으로 미시절차를 확인해보고, CAS 활용 상황에서의 미시절차와 비교해보면 다음과 같다.

최적화2는 구조원이 위급상황에 놓여있는 사람을 구하기 위해 최적의 다이빙 위치를 찾는 문제이다. 이에 대한 미시절차는 <표 IV-3>과 같이 구성된다.

<표 IV-3> 무리함수의 최솟값 구하기

단계	단계별 미시절차
1	• 최적화 문제 상황에 맞는 무리함수를 구한다.
2	• 무리함수를 미분하여 그 값이 0이 되는 x를 찾는다.
3	• x값을 대입하여 함수의 최솟값을 구한다.

미분을 배우지 않고 지필환경에서 최적화문제2를 해결하는 것은 어려운 문제이다. CAS활용 시 구성되는 미시절차는 <표 IV-4>와 같이 달라짐을 확인하였다.

<표 IV-4> CAS에서 무리함수 최솟값 구하기

단계	단계별 미시절차
1	• 최적화 문제 상황에 맞는 무리함수를 계산기에 맞는 함수식으로 변형한다.
2	• 그래프에서 Min 명령어를 이용하여 최솟값을 구한다.

CAS 활용 최적화문제 해결 활동은 지필환경과는 달리 간단한 미시절차에 의해 해를 구할 수 있기 때문에 실생활 문제해결학습과 같은 수학적 모델링 학습이 용이함을 확인할 수 있었다.

4. 최적화문제풀이 활동에서의 CAS의 도구 발생

최적화문제풀이 활동에서 학생들의 도구발생 분석을 위하여 먼저 전반적인 문제해결 상황을 분석하였고, 도구발생요소인 사용스킴과 IAS의 도달정도를 분석하였다.

가. 최적화문제 해결 현황

<표 IV-5>는 최적화문제풀이 활동에서 CAS를 활용한 문제 해결 현황을 학생들이 제출한 활동지와 녹화 기록물을 기초로 정리한 것이다. <표 IV-5>에서 “○”는 자력으로 성취한 것을, “●”는 친구의 도움으로 성취한 것을, “▲”는 아직 성취가 완전하지 않은 학생들의 성취수준을, “×”는 성공하지 못한 것을 나타낸 것이다.

학생들의 문제풀이의 성공여부는 최종 답안지를 통해 확인하였고, 친구들의 도움을 통해 성취한 부분은 비디오 녹화 내용 및 참여 관찰에 대한 메모를 통해 확인하였다.

<표 IV-5> CAS를 활용 최적화문제해결 현황

문항		학생1	학생2	학생3	학생4	학생5	학생6	학생7
1	(A)	○	○	○	○	○	○	○
	(B)	○	○	○	○	●	○	●
	(C)	○	○	○	▲	×	●	×
2	(A)	○	○	○	○	○	○	○
	(B)	●	○	○	○	●	○	●
	(C)	○	○	○	○	○	●	●
3	(A)	○	○	○	○	○	●	○
	(B)	○	○	○	○	○	●	○

각 문항에 대한 문제 해결에 대한 주요 특징은 다음과 같다.

최적화1-(C) 무리함수를 응용한 최댓값을 구하는 문제에서 학생4,5는 시간이 부족하여 문제를 해결하지 못했다고 진술했으며, 학생7은 식 세우기와 그래프 그리기 모두에서 어려움을 호소하였다. 문항2에서 학생들은 문항1과는 달리 식 세우기에서 매우 당황해 했다. 하지만 어느 정도 활동이 진행되자 학생들 대부분이 쉽게 식을 만들었다. 그러나 자신이 세운 식에 대해 각자의 식이 서로 다르다는 것을 인식하였다. 식이 다른 원인은 변수로 선택한 x를 일부 학생은 시간으로 일부 학생은 거리로 놓았기 때문이라는 것을 알게 되었다. 학생1, 학생5, 학생7은 최적화 2-(B)에서 해가 2개가 나오는 것을 이해하지 못하다가 급우들의 도움으로 알게 되었고, 최적화2-(C)에서 해가 나오지 않는 것에 대해 학생6, 학생7을 제외한 나머지 학생들은 현실적으로 불가능한 상황임을 잘 설명하고 있었다.

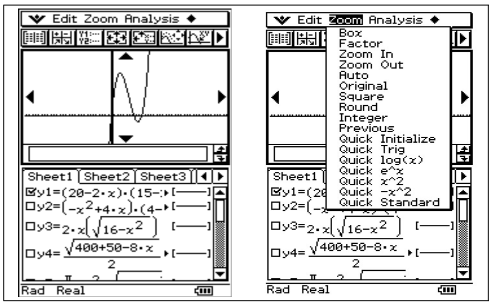
최적화3에서 학생6은 θ를 각도로 놓고 문제를 해결하는 바람에 식을 세우고 그래프를 그리는데 어려움을 겪고 있었다. 학생6을 제외하고는 모든 학생들은 최적화1과 최적화2보다 더 수월하게 문제를 해결하였다. 이는 학생들이 CAS를 사용한 최적화문제에서 그래프를 그리고 함수를 분석하는 능력이 매우 숙련되었음을 의미하며 CAS가 최적화 문제해결을 위한 도구가 되었음을 보여주는 사례라 할 수 있다.

나. 도구발생 요소 분석

본 연구의 도구발생 관련요소는 기존연구(Drijvers & Gravemeijer, 2005; Drijvers, 2003; Kutzler, 2003)를 기초로 하여 분석하였고, IAS와 사용스킴 둘 다로 볼 수 있는 도구발생 요소를 좀 더 상세히 분석하였다.

1) 그래프 그리기와 관련된 도구발생

학생들은 그래프 그리는 전략으로 일단 함수의 정의역과 치역을 생각하지 않고, CAS의 자동(Auto)기능과 [Zoom In] 및 [Zoom out]을 사용하는 방법1을 택하고 있었다. 그러나 활동이 지속되면서 학생들은 윈도세팅(Window setting) 메뉴 를 이용, 정의역과 치역을 어림함으로써 더 빠르고 정확하게 그래프를 그리는 방법2를 택하였다. 활동에 쓰였던 그래프는 [그림 IV-2]와 같다.



[그림 IV-2] 함수 그래프 그리기

학생들의 그래프 그리기 스킴은 방법 1번에서 방법 2번, 1번과 2번을 혼합한 형태, 그리고 최종적으로 더욱 정교한 방법 2번 형태로 발전하여 방법1의 조정을 거치지 않고 그래프를 바로 생성하였다. 삼차함수 그래프 그리기 스킴

또한 최적화2의 무리함수 그래프, 최적화3의 호도법 개념이 포함된 삼차함수 그래프 그리기 스킴과 동일하게 수업이 지속되면서 개선되고 통합되는 양상을 확인할 수 있었다.

학생들의 활동지와 면담을 기초로 최적화 1-(A) 도구발생 관련요소를 분석한 결과는 <표 IV-6>과 같다.

<표 IV-6> 최적화1 도구발생 관련요소

목록	최적화 문제1-(A) 도구발생 핵심요소	IAS	사용스킴
1	• [Setting] 확인하기 (복소모드, 실수모드) (표준모드, 십진모드)	○	○
2	• 3차방정식 해 구하기와 3차 함수 그래프 그리기가 문제 해결 방법이라는 것 알기	○	
3	• 도출한 3차방정식의 해를 구하는데 CAS명령어 사용하기	○	
4	• 3차 함수 그래프 그리기 위해 계산기의 메뉴 선택하기 • 그래프 [window setting]) 확인하기	○	○
5	• x값의 결과 해석하기	○	

목록 (4)에서 [Window Settin]확인하기는 단순한 사용스킴으로 해석할 수도 있으나, 삼차함수에 대한 그래프 개형을 대략적으로 기대하면서 그래프를 그리는 메뉴를 선택했다면 단순한 '키 누르기' 수준을 넘어서는 스킴 형성임을 보여주는 사례라 할 수 있다. 학생들의 대화 내용은 다음과 같다.

학생7: (놀라며) 그래프가 안 보여!
학생6: 식을 잘못 입력했을 거야.
학생7: 아닌데, 정확한데.
학생6: [Zoom In] 계속해 봐. 아니다. [Zoom out]이다.
학생7: (키를 계속 누르고 나서) 어! 보인다. 넌 어떻게 금방 나왔어?
학생6: 을 사용해 봐.

(Auto)기능만을 이용하던 학생들은 [Window Setting] 키에서 정의역과 치역을 어림하여 그래프를 탐구하였고, 동료들과 토론하면서 계산기에 그려진 그래프 일부의 정의역과 치역을 해석할 수 있는 스킴을 발전시키고 있었다. 이는 최적화1에서 학생들이 활용한 사용스킴은 단순히 기술적인 수준에 머물러 있었지만, 최적화3으로 진행되면서 기술적 수준에 머물러 있던 사용스킴들이 점점 수학적 개념을 포괄할 수 있는 스킴들로 발전하고 있음을 보여주는 좋은 예라 할 수 있다.

2) 방정식 해구하기와 관련된 도구발생

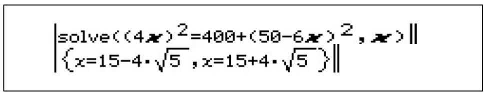
학생들의 방정식 해구하기 전략은 CAS의 [Solve]명령어를 이용하는 방법1, 메뉴에서 [Analysis] - [G-solve] - [Root]를 이용하는 방법2, 영역을 지정한 후 확대하여 [Trace]로 근삿값을 구하는 방법3, 메뉴에서 [Analysis] - [G-solve] - [Intersect]를 이용하는 방법4로 다양하게 나타났다.

교육과정을 넘어서는 방정식 문제 해결에서 CAS를 이용한 방정식의 해법을 학생별로 정리하면 <표 IV-7>와 같다. 학생2는 보다 정확한 값을 구하려는 의지로 다양한 접근 방법을 추구하였다.

<표 IV-7> 학생들의 그래프 그리는 방법

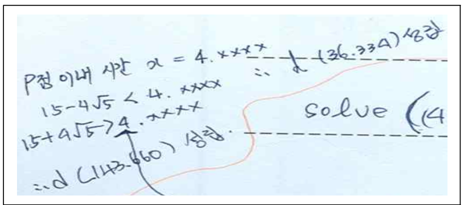
방정식	학생1	학생2	학생3	학생4	학생5	학생6	학생7
$300=(20-x)(15-2x)x$	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{\sqrt{(50-x)^2+400}}{4}=\frac{x}{6}$	1	1,2,3,4	1,2	1	1	1,3	1

학생2는 다른 학생들이 구하는 방법을 모두 사용하였으며, 항상 더 새로운 방법을 모색하였다. 학생들은 최적화2에서 [그림 IV-3]와 같은 4차방정식의 해구하기 문제를 해결하였다.



[그림 IV-3] 4차방정식의 해 구하기

4차방정식의 실근이 2개가 나오자 학생6은 [그림 IV-4]와 같이 지필을 사용하여 무연근을 구하였다.



[그림 IV-4] 무연근 구하기

최적화1 도구발생 스킴의 [Settin] 확인하기는 단순한 사용스킴으로 해석할 수 있으나, 이를 목록 (5)의 x값 해석에서 산출한 값이 근삿값인지 아닌지, 정확한 값인지 아닌지, 모든 해를 구한 것인지 아닌지를 판단하는 근거로 활용했다면 사용스킴과 IAS 둘 다로 볼 수 있다.

학생들은 교사의 발문과 동료 학생들과의 토론을 통해 사용스킴으로만 이용하던 기술적인 측면을 수학적 개념이 포함된 스킴으로 발전시키고 있었다. 학생들의 대화 내용은 다음과 같다.

학생1: (결과에 만족하며) 근이 3개가 나와!
학생2: 당연히 큰 값은 아니지.
학생3: 이중 2개가 정확할 거야.
학생1: 그래 우린 정답을 구했어. 십진모드로 바꾸어도 똑같은 답이 나와!
교사: 300아닌 무리수를 대입하면 어떨까?
학생2: 어! 오른쪽은 무리수인데 해는 유리수!
학생1: 우리가 구한 값이 아주 정확한 값은 아닌가 봐?
학생3: 이상해. 우린 항상(표준모드 상황에서) 정확한 값을 구했는데….

삼차방정식의 해를 구하는 과정에서 블랙박스로만 계산기를 사용하던 학생들이 표준모드와 근삿값을 나타내는 십진모드를 구별하면서부터 표준모드에서 나타나는 해에 대해서도 의심을 가지고 타당성을 검증하고자 하였다.

3) 최댓값 최솟값 구하기

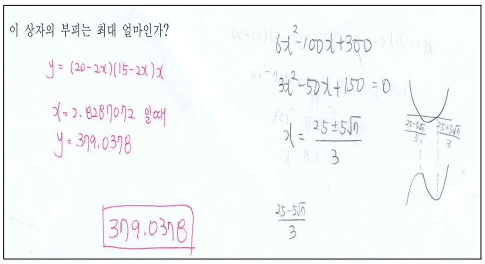
그래프의 최댓값 최솟값 구하기 전략은 CAS를 이용한 미분 풀이 방법1, 메뉴에서 [Analysis] - [G-solve] - [Max(또는Min)]을 이용한 방법2, 영역을 지정한 후 계속 확대시켜 [Trace]로 근삿값을 구하는 방법3이 있었다.

교육과정을 넘어서는 문제 해결에서 CAS를 이용한 함수의 최댓값 및 최솟값 해법을 <표 IV-8>와 같이 정리 하였다.

<표 IV-8> CAS를 활용한 문제해결

함수	학생1	학생2	학생3	학생4	학생5	학생6	학생7
$(20-x)(15-2x)x$	3	1,3	3	2	3	2	2
$\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{100-x^2}$	2,3	1,2,3	2,3	2,3	3	2	2

최적화 문제에서 학생2는 다른 학생들과 같이 2,3번을 이용하여 최댓값과 최솟값을 구하기도 했지만 정확한 값을 찾기 위한 그의 열정은 미분을 미리 학습하도록 자극했다. 그는 미분을 사용하여 근사로 구해진 x값의 해를 정확하게 구했고 [그림IV-5]와 같이 답안에 기록하였다.

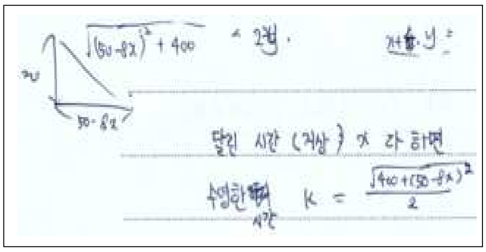


[그림 IV-5] 학생2의 최적화1 답안

또한 그는 [그림IV-6]과 같이 초콜릿 문제를 미분하여 방정식이 0이 되는 값을 구했으며, 괄호( ) 안에 있는 값은 미분을 통해 구한 정확한 값을 의미한다.

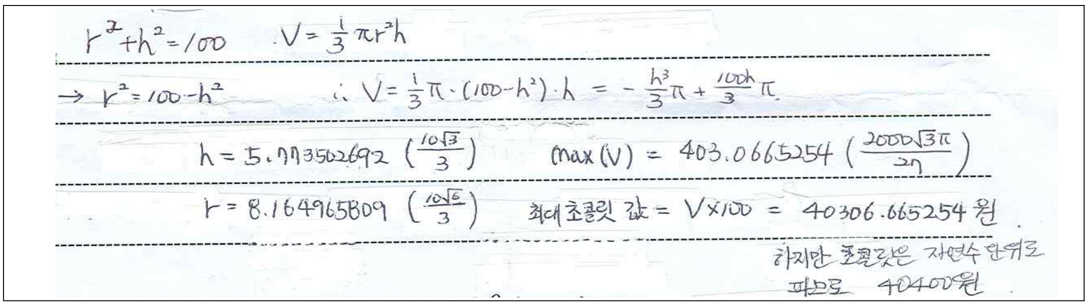
학생2를 제외한 다른 학생들도 자신들이 해결한 최적화 문제의 해에 대하여 정확한 값인지 근삿값인지에 대한 의문을 가지게 되었으며 Classpad 계산기의 다른 기능을 통하여 이를 확인하고자 시도한 이가 있었다. 그러나 학생2와는 달리 미분을 이용한 최적화 문제 해결 방법까지는 발전하지 못하고 계산기의 능력을 인정하는 수준에 만족하고 있었다. 학생들 대부분은 근삿값을 해답으로 수용하는 것에 대하여 활동 초기에는 매우 거북해했다. 활동이 지속되면서 학생들은 점차 근삿값을 해답으로 자연스럽게 받아들이게 되었다. CAS 명령어가 도구로 발생된 학생들은 식을 세우고 최적화 문제 해결에서 나온 해의 의미를 파악하는 활동에 좀 더 집중을 할 수 있다는 점도 확인하였다

학생6은 [그림 IV-7]과 같이 먼저 지필로 활동지에 피타고라스 정리를 기록하고, 얻어진 식을 계산기에 대입하였다. 학생6과 같이 대부분의 학생들은 지필과 CAS를 병행하여 최적화 문제 풀이 활동을 하고 있음을 확인할 수 있었다.



[그림 IV-7] 학생6의 최적화2 답안

학생들은 최적화문제를 해결할 수 있는 함수식을 구하는 과정에서 서로 다른 변수를 선택하였다. 따라서 상이한 변수 선택은 종종 토론에서 언쟁의 원인이 되었다. 그러나 지필과 CAS 사용이 좀 더 자유로워진 최적화3으로 가면서 본인의 식과 동료학생의 식이 결국은 같은 의미를 지니고 있음을 알게 되었다. 이는 지필기법과 CAS기법 간의 상호전환 능력을 통해 학생들이 변수개념을 좀 더 명확하게 하는 데 도움을 주었다고 할 수 있다.



[그림 IV-6] 학생2의 최적화3 활동지

V. 결론 및 논의

본 연구는 CAS를 사용한 최적화 문제 풀이 활동이 교육과정 내용제시 순서에 영향을 줄 수 있는지를 분석하기 위해 설계되었다. 분석 결과 학생들은 CAS를 활용하여 미학습된 교육내용인 미분과 삼차방정식, 무리방정식의 해구하기와 그래프 그리기가 포함된 최적화 문제해결활동을 수준 높게 다룰 수 있는 것으로 확인되었다. CAS는 기호조작 및 계산 측면에서 학생들의 짐을 덜어 줄 수 있고, 그래프 탐색이 가능하기 때문에 고차방정식 및 무리방정식 그리고 분수방정식이 포함된 최적화 문제풀이를 꼭 미적분 단원 이후에 학습하지 않아도 되게 하였다. 따라서 도구화된 CAS의 도움이 주어진다면 저학년에서도 미분에 대한 지식 없이 3차함수과 무리함수, 분수함수식이 포함된 최적화 문제 풀이 활동이 가능할 수 있음을 확인하였다.

CAS가 수학학습에 유용한 도구가 되기 위해서는 CAS를 적절하고 적합한 방식으로 사용하는 방법을 발달시키는 도구발생의 과정을 거쳐야 하며, 이 도구발생의 핵심은 '도구장착'과 '도구화'의 두 방향에서 이루어지는 IAS와 행동스킴의 발달에서 출발한다. CAS를 활용한 최적화 문제해결활동에서의 도구발생 과정에 대한 분석 결과, CAS와 학습자 사이의 도구장착과 도구화는 어떤 종류의 도구를 사용했는가가 영향을 주기도 하지만, 학습과제나 학습자에 따라 차이를 보인다는 기존연구를 확인하였다. 여기서는 과제와 학습자와 도구화, CAS와 교육과정, CAS를 활용한 최적화 문제해결의 교수학적 의의를 논의하고, CAS 사용이 가능한 중등 수학교육과정에 대해 제언을 덧붙이고자 한다.

첫 번째로 도구화는 추측 및 발견활동을 촉진시키고, 수학적 모델링을 용이하게 하며 계산 알고리즘보다는 의미에 주목하게 하는 관점으로 요약할 수 있다, CAS를 활용한 최적화 문제활동 과제에서 처음에는 간단한 사용스킴으로 이용했던 [Window Setting], 십진모드와 표준모드, 그리고 라디안과 각도의 변환모드는 시간이 지나면서 단순한 '키 누르기'의 활동을 넘어서 적절한 스킴이 개발되면서 도구장착과 관련된 IAS로도 볼 수 있는 스킴으로 발전하였다. 따라서 CAS의 도구화는 단순한 계산기의 '키 누르기'를 넘어선 수학적 개념 확장이 이루어지는데 기여하였다.

도구발생 과정에 학습자가 변인으로 나타났다. 예를 들어 3차방정식의 해를 구하는 문제에서 학생2는 방정식의 해가 근삿값이라는 생각을 하게 되었고, 이러한 생각은 근삿값이 아닌 정확한 값을 구하고자 하는 동기유발을 일으켰다. 근삿값을 최적화 문제의 해로 받아들이고 있는 학생들과는 달리 여러 가지 방법으로 최적화문제를 해결하면서 근본적인 의문을 해결하려 하였다. 이와 같은 의문은 학생에게서 미분을 선행 학습하고자 하는 욕구를 불러일으켰으며, 미분을 통해 정확한 값을 구할 수 있었다. 학생2가 다른 학생들보다 CAS를 매우 자유롭게 사용하였으며, CAS의 도구화가 먼저 이루어진 학생이라는 점은 시사하는 바가 크다고 할 수 있다.

둘째, CAS는 수학교육의 초점과 교육과정의 내용 제시 순서를 바꿀 수 있음을 알 수 있었다. CAS는 학생들로 하여금 아직 지필해법을 학습하지 않은 최적화 문제 풀이를 그래프로 구하고, 구한 해의 의미를 이해할 수 있게 하였다. 따라서 도구화된 CAS에 기반 한 최적화 문제해결활동은 CAS가 교육과정의 제시순서에 영향을 줄 수 있으며, 식을 세울 수 있으면 해를 구할 수 있는 일반적인 방식을 제공함으로써 방정식 풀이 기법에서 식 세우기로 수학활

동의 초점이 변하는 사례이다.

여기에서, "수학의 가치를 어디에 두는가?" 라는 문제가 교육과정의 초점과 계열 조정 여부에 영향을 미친다. 수학적 모델링을 중시하고, 실생활 문제를 접할 수 있는 계기를 조성한다는 관점에서 보면 CAS가 중요한 역할을 한다고 볼 수 있다. 그러나 최적화문제 해결에서 정확한 해를 구하는 문제에 지나친 초점이 맞추어 진다면 이곳에서의 CAS의 역할은 단순한 "Black Box"로 기능하는데 지나지 않을 것이다. 결국 CAS 도입의 성패여부는 교육과정의 유연성 여부와 맥을 같이한다. 교육과정 문서에서 ICT활용은 "권장(6차)→적극권장(7차)→허용(7차 수정)"의 혼란스런 입장 변화를 보이고 있다(장경윤, 2007). 따라서 ICT를 활용을 극대화하기 위해서는 현 교육과정의 결합형태가 보다 유연성을 가질 필요가 있다.

셋째, CAS를 활용한 최적화 문제해결의 교수학적 의의를 생각해 볼 수 있다. 우선 교육과정 내용을 줄일 수 있는 여건을 조성할 수 있다는 점이다. 인문과정 미적분학이 2011년 수능부터 도입된다. 교과내용을 줄인다는 명목으로 7차 교육과정에서 없어졌던 내용이었지만 시대적 흐름을 외면하기에는 역부족이었을 것이다. CAS를 활용한 미적분학 교육은 학생들의 지루한 계산을 덜어주고 좀 더 고차원적인 교육내용을 교수할 수 있는 여건을 조성할 수 있다는 점에서 시사하는 바가 크다. 다음으로 수학적 개념 원리의 응용과 모델링을 중시하는 대수교육의 최근 경향을 반영할 수 있다는 점이다. 개념먼저 응용 나중이라는 전통적인 패러다임에서 문제→실험→추론(그리고 증명)의 발견적 접근이 가능한 수업계열의 변화에 기여하는 바가 크다고 할 수 있다.

CAS의 도입이 기존 수학교육의 목적과 가치, 교육과정에 미칠 파급효과에 대한 조정은 쉽지 않아 보인다. 그러나 학교현장에서 CAS를 활용한 최적화 문제해결활동의 교수학적 의의를 실현하기 위한 실질적인 연구가 필요하다고 생각하며, 본 연구가 이런 노력의 기초가 되기를 기대하면서 다음과 같은 제언을 덧붙이고자 한다.

첫째, CAS가 허용된 교육과정에서 최적화 문제해결활동의 교육과정 편성에 대한 구체적인 방향을 제시할 필요가 있다. 삼차방정식 해구하기 내용이 포함된 본 연구의 최적화1 문항은 고3 미적분학에서 다루어지게 되어 있다. 그러나 CAS가 허용되면 현 중학교 3학년 이차방정식 단원 이후에 학습이 가능하며, 보통 학생들의 능력으로 볼 때, 고1 함수단원 학습과 병행하여 실시하는 것이 바람직하다고 볼 수 있다. 무리방정식 해구하기 내용이 포함된 최적화2 문항은 고1의 무리식 단원과 함께 병행 실시하는 것을 제안하며, 삼각함수의 호도법 지식을 요하는 최적화3 문항은 고1의 삼각함수 단원에서 병행한다면 교육적 효과를 극대화할 수 있을 것이라 기대된다. 이를 실현하기 위해서는 교육내용이 통합적으로 운영될 수 있는 교육과정의 유연성이 절실히 요구된다.

둘째, CAS가 허용된 교육과정이 학생들의 수학적 사고를 신장시킬 수 있게 위해서는 지속적인 교사연수가 필요하다. CAS는 계산기 자체의 내부적 제약과 문법과 관련된 명령어상의 제약, 구성적 제약 등이 있는데, 교사는 이러한 제약이 수학교육에 새로운 가능성으로 작용할 수 있도록 학습할 필요가 있다. 따라서 사용스킴이나 IAS 둘 다로 볼 수 있는 다양한 모드의 이해와 그래프 그리기 스킴 등에 대한 학습이 요구된다. CAS 기반 수학수업에서 학생들이 겪을 수 있는 고충은 종종 수학적으로 의미가 있으나 잘 드러나지 않던 주제를 다룰 수 있음을 교사들은 인식할 수 있어야 한다.

셋째, CAS가 허용된 교육과정에서 학생들의 수학적 사고의 신장을 도울 수 있는 평가에 대한 기초연구가 필요하다. CAS 환경에서의 수학교육내용을 평가할 수 있는 평가문항은 기존 교육과정내용을 평가하는 문항과는 큰 차이가 있을 수 있다. 따라서 이를 위한 기초적인 평가기준을 마련하는 일이 우선되어야 한다.

마지막으로 본 연구는 고등학교 2학년 7명 학생을 대상으로 CAS를 활용한 최적화 문제해결 활동에서 "CAS의 도구화"가 교육과정 내용 제시 순서에 미치는 영향을 분석하였다. 그러나 이를 일반화하기에 한계가 있으므로 중학교와 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 한 지속적인 CAS활용 연구가 요구된다.

참고문헌

김화경(2006). **컴퓨터와 수학교육 학습-지도 환경에 관한 연구**, 서울대학교 박사학위 논문.

류희찬(2005). CAS를 활용한 대수교육의 의미와 방법. **제 18회 수학교육과 세미나**, 한국교원대학교 수학교육과.

장경윤(2005). CAS와 수학교육. **제 18회 수학교육과 세미나**, 한국교원대학교 수학교육과, p10.

______(2007). ICT 시대의 대수교육의 방향과 과제. **학교수학**. 9(3), 409-410.

한세호(2001). **그래픽 계산기를 활용한 개방형 문제 풀이 활동에 관한 연구**, 한국교원대학교 석사학위 논문.

______(2009). **고등학교 수학학습에서 컴퓨터 대수체계(CAS)의 도구발생**, 건국대학교 박사학위 논문.

한세호・장경윤(2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생, **대한수학교육학회지 학교수학**, 11(3), pp.527-546.

Atigue, M. (2001). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *CAME Symposium 2001:* Theme 1 Presentation.

Davis, R.B. (1984). Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education. N.J.: Ablex Publishing Corporation.

Drijvers, P.H.M. (1999). Student encountering obstacles using CAS. International Journal of Computer Algebraic Mathematics Education, pp. 46-47

________(2003). Algebra on screen, on paper, and in the mind. In Fey. J,T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp. 241-267).

Drijvers, P.H.M. and Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes, In D. Guin,, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*(pp. 176-186). New York: Springer.

Heid, M.K.(2003). Theories for Thinking about the Use of CAS in teaching and Learning Mathematics, In Fey. J.T. , Couco A., Kieran C. McMullin, L. and Zbiek, R. M.(Eds), Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education(pp. 33-40). Reston, VA: NCTM.

Heid, M.K. & Edwards, M.T. (2001). Computer Algebra Systems: revolution or retrofit for today's classrooms?, *Theory into Practice 40.* spring: 128-36.

Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: *A Study of CAS use in secondary school algebra*(pp.206-207). New york: Springer.

Kutzler, B. (2003). CAS as Pedagogical Tools for Teaching and Learning Mathematics", In Fey. J,T. , Couco A., Kieran C, McMullin, L. and Zbiek, R.M.(Eds), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics Education*(pp.73-88). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lagrange, J.B.(2001). A multi-dimensional study of the use of IC technologies: The case of computer algebra. In J. Novotna (Ed), *Proceeding of the second conference of the European Society for Research in Mathematics Education*(pp.170-182).

_________(2005). Using symbolic calculators to study mathematics. In D. Guin,, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* (pp. 113-136). New York: Springer Science Business Media, Inc.

NCTM(2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA:NCTM.

Pierce, R.U., & Stacey, K.C. (2002). Algebraic insight: The algebra needed to use computer algebra systems. *The Mathematics Teacher, 95*(8), 622.

Rivera, F.D.(2005). An anthropological account of the emergence of mathematical proof and related processes in technology based environments(pp.125-136), Yearbook of NCTM. edited by William J.M. & Portia C.E.

Trouche, L. (2000). The parable of the left-handed and the skillet: Study on the learning process in a symbolic calculator environment. *Educational Studies in Mathematics,* 41, 239-264.

____________(2002). An instrumental approach of learning mathematics in a symbolic calculator environment. In D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Symbolic calculators, transforming a tool into an instrument for a mathematical work: A didactical problem,* 215-242. France.

____________(2005). Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools, with differential effects. New york: Springer.

The Influence of Instrumentalization of Computer Algebra System(CAS) on the Sequence of Mathematics Curriculum in the Optimization Problem Solving Activities of CAS

Han, Se Ho (Suji High School)

This study was designed to investigate the possibility that the optimization problem solving activities based on the instrumented CAS can have an influence on the sequence of mathematics curriculum in secondary mathematics education.

Some optimization problem solving activities based on CAS were constructed and executed to eleventh grade(the penultimate year of Korean high school) 7 students for nine class hours.

They have experienced using CAS in mathematics class for three months, but never learned calculus.

The data which consists of classroom observations(audio and video taped) and post-unit interviews with students were analyzed.

In the analysis, with CAS, students can highly deal with the applied optimization problems made up of calculus, cubic equation, solution of radical equation, and graph analysis which never learned. This result shows CAS may have an influence on the sequence of mathematics curriculum in secondary mathematics education.

* key word : Computer Algebra Systems(컴퓨터 대수 체계), Instrumental Genesis(도구발생), Instrumented CAS(도구화된 CAS), Instrumentation(도구장착), Instrumentalization(도구화), Optimization Problem Solving Activity (최적화 문제해결활동)

논문 접수 : 2010. 04. 15
논문 수정 : 2010. 05. 19
심사 완료 : 2010. 05. 22