韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2010. 05. 제 13권, 제 1호, 37-48

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
May. 2010, Vol. 13, No. 1, 37-48

Erdniev의 교수학적 단위의 확장 및 그의 초등학교 수학교과서의 확장된 교수학적 단위에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)

본 연구에서는 문헌들의 분석을 통해 교수학적 단위의 개념을 규정하고, Erdniev의 연구들을 분석하여 교수학적 단위를 확장하는 구체적인 방법들을 제시하였다. 그리고 Erdniev의 수학교과서를 분석하여, 교수학적 단위의 확장 개념이 수학교과서에 어떻게 구현되었는가를 조사하였다. 특히 확장된 교수학적 단위에 관련된 수학교과서 분석 연구에서는 Erdniev의 초등학교 3학년 수학교과서의 소단원 '두 연산이 포함된 문제'에 포함된 교과내용을 교수학적 단위의 확장 방법, 확장된 연습문제의 형태, 구조를 분석하였다.

본 연구의 결과를 통해, 교수학적 단위의 확장에 관련된 구체적인 방법들이 우리나라의 수학교육학 연구에 활용될 수 있을 것으로 기대되며, 교수학적 단위의 확장 개념이 구현된 수학교과서의 분석 결과는 수학 교수-학습 방법의 새로운 접근 가능성을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

I. 서 론

최근 들어 수학교육학에 대한 많은 연구들이 다양한 방향으로 이루어지고 있다. 김응태・박한식・우정호(2004, p.12)는 '수학교육학은 수학의 학습지도의 개선을 위해 그와 관련된 분야의 연구를 하는 과학이며, 다루어지고 있는 문제의 성격상 관련 과학의 연구 성과를 종합하지 않으면 안되는 특성을 지닌 전형적인 경계과학'이라고 하였다. 즉 수학교육학은 다른 학문영역들과 밀접하게 상호관련성을 가지며, 서로의 연구결과들을 공유하며 발전하고 있는 융합학문영역이라 할 수 있다. 그리고 김응태・박한식・우정호(2004)는 Kaufman과 Steiner의 연구를 바탕으로 수학교육학이 수학, 교수학, 교육학 등의 학문영역에 연결되어 있다고 기술하였다.

수학교육학의 연구들은 수학, 교수학, 교육학 등의 학문 영역의 연구들과 밀접하게 관련되어 있다. 특히 최근에는 수학교육학의 다양한 개념들에 대한 교수학적 측면의 주제들에 대해 많은 연구자들이 주목하고 있다. 예를 들어 외국의 수학교육학 학자들에 의해 수학 교수-학습에서 교수학적 상황, 교수학적 변환, 교수학적 원리 등의 개념들이 연구되었다. 이들 개념은 국내의 수학교육학 연구자들에게 소개되어, 국내의 다양한 연구자들에 의해 이들 개념에 관련된 다양한 수학교육학의 연구들이 진행되었고, 주목할 만한 연구 성과들도 폭넓게 축적되었다.

살펴본 교수학적 상황, 교수학적 변환, 교수학적 원리 이외에, 수학교육학 영역에서 연구되고 있는 개념이 교수학적 단위의 확장이다. 수학교육학 영역에서 교수학적 단위의 확장에 대한 연구는 러시아의 수학교육학자인 P.M.Erdniev에 의해 폭넓게 연구되었지만, 국내에는 아직 소개되지 못했다. Erdniev(1996, p.7)에 의하면, '우리는 1960-1994년에 걸쳐 일반 학교의 1-6학년에서 실험 교과서를 이용해 교수학적 개념들을 성공적으로 실험하였다'고 하였다. 즉 Erdniev는 1960년부터 교수학적 단위의 확장에 관련된 연구를 수행해 오고 있으며, 이 개념에 근거한 수학교과서를 저술하였다. Erdniev는 7-9학년 수학교과서도 저술하여, 지금은 교수학적 단위의 확장에 근거한 수학교과서가 1학년에서 9학년까지 출판되어 있다.

본 연구에서는 다양한 문헌의 분석을 통해 교수학적 단위의 개념을 규정하고, Erdniev의 연구들을 분석하여 교수학적 단위를 확장하는 구체적인 방법들을

* 접수일(2010년 4월 29일), 게재확정일(2010년 5월 18일)
* ZDM분류 : D82
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 교수학적 단위, 확장된 교수학적 단위, 수학교과서

제시할 것이다. 그리고 Erdniev의 수학교과서를 분석하여, 교수학적 단위의 확장 개념이 수학교과서에 어떻게 구현되었는가를 조사할 것이다. 이를 통해, 교수학적 단위의 확장 개념이 우리나라의 수학교육학 연구에 활용될 수 있도록 기초 자료를 제공할 것으로 기대되며, 교수학적 단위의 확장 개념이 구현된 수학교과서의 분석 결과는 수학 교수-학습 방법의 새로운 접근 가능성을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

II. 연구방법

본 연구는 교수학적 단위 및 확장 이론에 대한 문헌 연구와 확장된 교수학적 단위에 관련된 수학교과서 분석 연구로 구성되어 있다.

1. 교수학적 단위 및 확장 이론에 대한 문헌 연구

'교수학적 단위'의 개념을 규정하기 위해, 첫째 사전적 의미로의 교수학적 단위, 둘째 교육학 연구에서 실제 활용되는 교수학적 또는 교수학적 단위의 개념을 분석할 것이다.

첫째, '교수학'과 '단위'의 다양한 사전적인 의미를 국어사전, 교육학 백과사전, 용어 및 정의 사전 등을 분석하여, 교수학과 단위가 결합된 교수학적 단위의 개념에 대한 사전적인 의미를 규명할 것이다.

둘째, '교수학적'이라는 수식어가 붙어 있는 단어 결합을 수학교육학 연구에서 찾아 '교수학적'의 의미를 밝힐 것이다. 그리고 교수학적 단위의 개념이 사용된 교육학의 연구들을 분석하여, 교수학적 단위의 개념을 명료화시킬 것이다.

한편 교수학적 단위의 확장에 관련된 연구에서는 교수학적 단위의 확장 방법을 연구하여 수학교육학 연구에 처음으로 도입한 Erdniev의 연구들을 중심으로 문헌연구를 수행할 것이다.

2. 확장된 교수학적 단위에 관련된 수학교과서 분석 연구

확장된 교수학적 단위를 활용한 수학교과서가 Erdniev에 의해 1학년에서 9학년까지 출판되었다. 1학년에서 9학년까지의 수학교과서는 그 분량이 방대하므로, 이들 수학교과서를 모두 분석하는 것은 매우 어렵다. 뿐만 아니라, 본 연구에서는 교수학적 단위의 확장이 수학교과서에 어떻게 구현되었는가를 분석할 것이므로, 1학년에서 9학년까지의 모든 수학교과서를 조사할 필요는 없다. 왜냐 하면, 이들 교과서에는 교수학적 단위를 확장하는 유사한 방법들이 반복되어 사용되었기 때문에, 특정 학년 수학교과서의 특정 내용을 분석하여도 본 연구의 목적에 도달할 수 있기 때문이다.

특히 Erdniev의 연구들(1965, 1995a, 1996)을 살펴보면, Erdniev는 수학 연습문제를 통한 교수학적 단위의 확장에 많은 의미를 부여했음을 알 수 있다. 본 연구에서는 Erdniev의 초등학교 3학년 수학교과서 중에서 '두 연산이 포함된 문제'라는 소단원을 분석할 것이다.

본 연구에서는 Erdniev의 초등학교 3학년 수학교과서의 소단원 '두 연산이 포함된 문제'에 포함된 교과내용을 교수학적 단위의 확장 방법, 확장된 연습문제의 형태, 구조를 분석할 것이다.

III. 교수학적 단위와 교수학적 단위의 확장

1. 교수학적 단위

교수학적 단위는 '교수학'과 '단위'로 이루어진 단어 결합으로, 각 교과의 교육과정과 관련되어 사용되지만, 아직 그 개념이 명확하게 정의되지는 않았다.

러시아의 한 대학교의 교육과정 소개 자료(IPCUB, 2010, p.1)에서는 교수학적 단위를 학습되는 주제들과 동일한 개념으로 사용하면서 '전문교과목이나 교양교과목의 교육과정에 기술된 학습 자료 내용의 요소'라고 규정하였다. 이 자료에는 '경제학' 교과목의 교수학적 단위로 경제학 이론의 대상과 방법, 경제학 이론의 발전 단계, 필요와 자원들, 공동생산과 경제적인 관계들, 경제 체계들, 시장, 자본시장, 노동시장 등이 예시되어 있다. 이 경우에는 어떤 교과목을 구성하는 학습 주제들이 교수학적 단위로 이해되고 있음을 알 수 있다.

한편 용어 및 정의 사전(AST-Tsentr, 2010)에서는 '측정의 교수학적 단위' 개념이 정의되어 있는데, 측정의 교수학적 단위란 주어진 의미와 구체적인 난이도

를 가지는 각각의 평가 과제에 포함되는 교과목 내용의 단편이라고 규정하고 있다. 이러한 경우에 교수학적 단위는 각각의 평가 과제에 포함되는 교과 내용의 일부분이라고 할 수 있다.

이제 교수학적 단위에 대한 개념 규정을 시도하자. 이를 위해, '교수학'과 '단위'의 개념을 살펴보고, 이들을 결합시켜 교수학적 단위의 개념을 정리하자.

교육학백과사전(Bim-bad, 2002, p.69)에서 교수학(didactics)을 '교육학의 한 영역으로, 교수학에서는 지식, 능력, 기능의 획득에 대한 규칙성들, 신념 형성의 규칙성들을 밝히며, 교육 내용의 양과 구조를 결정하며, 교육의 방법들과 조직된 양식들을 완성하며, 학습자에 대한 학습과정의 훈육적인 영향을 규명한다'고 규정하고 있다. 즉 교수학은 교수-학습 과정의 인지적 측면과 정의적 측면에 관련된 규칙성들을 규명하고, 학습내용과 교육방법을 정교화시키는 교육학의 한 영역으로 이해될 수 있다.

'교수학적'의 의미를 생각해 보자. '교수학적'이라는 수식어가 붙은 단어 결합으로 '교수학적 원리', '교수학적 분석', '교수학적 자료' 등을 생각할 수 있다. Freudenthal(2008)은 교수학적 원리라는 개념을 중심으로 수학의 교수-학습에 관련된 방법들, 원리들을 기술하였다. 그리고 우정호 외(2006, p.31)에 의하면, '교수학적 분석은 학교수학의 특정한 주제를 가르치기 적절하게 교재와 수업을 조직하는데 유용한 시사를 얻기 위해 그 주제의 본질을 여러 측면에서 분석하는 연구'를 말한다. 이때의 '교수학적'의 개념은 가르치는 어떤 주제를 가르치는 활동에 관련된 것임을 알 수 있다. 한편 한인기(2005)에 의하면, 교수학적 자료는 수학교과서를 중심으로 교과내용을 설명한 후에, 교사가 학생들의 독립작업을 구성하고 학생들의 지식 획득을 평가하여, 학습의 각 단계에서 교사들이 학생들을 통제・감독하는데 활용할 수 있는 자료를 의미한다.

'교수학적'이라는 수식어가 포함된 이 개념들의 의미로부터, '교수학적'은 어떤 개념들, 이론들, 사실들, 대상들을 교수-학습의 과정에 관련시키기 위해 사용되는 수식어임을 알 수 있다.

'단위'의 사전적 의미를 살펴보면, 국어사전에서(남영신, 2003, p.503)는 '① 양을 수치로 나타내기 위하여 계산의 기본으로 정해놓은 기준, ② 무슨 일을 하거나 무엇을 구성하는데 있어서 뭉뚱그려 하나로 취급하는 묶음'으로 정의되어 있으며, 수학용어사전(손용규, 1982, p.49)에서는 '양을 측정할 때, 그것과 같은 종류의 일정량을 기준으로 해서 주어진 것이 그 기준인 것의 몇 배에 해당하는 가를 측정한다. 이때 기준이 되는 일정량을 단위라고 한다'고 규정되어 있다. 즉 단위는 묶는 대상들이나 측정하는 대상들의 특성을 포함하고 있는 어떤 묶음 또는 기준으로 정의할 수 있다. 이때 묶음이나 기준의 크기나 범위는 단위를 이용하여 묶거나 측정하는 대상들의 성격에 따라 달라질 수 있다.

이제 교수학적 단위의 개념을 규정하자. '교수학적'과 '단위'의 개념을 단순히 결합시키면, '교수학적 단위'는 교과목의 구체적인 교수-학습 과정 또는 내용을 어떤 특성을 중심으로 묶는 단위로 기술될 수 있다.

Shevchenko(2008, p.3)는 정보화된 교육환경의 구축에 대한 연구에서 교수학적 단위는 '학습 대상의 특성들을 보유하고 있는 학습 정보의 최소 양으로, 하나 또는 몇 개의 프레임(frame)으로 구성된다. 이때 프레임은 현상, 사실, 대상에 대한 최소의 서술(묘사)로, 이 서술에서 구성하는 어떤 부분을 없애면 이 현상, 사실, 대상은 인식되지 못하며, 서술 자체가 의미를 잃게 된다'고 하였다.

이 주장으로부터, 교수학적 단위는 교과목의 교수-학습에서 하나 또는 몇몇 개의 프레임으로 구성되며, 학습 대상의 특성들을 보유하고 있는 논리적으로 독립된 학습 자료, 정보의 일부분이라고 규정할 수 있다. 그리고 교수학적 단위를 바탕으로 교사, 학습자, 학습내용의 상호작용이 계획되고 이루어지게 된다.

2. 교수학적 단위의 확장

학습 대상의 특성을 가진 독립된 부분으로써의 교수학적 단위는 다른 개념들, 교수학적 단위들, 법칙들과 연결되면서 확장될 수 있다. Erdniev는 교수학적 단위의 확장, 확장된 교수학적 단위의 개념을 수학 교과내용을 중심으로 체계적으로 연구하였다. 특히 Erdniev는 서로 연결된 개념들의 학습을 위한 공학으로써 교수학적 단위의 확장을 수학 학습 자료를 이용하여 연구하였다. Erdniev에 의해 연구된 교수학적 단위의 확장에 관련된 교과교육학 관련 연구들은 다른 교과목들의 교과교육학 연구로 확산되어 다양하게 연

구되고 있다.

Selevko(2006)에 의하면, Erdniev의 교수학적 단위의 확장 개념은 다음의 교수-학습 방법들을 통합한 것이다: ① 서로 연결된 연산들, 조작들, 함수들, 정리들을 함께 그리고 동시에 학습하기; ② 문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기; ③ 잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기; ④ 처음 과제와 변형된 과제의 대립을 위한 조건이 되는 연습문제의 구조를 변환(순환)시키기; ⑤ 수학적 지식의 복잡한 본질을 밝히고 지식들의 체계성에 도달하기; ⑥ 연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기.

이들을 자세히 살펴보자. ① 서로 연결된 연산들, 조작들, 함수들, 정리들을 동시에 학습하는 것은, 예를 들어 역관계로 연결된 연산인 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈, 함수와 역함수, 정리와 그 역을 동시에 학습하는 것을 생각할 수 있다. 이를 통해 하나의 연산, 조작, 함수, 정리(교수학적 단위)를 역연산, 역조작, 역함수, 역정리와 결합시키면서 확장하는 것이다.

② 문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기는 문제의 구성, 문제의 해결을 별개의 것으로 간주하여, 문제를 구성하기만 하거나 문제를 해결하기만 해서는 안된다는 것이다. 즉 문제를 구성하는 활동과 해결하는 활동이 시간적으로 순차성을 띄며 병행되어야 한다. 이와 관련하여 Erdniev(1993, p.377)는 '현대 모든 학교 수학은 전통적인 범위 안에서 이루어지고 있다-문제를 풀어라(누가 구성하든 상관없는, 단 학생 자신은 아닌!). 30년 동안의 우리의 연구에 의하면, 교육의 목적과 방법으로써《(다른 사람의) 문제를 해결하여라》는 지시는《(자신의) 문제를 구성하고 해결하여라》는 지시에 의해 보완되어야 한다'고 주장하였다. 특히 최근에 우리나라 수학교육에서도 문제의 구성 또는 문제의 제기[2)]에 대한 이론과 실천의 연구들이 다양하게 소개되었고, 2007년 개정된 수학과 교육과정에서도 문제 만들기 활동이 강조되고 있음을 감안하면, 문제 구성을 통한 교수학적 단위의 확장은 수학교육학적으로 의미있는 활동이 될 수 있을 것이다.

③ 잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기는 문제해결을 위한 조건들이 잘 정의되어 있는 과제를 조건의 일부가 정의되지 않은 과제와 연결(교류)시키는 것에 관련된다. 예를 들어 문제 $(140-8)\div 4=\square$는 정답을 구하기 위한 조건들인 수들, 연산들이 모두 정의된 문제이다. 그러나 문제 $(\square-8)\div 4=33$에서는 연산 결과인 33이 주어졌고 문제의 조건에서 □로 표시된 수를 구해야 한다. 즉 연산 결과가 얻어지기 위한 조건이 정의되지 않은 문제가 된다. 문제 $(140-8)\div 4=\square$에서는 문제 $(\square-8)\div 4=33$ 또는 이와 유사하게 조건이 잘 정의되지 않은 문제와의 연결(교류)를 염두에 두어야 한다는 것이다.

④ 처음 과제와 변형된 과제의 대립을 위한 조건이 되는 연습문제의 구조를 변환(순환)시키기에서는 연습문제의 구조를 다양하게 변환시켜 처음 문제와 대립될 수 있는 변형된 과제를 만드는 것에 관련된다. 이와 관련하여 Erdniev(1996)는 연습문제들의 순환적인 완비성 개념을 도입하였다. 연습문제들의 순환적인 완비성은 주어진 문제 또는 식에서 각각의 요소가 차례로 구하는 것이 되도록 문제를 다양하게 변환시키는 것에 관련된다. 즉 처음 문제의 주어진 요소들이 구하는 것이 되도록 문제의 구조를 변형시켜 새로운 문제들을 얻고, 이를 통해 이들 연습문제가 순환적 완비성을 가지게 된다는 것이다.

Erdniev(1996, pp.42-43)는 연습문제의 순환적인 완비성의 예로 로그에서 진수와 밑의 관계에 대한 다음과 같은 문제들을 제시하였다.

문제 1. 부등식 $\log_{0.6} 6 \ \square\ \log_{0.6} 5$에서 □에 부등호를 넣어라.

문제 2. 부등식 $\log_{0.6} 6 \ \square\ \log_{0.6} 5$가 주어졌다. a와 b 중에서 어떤 수가 더 큰가?

문제 3. 부등식 $\log_{0.6} 6 \ \square\ \log_{0.6} 5$가 주어졌다. 1과 a 중에서 어떤 수가 더 큰가?

문제 1의 부등식 $\log_{0.6} 6 \ \square\ \log_{0.6} 5$에서 주어진 요소인 밑, 지수를 변형시켜 문제 2, 문제 3과 같은 새로운 문제를 얻고, 이들 문제는 순환적 완비성이라는 질적 특성을 가지게 된다. 이와 유사한 방법으로 문제들을 만드는 방법이 Brown & Walter(1990)에 의해 problem posing이라는 개념으로 알려져, 국내에도

2) 문제 구성, 문제 제기, 문제 만들기, problem posing 등은 같은 개념에 대한 다른 표현들이다.

폭넓게 소개되었다.

⑤ 수학적 지식의 복잡한 본질을 밝히고 지식들의 체계성에 도달하기와 관련하여, Erdniev는 수학적 지식의 변증법적인 성격에 주목하였다. Erdniev(1996, p.215)에 의하면, '변증법의 논리는 형식 논리와는 달리, 현상들의 이동, 계발, 내적 모순, 현상들의 질적 변화, 한 상태에서 다른 상태로의 이동을 연구한다'고 주장하면서, 수학적 지식의 본질은 이러한 역동성에 있다고 하였다. Davydov(2000)는 변증법적인 역동성을 구현하는 사고조작으로 일반화를 강조하였다.

한편 Erdniev(1996, p.221)는 '교수학적 단위의 확장의 맥락에서 수학교육을 재구성한 결과, 수학적 지식이 변증법적인 성격을 가지며, 특히 수학적 지식이 자기성장의 능력을 가지게 된다'고 하였다. 교수학적 확장의 개념을 통해 수학적 지식이 이러한 특성을 가지는 이유 중의 하나로, Erdniev(1996, p.25)는 '확장된 교수학적 단위의 수업에서는 어떤 대상은 자신의 다른 것을 통해서 터득된다. 즉 어떤 문제는 자신의 역문제를 통해, 곱셈은 나눗셈을 통해, 문제해결은 문제의 구성을 통해, 항등식은 방정식을 통해, 부분은 전체를 통해, 분석은 종합을 통해 터득된다'고 하였다. 즉 이러한 역동적인 상호관계에 바탕을 둔 교수학적 단위의 확장을 통해 학습된 지식은 변증법적인 성격을 띈 역동적인 지식이라는 것이다.

⑥ 연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기와 관련하여, Erdniev(1996, p.10)는 '이해는 형상적인 사고와 논리적인 사고 사이의 이동, 의식적인 요소들과 무의식적인 요소들 사이의 이동을 통해서 도달된다'고 하였다. 즉 사고의 형상적인 측면과 논리적인 측면, 의식적인 측면과 무의식적인 측면은 학습 과정에서 상호 보완적인 관계가 형성되어야 한다는 것이다.

교수학적 단위의 확장을 통해 확장된 교수학적 단위를 얻게 된다. 이때 Erdniev(1996, p.9)에 의하면 '확장된 교수학적 단위는 체계성, 통일성을 가지며, 시간에 따른 정보 저장성의 견고함, 기억에서의 빠른 상기와 같은 특성을 가진다'고 하였다. 즉 교수학적 단위의 확장에 근거한 교수-학습 과정을 통해 얻어진 수학적 지식은 학생들의 사고에서 체계성, 통일성, 견고성 등과 같은 특성들을 가지게 된다는 것이다. 한편 사고의 무의식적 측면과 관련하여, Erdniev(1993, p.375)에 의하면 '교수학적 단위의 확장에서는 통일된 표상의 상호작용하는 구성 요소들을 인접시켜 정보를 가공하는 무의식적 메카니즘을 활성화시킨다. 그 결과 학습자의 지식은 자기성장의 질적 특성을 가지게 된다'고 주장하였다. 결국 교수학적 단위의 확장은 사고의 의식적 측면과 무의식적 측면이 통합된 교수-학습 방법의 바탕으로, 이들 두 측면은 서로를 상호 보완하면서 획득되는 수학적 지식들, 능력들의 질적 특성에 긍정적인 영향을 미치게 된다.

한편, 사고의 형상적인 사고와 논리적인 사고 사이의 상호 전환에 관련하여, Erdniev(1993, p.379)는 확장된 교수학적 단위에 근거한 수학교과서를 설명하면서 '우리는 학생들이 좌뇌와 우뇌의 가능성을 모두 이용하여 수학적 이해에 도달하도록 시도하고 있다. 이를 위해, 도식적 정보의 역할을 증대시켰고, 단어⇄상징⇄그림을 연결시키는 특별한 연습문제들도 포함시켰다'고 하였다. 즉 단어⇄상징⇄그림 형태의 정보들을 연결시키는 연습문제들을 통해 학생들의 분석적인 사고와 종합적인 사고 활동의 가능성을 보장하려고 시도하였다.

살펴본 교수학적 단위를 확장하는 구체적인 방법들, 접근 방법들을 통해, 수학 교수-학습 과정에서 확장된 교수학적 단위의 구성하고 활용할 수 있는 가능성을 가지게 된다. Erdniev는 다음과 같이 성격을 규정하고 있다.

> '확장된 교수학적 단위는 학습과정을 구성하는 부분으로, 논리적으로는 서로 다르지만 정보의 측면에서는 일반성을 띄고 있는 요소들로 구성되어 있다(1996, p.9).'

> '확장된 교수학적 단위는 정보의 공통성을 가지고 있는 동종 개념들의 체계로, 이 체계 내에서 명제들의 대칭과 유추에 근거한 변형과 일반화를 통해 자기성장하는 지식의 논리적-공간적 구조가 보장된다(1993, p.375).'

결국 확장된 교수학적 단위는 정보적인 일반성, 공통성을 띈 동종 개념들로 구성된 체계로, 이 체계에서 개념들, 방법들, 법칙들의 변형, 대립, 비교가 이루어지며 이를 통해 수학적 지식들은 체계성, 견고성, 성장의 특성을 가지게 된다.

특히 Erdniev(1996, p.21)는 확장된 교수학적 단위에 근거한 수업과 관련하여, '교수학적 단위의 확장

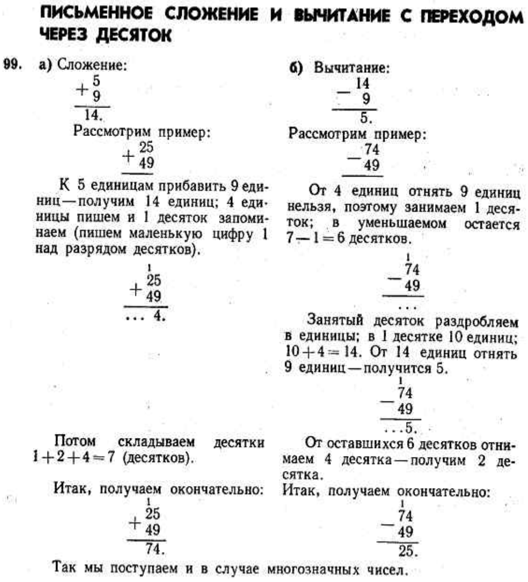
체계에 따른 수업의 주된 생각은 다음 시간으로 연결되는 반복학습에 있는 것이 아니라, 바로 이 시간에, 첫 번째 문제를 풀고 나서 몇 초 또는 몇 분 후에 이루어지는 처음 과제의 변형에 있다. 이러한 변형은 학습 대상을 성장의 안에서 인식할 수 있도록 하며, 과제의 첫 번째 형태를 변형된 형태와 대립시킬 수 있도록 한다'고 주장하였다. 이로부터 Erdniev의 수학 교수-학습에 대한 기본 접근은 교수학적 단위의 확장⇄확장된 교수학적 단위의 연속적인 순환을 통해 견고한 지식의 성장을 수학 교수-학습의 핵심 개념으로 삼고 있음을 알 수 있다.

IV. 초등학교 3학년 수학교과서에서 확장된 교수학적 단위의 분석

Erdniev의 수학교과서를 분석해 보면, 연습문제를 통해 확장된 교수학적 단위에 근거한 학습 활동을 구성하고 있음을 알 수 있다. Erdniev의 초등학교 1-4학년 수학교과서에는 교과 내용의 설명이 독립적으로 제시되는 것이 거의 없으며 연습문제를 중심으로 문제와 함께 내용 설명이 함께 제시되어 있다. 그리고 5-6학년 수학교과서에서도 교과 내용의 설명이 일부 포함되어 있지만, 주로 연습문제를 통해 학습 내용이 구성되어 있다.

예를 들어 Erdniev(1995b, p.37)의 초등학교 3학년 수학교과서를 살펴보면 <그림 1>과 같다. 소단원명은 '십의 자리에서 받아올림, 받아내림이 있는 덧셈과 뺄셈'인데, 단원명을 제시한 다음 연습문제가 제시되고 있음을 볼 수 있다(<그림 1>에서 99는 연습문제의 번호이다). 99번 연습문제 아래에 연습문제의 해결 방법이 설명되어 있다.

이와 같은 수학교과서 구성과 관련하여, Erdniev(1965, p.6)는 '어떤 학문의 기본적인 요소를 밝히고, 이 요소의 다양한 측면을 분석하면, 그 학문 영역의 논리적으로 엄밀한 체계를 구성할 수 있다. 수학교수법에서 그러한 기본적인 요소가 바로 연습문제라고 생각한다'고 주장하였다. 즉 Erdniev는 확장된 교수학적 단위를 바탕으로 한 수학 교수-학습의 구성을 연습문제를 중심으로 시도하였다는 것을 알 수 있다.


ПИСЬМЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ С ПЕРЕХОДОМ ЧЕРЕЗ ДЕСЯТОК

99. **а)** Сложение:

$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 9 \\ \hline 14. \end{array}$

Рассмотрим пример:

$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 49 \\ \hline \end{array}$

К 5 единицам прибавить 9 единиц — получим 14 единиц; 4 единицы пишем и 1 десяток запоминаем (пишем маленькую цифру 1 над разрядом десятков).

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 25 \\ +\ 49 \\ \hline \ldots\ 4. \end{array}$

Потом складываем десятки $1+2+4=7$ (десятков).

Итак, получаем окончательно:

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 25 \\ +\ 49 \\ \hline 74. \end{array}$

б) Вычитание:

$\begin{array}{r} 14 \\ -\ 9 \\ \hline 5. \end{array}$

Рассмотрим пример:

$\begin{array}{r} 74 \\ -\ 49 \\ \hline \end{array}$

От 4 единиц отнять 9 единиц нельзя, поэтому занимаем 1 десяток; в уменьшаемом остается $7-1=6$ десятков.

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 74 \\ -\ 49 \\ \hline \ldots \end{array}$

Занятый десяток раздробляем в единицы; в 1 десятке 10 единиц; $10+4=14$. От 14 единиц отнять 9 единиц — получится 5.

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 74 \\ -\ 49 \\ \hline \ldots 5. \end{array}$

От оставшихся 6 десятков отнимаем 4 десятка — получим 2 десятка.

Итак, получаем окончательно:

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 74 \\ -\ 49 \\ \hline 25. \end{array}$

Так мы поступаем и в случае многозначных чисел.

<그림 1> Erdniev의 초등학교 3학년 수학교과서

Erdniev(1996, p.19)에 의하면, '교수학적 단위의 확장에 근거한 많은 교수-학습의 경험을 바탕으로, 연습문제의 기본적인 형태는 다원요소(多元要素) 과제, 즉 논리적으로 이질적이지만 심리학적으로는 어떤 통일성을 가지도록 결합된 부분들로 구성된 과제이어야 한다는 결론을 내릴 수 있다'고 주장하였다. 그리고 교수학적 단위의 확장 방법에 근거하여, 다원요소 과제, 즉 확장된 연습문제가 다음과 같은 부분 요소들로 구성된다고 하였다.

① 일반적인 준비된 문제의 풀이
② 역문제의 구성과 풀이
③ 주어진 공식 또는 방정식에 따라 유사한 문제의 구성과 풀이
④ 처음 문제와 공통인 몇몇 요소들에 의한 문제의 구성
⑤ 몇몇 변인들에 의해 처음 문제를 일반화한 문제의 구성 또는 풀이

그리고 수학 교수-학습에서 다원요소 과제의 활용과 관련하여, Erdniev(1996, p.19)는 '처음에는 확장된 연습문제에 기술한 변형들 중 일부가 포함될 수 있다. 그러나 확장된 연습문제에 대한 작업에서 중요한 것은, 가능하면 구성 요소들을 나열된 순서에 따라 한 수업시간에 모두 수행하는 것이다(만약 시간이 부족

하면, 구두로 하거나 또는 간단한 토론과 함께 숙제로 남기더라도)'라고 하였다. 결국 교수학적 단위의 확장에 근거한 수학 교수-학습의 주요한 방법은 나열된 다섯 가지 요소들로 구성된 다원요소 과제의 해결로 귀착된다는 것을 알 수 있다.

이제 Erdniev(1995b)의 초등학교 3학년 수학교과서의 소단원 '두 연산이 포함된 문제'에서 확장된 연습문제의 예들을 분석하고, 이에 관련된 교수학적 단위의 확장에 대해 살펴보자.

154[3]. (a) 바쌰는 1루블이 있다. 바쌰는 한 개에 4꼬뻬익하는 엽서 5개를 샀다. 바쌰는 돈이 얼마가 남았는가?

(b) 다음 도식에 따라 문제를 구성하고 해결하여라.
1루블, 엽서 5개, □꼬뻬익, 80꼬뻬익
바쌰는 1루블이 있었다. 바쌰가 이들 돈으로 엽서 5개를 샀더니, 80꼬뻬익이 남았다. 엽서 한 개의 가격을 구하여라.

(c) 다음 도식에 따라 문제를 구성하고 해결하여라.
1루블, 엽서 □개, 4꼬뻬익, 80꼬뻬익
바쌰는 엽서를 몇 개를 구입했는가?

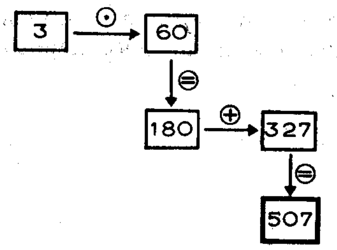
(d) 다음 도식에 따라 문제를 구성하고 해결하여라.
□루블, 엽서 5개, 4꼬뻬익, 80꼬뻬익
바쌰는 처음에 돈이 얼마가 있었는가? (p.52)

연습문제 154에서는 최초의 문제가 (a)이고, 주어진 것과 구하는 것을 바꾼 역문제로 (b), (c), (d)가 제시되어 있다. 이 연습문제는 교수학적 단위의 확장 방법 중에서 '문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기', '잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기', '처음 과제와 변형된 과제의 대립을 위한 조건이 되는 연습문제의 구조를 변환(순환)시키기'에 직접적으로 관련된다.

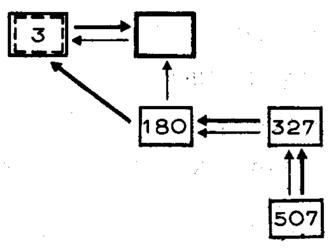
실제로 연습문제 154에는 문제의 구성과 해결이 학습자에게 동시에 요구되었다(문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기). 그리고 (a)는 주어진 조건들로부터 구하는 것을 유도하는 잘 정의된 과제이고, (b), (c), (d)는 연산 결과를 얻기 위한 조건인 수를 구해야 하는 잘 정의되지 않는 과제인데, 이들 문제가 함께 제시되었다(잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기). 한편 문제에는 1루블, 엽서 5개, 4꼬뻬익, 80꼬뻬익이 정보로 포함되어 있는데, 문제 (a)에서는 80꼬뻬익을 구했고, (b)에서는 4꼬뻬익을 구했고, (c)에서는 엽서 5개를 구했고, (d)에서는 1루블을 구했다. 이를 통해 연습문제의 구조를 변환(순환)시켜 처음 문제와 대립되는 다양한 문제들을 제시하였다(처음 과제와 변형된 과제의 대립을 위한 조건이 되는 연습문제의 구조를 변환(순환)시키기).

155. (a) 식당에서 킬로그램에 3루블씩 60㎏의 버터를 구입했고, 고기를 327루블에 구입했다. 식당에서는 식료품을 몇 루블 구입했는가? 문제의 풀이를 <그림 2>를 따라 말하여라.

(b) <그림 3>에 따라 역문제를 구성하고, 이를 해결하여라(굵은 화살표 방향을 따라 이동하라).



<그림 2> 문제(a)의 해결과정

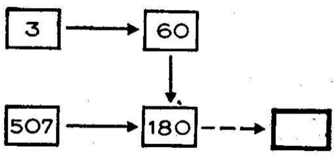


<그림 3> 역문제

(c) <그림 3>에 따라 문제를 구성하고, 이를 해결하여라(얇은 화살표 방향을 따라 이동하라).

(d) 다음 <그림 4>를 이용하여 문제를 구성하여라. 이 문제의 풀이를 다음 공식에 따라 설명하여라: $507-(3\cdot 60)=x$. (p.53)

3) 문제의 번호는 Erdniev(1995)의 수학교과서에 있는 번호를 그대로 적었다. 그리고 루블과 꼬뻬익은 러시아의 화폐 단위로, 100꼬뻬익은 1루블과 같다.



<그림 4> 문제의 구성

연습문제 155에서는 최초의 문제가 (a)이고, 주어진 것과 구하는 것을 바꾼 역문제로 (b), (c), (d)가 제시되어 있다. 이 연습문제는 교수학적 단위의 확장 방법 중에서 '문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기', '잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기', '연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기'에 직접적으로 관련된다.

실제로 연습문제 154와 유사하게 연습문제 155에서 문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기와 잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기의 구현을 생각할 수 있다. 한편 문제 155에서는 그림⇄문장⇄수식의 연결성을 요구하며, 이것은 연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기에 해당된다.

156. (a) 두 어린이가 길의 양 끝으로부터 출발하여 길의 길이를 측정하였다. 두 어린이가 마주치는 순간까지, 첫 번째 어린이는 147m를 측정하였고, 다른 어린이는 30m를 적게 측정하였다. 길의 길이는 얼마인가?

두 가지 연산에 의해 문제를 해결하여라: (1) $147-\square$; (2) $\square+147$.

문제를 다음 공식에 의해 해결하여라: $\square+(\square-\square)=y$.

(b) 다음 도식에 따라 역문제를 구성하고, 이를 해결하여라.

147m; □m; 264m

길의 길이가 264m이다. 이 길을 길의 양 끝으로부터 출발하여 두 어린이가 측정하였다. 첫 번째 어린이는 147m를 측정하였다. 첫 번째 어린이는 두 번째 어린이보다 몇 미터를 더 측정하였는가?

(c) 문제 (a) 와 유사하면서 공식 $a+(a-10)=x$에 의해 해결되는 문제를 구성하여라.

이 공식을 대해, 처음에 a값을 잡아라. 그런 다음 문제의 조건을 생각하고, x값을 계산하여라. (p.53)

연습문제 156에서는 최초의 문제가 (a)이고, 주어진 것과 구하는 것을 바꾼 역문제가 (b)이며, (a)와 같은 구조를 가지면서 일반화된 공식에 따라 유사한 문제의 구성 및 풀이에 관련된 문제가 (c)이다. 특히 (c)에서는 공식 $a+(a-10)=x$에 따라 주어진 문제와 유사한 문제를 구성하는 것이 요구된다.

연습문제 156에서 문제 (a)의 확장을 자세히 분석하자. 문제 (a)의 해결과정을 수학적으로 $147+(147-30)=264$와 같이 모델링할 수 있으며, 이를 바탕으로 확장과정을 다음과 같은 도식으로 나타낼 수 있다.

문제 (b) — 역문제
문제 (a) $147+(147-30)=264$
문제 (c) — 일반화 $a+(a-10)=x$

<그림 5> 문제의 확장

한편 연습문제 156에서는 교수학적 단위의 확장 방법 중에서 '서로 연결된 연산들을 함께 그리고 동시에 학습하기', '문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기', '잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기', '수학적 지식의 복잡한 본질을 밝히고 지식들의 체계성에 도달하기', '연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기'에 직접적으로 관련된다. 특히 (a)에서 덧셈과 뺄셈을 함께 고려하도록 하였으며, '문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기', '잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기', '연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기'는 문제 155와 유사하게 생각할 수 있다.

연습문제 156과 유사한 구조를 가진 연습문제가 다음 157번 문제로 제시되어 있다.

157. (a) 농장에서 감자를 456루블, 채소는 감자보다 289루블 더 받고 상인에게 팔았다. 농장은 이들 식

료품을 모두 얼마치 팔았는가?

다음 개별적인 연산에 의해 문제를 해결하여라: (1) $456+\square=\triangle$; (2) $456+\triangle$.

문제를 다음 공식에 의해 해결하여라: $\square+(\square+289)=y$.

(b) 다음 도식에 따라 역문제를 구성하고, 이를 해결하여라.

456루블; □; 1201루블

감자를 채소보다 몇 루블만큼 덜 팔았는가?

(c) 문제 (a) 와 유사하면서 공식 $x+(x+20)=b$ 에 의해 해결되는 문제를 구성하여라.

이 공식을 대해, 처음에 x값을 잡아라. 그런 다음 문제의 조건을 생각하고, b값을 계산하여라. (p.54)

문제 156과 157에서서는 문제상황이 문제 (a)로 주어지고, 이로부터 방정식을 유도하였다. 그런 다음 (a)와 같은 구조를 가지면서 일반화된 등식 $a+(a-10)=x$ 또는 $x+(x+20)=b$에 따라 문제를 구성하도록 요구하였다. 그 다음에 오는 문제 158과 159는 처음에 방정식이 주어지고, 이에 상응하는 문제상황을 구성하도록 요구하고 있다. 그리고 구성된 문제에 대한 역문제를 구성하여, 교수학적 단위를 확장하도록 하였다.

158. (a) 다음 공식에 따라 문제를 구성하고 해결하여라.

$1389+(1389-140)=x$

주어진 문제의 조건에는 “140만큼 작게...”라는 표현이 들어가야 한다.

(b) 다음 도식에 따라 역문제를 구성하고, 이를 해결하여라.

1389; 1249; □ (p.54)

159. (a) 다음 공식에 따라 문제를 구성하고 해결하여라.

$5290+(5290+4180)=x$

주어진 문제의 조건에는 “1400만큼 크게...”라는 표현이 들어가야 한다.

(b) 다음 도식에 따라 역문제를 구성하고, 이를 해결하여라.

5290; 14760; □ (p.54)

문제 158과 159의 차이는 주어진 방정식 $1389+(1389-140)=x$의 괄호 안에는 뺄셈이, 방정식 $5290+(5290+4180)=x$의 괄호 안에는 덧셈이 있다는 것이다. 이것은 교수학적 단위의 확장 방법 중에서 ‘서로 연결된 연산들을 함께 그리고 동시에 학습하기’에 밀접하게 관련된다.

160. (a) 농장 정원에 사과나무 328그루를 심었고, 벚꽃나무를 사과나무보다 410그루 더 심었다. 그리고 배나무를 벚꽃나무보다 93그루 적게 심었다. 정원에 배나무를 몇 그루 심었는가?

(b) 다음 도식에 따라 역문제를 구성하고, 이를 해결하여라(수들을 오른쪽으로부터 왼쪽으로 읽어라).

□; 410; 93; 645

문제의 조건에는 “93만큼 많이”, “410만큼 적게”라는 표현이 들어가야 한다.

사과나무를 몇 그루 심었는가?

(c) 비행기 “Yakovlev-40”에는 27명의 승객이 탈 수 있는데, 비행기 “Antonov-24”의 탑승 인원보다 23명이 작다. 두 비행기 “Yakovlev-40”과 “Antonov-24”에는 모두 몇 명의 승객이 탈 수 있는가? (p.54)

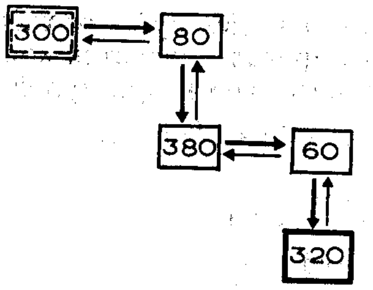
문제 156, 157과 문제 160의 차이를 살펴보자. 문제 156, 157의 (a)에서는 문제상황의 해결을 위한 방정식의 틀이 문제에서 주어졌지만, 문제 160의 (a)에서는 주어지지 않았다. 즉 문제 160의 (a)에서 학습자는 자신의 힘으로 문제상황에서 식을 만들어 정답을 구해야 한다.

한편 문제 156, 157의 (c)에서는 (a)의 해결과 같은 구조를 가지며 일반화한 등식이 주어지고 이에 상응하는 문제상황의 구성을 요구하였다. 그러나 문제 160의 (c)에서는 (a)의 문제해결과 유사하지만 같지 않은 구조를 가지는 문제를 제시하고, 이를 해결하도록 요구하였다. 즉 문제 160의 (a)는 식 $(389+410)-93$에 의해 해결되지만, (c)는 식 $27+(27+23)$에 의해 해결된다. 이것은 교수학적 단위의 확장 방법 중에서 ‘서로 연결된 연산들을 함께 그리고 동시에 학습하기’에 밀접하게 관련된다.

161. (a) 월요일에는 화물차가 300㎞를 달렸고, 화요일에는 월요일보다 80㎞를 더 달렸다. 수요일에는

화물차가 화요일보다 60㎞를 적게 달렸다. 화물차는 수요일에 몇 ㎞를 달렸는가?

다음 <그림 6>을 이용하여 문제해결을 설명하여라 (굵은 화살표의 방향을 따라 이동하면서).



<그림 6> 문제해결 과정

(b) <그림 6>의 얇은 화살표의 방향을 따라 생각하면서, 역문제를 구성하고 해결하여라.

문제의 조건에 수 320, 60, 80을 사용하여라.

(c) 문제 (a)와 정답을 읽어라.

다음 물음에 답하여라.

화물차는 3일 동안 몇 ㎞를 달렸는가?

화물차가 처음 이틀 동안 달린 거리는 셋째 날에 달린 거리보다 몇 ㎞가 많은가?

화물차가 첫째 날에 달린 거리는 후의 이틀, 즉 화요일과 수요일에 달린 거리보다 몇 ㎞가 적은가? (pp. 54-55)

문제 161의 해결과정을 그림과 연결시켜 '연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기'에 관련시킨 것은 문제 155와 유사하다. 그러나 문제 155의 (a)에서는 식 $(3\times60)+327$을 이용하여 문제를 해결하였다면, 문제 161의 (a)에서는 식 $(300+80)-60$을 이용하여 문제를 해결하였다. 그리고 문제 161의 (c)에서는 '처음 문제와 공통인 몇몇 요소들에 의한 문제'들을 해결하도록 요구되었는데, 이들 문제의 구조는 문제 (a)와는 전혀 다른 것들이다. 이러한 방법에 의한 문제 (a)의 확장은 교수학적 단위의 확장 방법 중에서 '처음 과제와 변형된 과제의 대립을 위한 조건이 되는 연습문제의 구조를 변환(순환)시키기'에 밀접하게 관련된다.

V. 결 론

본 연구에서는 다양한 문헌의 분석을 통해 교수학적 단위의 개념을 규정하고, Erdniev의 연구들을 분석하여 교수학적 단위를 확장하는 구체적인 방법들을 제시하였다. 그리고 Erdniev의 수학교과서를 분석하여, 교수학적 단위의 확장 개념이 수학교과서에 어떻게 구현되었는가를 조사하였다.

연구의 목적을 달성하기 위해, 교수학적 단위 및 확장 이론에 대한 문헌 연구와 확장된 교수학적 단위에 관련된 수학교과서 분석 연구를 병행하였다. 교수학적 단위 및 확장 이론에 대한 문헌 연구에서는 '교수학적 단위'의 개념에 관련하여, 사전적 의미로의 교수학적 단위, 교육학 연구에서 실제 활용되는 교수학적 또는 교수학적 단위의 개념을 분석하였다. 그리고 교수학적 단위의 확장에 대해서는, 이 개념을 수학교육학 연구에 처음으로 도입한 Erdniev의 연구들을 중심으로 문헌연구를 수행하였다.

확장된 교수학적 단위에 관련된 수학교과서 분석 연구에서는 Erdniev의 초등학교 3학년 수학교과서의 소단원 '두 연산이 포함된 문제'에 포함된 교과내용을 교수학적 단위의 확장 방법, 확장된 연습문제의 형태, 구조를 분석하였다.

교수학적 단위는 교과목의 교수-학습에서 하나 또는 몇몇 개의 프레임으로 구성되며, 학습 대상의 특성들을 보유하고 있는 논리적으로 독립된 학습 자료, 정보의 일부분이라고 규정할 수 있다. Erdniev는 수학교육학에서 교수학적 단위의 확장 방법으로 서로 연결된 연산들, 조작들, 함수들, 정리들을 함께 그리고 동시에 학습하기, 문제의 구성과 해결 과정의 통일성을 보장하기, 잘 정의된 과제들과 잘 정의되지 않은 과제들의 상호 교류를 생각하기, 처음 과제와 변형된 과제의 대립을 위한 조건이 되는 연습문제의 구조를 변환(순환)시키기, 수학적 지식의 복잡한 본질을 밝히고 지식들의 체계성에 도달하기, 연습문제들의 체계에서 보완성의 원리를 구현하기 등을 이용하였다. 본 연구에서는 Erdniev의 연구들을 중심으로, 이들 방법의 특징, 의미를 분석하였다.

Erdniev는 교수학적 단위의 확장을 바탕으로 수학 교수-학습을 연습문제를 중심으로 구성하였고, 연습문

제의 형태는 다원요소 과제이어야 함을 강조하였다. 다원요소 과제는 일반적인 준비된 문제의 풀이, 역문제의 구성과 풀이, 주어진 공식(방정식)에 따라 유사한 문제의 구성과 풀이, 처음 문제와 공통인 몇몇 요소들에 의한 문제의 구성, 몇몇 변인들에 의해 처음 문제를 일반화한 문제의 구성 또는 풀이 등의 하위 문제를 포함한다. 특히 이들 다원요소 과제의 교수-학습에서는 하위 문제들이 단위 수업시간에 모두 다루어지는 것이 바람직하다.

Erdniev의 교수학적 확장에 근거한 수학 교수-학습 방법, 수학교과서의 구성은 학생들의 개인차와 관련하여 다양한 논의와 정교화된 후속 연구가 필요하다. 예를 들어 Erdniev는 확장된 연습문제의 하위 문제로 '역문제의 구성과 풀이'를 강조하였다. 그러나 Krutetskii(1968, p.319)는 '수학에 약한 학생들은 역문제가 처음 문제의 바로 뒤에 제시되는 경우보다, 역문제가 처음 문제와 독립적으로 관계없이 주어지는 경우에 훨씬 성공적이고 자신있게 해결하였다'고 하였다. 즉 수학에 재능있거나 잘 하는 학생들에게 교수학적 단위의 확장 개념에 근거한 교수-학습 방법은 Erdniev(1995a, 1996)의 주장처럼 학습 시간을 단축시켜 주며, 창의적 수학활동으로 이끌 가능성이 있다. 그러나 수학에 약한 학생들에게는 어떤 결과가 있을 것인가에 대해서는 수준별 교육과 관련하여 진지한 논의가 필요할 것이다.

본 연구의 결과를 통해, 교수학적 단위의 확장에 관련된 구체적인 방법들이 우리나라의 수학교육학 연구에 활용될 수 있을 것으로 기대되며, 교수학적 단위의 확장 개념이 구현된 수학교과서의 분석 결과는 수학 교수-학습 방법의 새로운 접근 가능성을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김응태 · 박한식 · 우정호 (2004). 수학교육학개론. 서울: 서울대출판부.

남영신 (2003). 국어대사전. 서울: 성안당.

손용규 (1982). 학교수학용어사전. 서울: 형설출판사.

우정호 외 (2006). 수학교육학 연구방법론. 서울: 경문사.

한인기 (2005). 수학교사를 위한 보조자료인 러시아의 '교수학적 자료'에 대한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 19(2), 345-362.

AST-Tsentr (2010). Slovar terminov i opredelenii. 2010년 4월23일 검색. http://www.ast-centre.ru/books/dictionary/240/.

Bim-bad (2002). *Pedagogicheskii entsiklopedicheskii slovar*, Moskva: Bolshaya Possiiskya Entsiklopediya.

Brown S. I., & Walter M. I. (1990). *The art of problem posing*, New Jwesey: LEA.

Davydov V. V. (2000). *Vidy obobsheniya v obuchenii*, Moskva: POR.

Erdniev P. M. (1965). *Metodika upraznenii po arifmetike i algebre*, Moskva: Prosveshenie.

Erdniev P. M. (1993). *Matematika 5-6*, Moskva: Prosveshenie.

Erdniev P. M. (1995a). *Obuchenie matematike v nachalnyh klassah*, Moskva: Stoletie.

Erdniev P. M. (1995b). *Matematika 3*, Moskva: Russkoe Slovo.

Erdniev P. M. (1996). *Obuchenie matematike v shkole*, Moskva: Stoletie.

Freudenthal H. (2008). 프로이덴탈의 수학교육론(우정호 외 번역). 서울: 경문사.(원저 1991년 출판).

IPCUB (2010). Metodicheskie materialy dlya studentov 2 kursa IPCUB. 2010년 4월23일 검색. http://vvmi.udsu.ru/~kiv/pages/php?id=ipsub.

Krutetskii V. A. (1968). *Psihologiya matematicheskih sposobnostei shkolnikov*, Moskva: Prosveshenie.

Selevko G. K. (2006). Sovremennye oburazovatelnye tehnologii, 2010년 4월23일 검색. http://docs.google.com/View?id=dhjwzhtd_29gq84b9dn.

Shevchenko V. L. (2008). Verbalnoe i neverbalnoe modelirovanie informatsionnoi obuchayushei sredy i ee algoritmicheskoe postroenie. 2010년 4월 23일 검색. http://www.itdev.org.ua/userfiles/VLShevchenko.pdf.

A Study on the Erdniev's Expansion of Didactical Unit and Expanded Didactical Unit in a His Mathematics Textbook of Elementary School

Han, Inki
Dept. of Math. Edu., Gyeongsang National University, 660-701
E-mail : inkiski@gnu.kr

In this paper we analyze a concept 'didactical unit', and some concrete methods of expanding didactical unit studied by P.M.Erdniev. Erdniev studied the concept for a long time, wrote mathematics textbooks from 1st grade to 9th grade. In these textbooks he tried to embody his ideas related with expanded didactical unit. We analyze Erdniev's mathematics textbook of 3rd grade.
4)

* ZDM Classification : D82
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Didactical unit, Expanded didactical unit, Mathematics textbook