

# 선재 요소를 이용한 막 구조물의 형상해석에 관한 연구

## A Study on the Shape Analysis of Membrane Structures Using Line Elements

김 승 덕\*  
Kim, Seung-Deog

이 신 우\*\*  
Lee, Shin-Woo

### 요 약

막 구조물의 비선형 문제는 많은 연구자들에 의해 연구가 있었고 현재 또한 많은 연구가 이루어지고 있다. 막 구조물은 해석방법에 따라 그 수렴성이 민감하게 반응하기 때문이다. 이러한 비선형 문제는 매우 복잡하고 정교한 연구가 수반되어야 하며 고도의 기술을 필요로 하기 때문에 해석방법에 대한 접근이 초기형상결정단계부터 어려운 실정이다. 따라서 본 논문에서는 해석할 때에 발생하는 해의 발산과 면재의 쓸림 현상에 대한 해결책으로 막 구조물 설계 시에 많이 사용되는 삼각형 평면요소에 대해서 선재로 치환하여 해석하는 방법을 제안하고, 카테나리 예제를 대상으로 해석을 수행하여 해의 수렴성 및 신뢰도를 고찰한다.

### Abstract

Nonlinear problems for membrane structures are very sensitive in convergence procedure in nonlinear iterations. Therefore many researchers have suggested a lot of ideas in published papers.

In this study, authors are trying to get easier solution for taking membrane shape by initial stresses from substitution of the membrane to line elements. To obtain nonlinear stiffness, the nonlinear finite element method is used for both membrane and cable elements, and only geometric nonlinear terms are taken for shape analysis. By some examined models, we can find that the substituted models show better results to get initial shape in which the concentrating phenomenon is removed at edge parts.

키워드 : 막구조물, 기하학적 비선형, 형상해석, 선재치환

Keywords : Membrane Structures, Geometric Nonlinearity, Shape Analysis, Line element Substitution

## 1. 서론

막 구조물은 축강성은 강하고 휨강성이 매우 작은 재료를 주 구조재로 사용하므로 초기강성에 매우 민감한 구조체이다. 이에 따른 초기형상을 결정하는 문제는 연성구조물 구조설계에 있어서 매우 중요하다. 또 막체 제작을 위해 곡면을 평면에서 재현하는 재단도 작성과 시공시 장력도입에 따른 응력 및 현상변화를 파악하는 것도 성공적인 시공을 위해서는 중요하다. 때문에 막 구조물의 초기 형상의 결정 문제를 다루기 위해서는 구조물의 대변형 이론에 의한 거동의 특성을 고려해야 하며, 중

국적으로는 비선형 문제에 귀착하게 된다.

막 구조물의 형상탐색 문제는 컴퓨터의 급속한 발전에 따라 수치해석법에 크게 의존하게 되었고, 1971년 Eberhard와 Graham<sup>[2]</sup>은 Newton-Raphson 법을 이용하여 대변형을 받는 막구조의 정적해석을 수행하였으며, 1972년 Argyris와 Dieter<sup>[3]</sup>는 뮌헨 올림픽 경기장의 해석에 Newton법을 이용하여 케이블 네트워크의 대변형 해석을 수행하였다.

그 후 막 구조의 초기형상해석에 관하여 Haug 및 Powell은 곡면 사각형 막요소를 사용하여 형상해석 방법을 정식화하고 Newton-Raphson법에 의해 비선형해를 구했다.<sup>[4]</sup> 그리고 초기평형상태 완성 후 막응력을 기지변수로 하고 곡면형상의 절점좌표 값을 미지변수로 하여 변형후의 평형조건으로부터 유한요소법에 의해 형상을 결정하는 정식화가 Haber, Ishii등에 의해 많이 제

\* 정희원 · 세명대학교 건축공학과 부교수, 공학박사

Tel: 043-649-1326 Fax:043-649-1326

E-mail : seungdeog@yahoo.ca

\*\* 정희원 · 세명대학교 건축공학과 공학석사

안되고 있다.<sup>[5]</sup>

국내에서는 90년대 중반 권택진, 김승덕<sup>[8,9,10]</sup> 등에 의해 케이블-네트 구조물의 형상해석 및 응력-변형해석을 위해 보다 일반화된 비선형 케이블 요소를 제안하고, 수렴성을 향상시키기 위해 형상해석 과정과 응력-변형해석 과정에 서로 다른 비선형 해석기법을 이용하였다.

그러나, 이와 같이 유한요소법을 이용한 형상해석은 초기응력에 의한 평형형상을 구하는 문제로 구조물의 형태와 모델링되는 유한요소의 종류 및 분할방법 등에 따라 해의 수렴성과 정밀도는 많은 차이를 보이며, 발산되는 경우도 많다. 또한 면재로 해석할 때에 요소들이 한 쪽으로 밀리는 쏠림 현상이 야기되기도 한다. 특히 곡률의 변화가 심한 실제 막 구조물을 해석할 때에는 막 내부의 주름발생 때문에 쏠림 현상이 두드러져서 매끄러운 곡면에서 벗어나는 부분 불안정 현상이 생기고, 이로 인해 수렴성이 현저히 떨어지게 된다.<sup>[11]</sup>

따라서 본 논문에서는 해석할 때에 발생하는 해의 발산과 면재의 쏠림 현상에 대한 해결책으로 막 구조물 설계 시에 많이 사용되는 삼각형 평면요소에 대해서 선재로 치환하여 해석하는 방법을 제안하고, 카테나리 예제를 대상으로 해석을 수행하여 해의 수렴성 및 신뢰도를 고찰한다.

## 2. 비선형 유한요소의 정식화

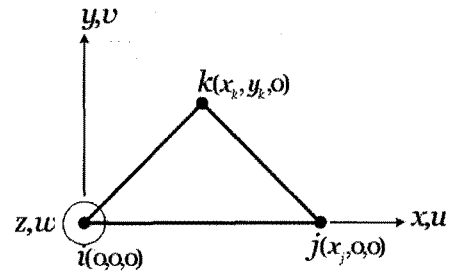
### 2.1 비선형 Membrane요소의 정식화

유한요소법을 이용하여 면내회전강성이 없는 얇은 판의 평면응력문제를 해석하기 위해서 일정변형률요소(CST)인 3절점 삼각형 Membrane요소를 기하학적 비선형성을 고려하여 정식화 한다. 선형변형률요소(LST)에 비하여 비교적 단순한 형상함수로 유도된 방정식은 요소 모델링을 더 세분함으로써 근사해의 정밀도를 높일 수 있다.

#### 2.1.1 형상함수

기하학적 비선형을 고려한 삼각형 막요소의 비선형 강성행렬을 유도하기 위해 삼각형 평면 막요소를 그림 1에

서와 같이 요소좌표계  $x, y, z$ , 요소내 변위  $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$  로 정의한다.



요소좌표계 :  $x, y, z$

요소내변위 :  $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$

〈그림 1〉 막요소의 요소좌표계

요소좌표계에서의 절점변위 및 절점하중은 식(1), (2)와 같다.

$$\{d_x\} = \begin{pmatrix} d_{x_i} \\ d_{x_j} \\ d_{x_k} \end{pmatrix}, \{d_y\} = \begin{pmatrix} d_{y_i} \\ d_{y_j} \\ d_{y_k} \end{pmatrix}, \{d_z\} = \begin{pmatrix} d_{z_i} \\ d_{z_j} \\ d_{z_k} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\{f_x\} = \begin{pmatrix} f_{x_i} \\ f_{x_j} \\ f_{x_k} \end{pmatrix}, \{f_y\} = \begin{pmatrix} f_{y_i} \\ f_{y_j} \\ f_{y_k} \end{pmatrix}, \{f_z\} = \begin{pmatrix} f_{z_i} \\ f_{z_j} \\ f_{z_k} \end{pmatrix} \quad (2)$$

요소내 변위  $u, v, w$ 를  $x, y$ 의 1차 근사식으로 식(3)과 같이 가정한다.

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3)$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

$$w(x, y) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y$$

계수  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 를  $x, y$ 를 식(1)의 절점 좌표로 표현하면 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$d_{x_i} = u(0, 0) = \alpha \quad (4)$$

$$d_{x_j} = u(x_j, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j$$

$$d_{x_k} = u(x_k, y_k) = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$$

식(4)를 행렬로 나타내면 식(5)와 같다.

$$\begin{pmatrix} d_{x_i} \\ d_{x_j} \\ d_{x_k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & 0 \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

식(5)를 간단하게 표현하면 식(6)과 같다.

$$\{d_x\} = [\Phi] \{\alpha\} \quad (6)$$

같은 방법으로  $\{d_y\}$ ,  $\{d_z\}$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\{d_y\} = [\Phi] \{\beta\} \quad (7)$$

$$\{d_z\} = [\Phi] \{\gamma\} \quad (8)$$

$|\Phi|$ 를 구하면,  $|\Phi| = x_j y_k$ 가 되고, 삼각형  $i j k$ 의 면적( $A_m$ )의 2배가 되는 것을 알 수 있다. 즉,

$$|\Phi| = 2A_m = x_j y_k \quad (9)$$

$|\Phi|$ 의 역행렬을 Cramer 공식을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x_j} & \frac{1}{x_j} & 0 \\ \frac{x_k - x_j}{x_j y_k} & -\frac{x_k}{x_j y_k} & \frac{x_j}{x_j y_k} \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)을 다음과 같이 치환한다.

$$[\Phi]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서,

$$a_1 = 1 \quad (12)$$

$$b_1 = -\frac{1}{x_j}, \quad b_2 = \frac{1}{x_j}$$

$$c_1 = \frac{x_k - x_j}{x_j y_k}, \quad c_2 = -\frac{x_k}{x_j y_k}, \quad c_3 = \frac{x_j}{x_j y_k}$$

식(6), (7), (8)로부터 계수  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\{a\} = [\Phi]^{-1} \{d_x\} \quad (13)$$

$$\{b\} = [\Phi]^{-1} \{d_y\} \quad (14)$$

$$\{c\} = [\Phi]^{-1} \{d_z\} \quad (15)$$

위 식을 식(3)에 대입하면 식(16)을 얻을 수 있다.

$$u(x,y) = a_1 \cdot d_{x_i} + (b_1 d_{x_i} + b_2 d_{x_j}) \cdot x + (c_1 d_{x_i} + c_2 d_{x_j} + c_3 d_{x_k}) \cdot y \quad (16)$$

$$v(x,y) = a_1 \cdot d_{y_i} + (b_1 d_{y_i} + b_2 d_{y_j}) \cdot x + (c_1 d_{y_i} + c_2 d_{y_j} + c_3 d_{y_k}) \cdot y$$

$$w(x,y) = a_1 \cdot d_{z_i} + (b_1 d_{z_i} + b_2 d_{z_j}) \cdot x + (c_1 d_{z_i} + c_2 d_{z_j} + c_3 d_{z_k}) \cdot y$$

### 2.1.2 변형도-변위 관계식

변형도-변위 관계식을 다음과 같이 비선형 항을 포함한 식으로 채택한다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}$$

그리고 식(16)을 식(17)에 대입하여 절점변위로 표현하면,

$$\epsilon_x = b_1 d_{x_i} + b_2 d_{x_j} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & (b_1 d_{x_i} + b_2 d_{x_j})^2 \\ & + (b_1 d_{y_i} + b_2 d_{y_j})^2 \\ & + (b_1 d_{z_i} + b_2 d_{z_j})^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\epsilon_y = c_1 d_{y_i} + c_2 d_{y_j} + c_3 d_{y_k} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & (c_1 d_{x_i} + c_2 d_{x_j} + c_3 d_{x_k})^2 \\ & + (c_1 d_{y_i} + c_2 d_{y_j} + c_3 d_{y_k})^2 \\ & + (c_1 d_{z_i} + c_2 d_{z_j} + c_3 d_{z_k})^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\gamma_{xy} = \epsilon_y = (b_1 d_{y_i} + b_2 d_{y_j}) + (c_1 d_{x_i} + c_2 d_{x_j} + c_3 d_{x_k}) \quad (18)$$

$$+ \begin{cases} (b_1 d_{x_i} + b_2 d_{x_j}) \cdot (c_1 d_{x_i} + c_2 d_{x_j} + c_3 d_{x_k}) \\ + (b_1 d_{y_i} + b_2 d_{y_j}) \cdot (c_1 d_{y_i} + c_2 d_{y_j} + c_3 d_{y_k}) \\ + (b_1 d_{z_i} + b_2 d_{z_j}) \cdot (c_1 d_{z_i} + c_2 d_{z_j} + c_3 d_{z_k}) \end{cases}$$

식(18)을 매트릭스로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} d^T B^T B d \\ \frac{1}{2} d^T C^T C d \\ d^T B^T C d \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서,

$$[A] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_1 & b_1 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \end{Bmatrix}, \{d_j\} = \begin{Bmatrix} d_{xj} \\ d_{yj} \\ d_{zj} \end{Bmatrix}, \{d_k\} = \begin{Bmatrix} d_{xk} \\ d_{yk} \\ d_{zk} \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

위 식을 간략히 표현하면,

$$\{\epsilon\} = [A]\{d\} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}d^T B^T B d \\ \frac{1}{2}d^T C^T C d \\ d^T B^T C d \end{Bmatrix} \quad (21)$$

여기서,

$$[A] \equiv \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}, \{d\} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix} \quad (22)$$

위 식의  $A_1, A_2, A_3$  는  $[A]$ 의 각 행벡터이다.

### 2.1.3 응력도-변형도 관계식

증분 구간에서의 응력도-변형도 관계식을 다음과 같이 평면 응력에 관한 식으로 채택한다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E_m}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

간단히 나타내면,

$$\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\} \quad (24)$$

### 2.1.4 가상일의 원리를 이용한 평형방정식

현재의 상태를 초기상태로 가정하고, 현 상태에서의 증분에 관한 가상일을 고려하면 다음과 같은 가상일의 방정식을 구할 수 있다.

$$\iiint_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)\delta\epsilon_x + (\sigma_y^{(0)} + \sigma_y)\delta\epsilon_y + (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy})\delta\gamma_{xy}] dV = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (25)$$

여기서,  $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$  는 초기응력이고,  $f^{(0)}$  와 평형상태를 이루고 있다. 식 (21)로부터  $\delta\epsilon_x, \delta\epsilon_y, \delta\gamma_{xy}$  를 구하면,

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_x &= [A_1]\delta d + [d^T B^T B]\delta d \\ \delta\epsilon_y &= [A_2]\delta d + [d^T C^T C]\delta d \\ \delta\gamma_{xy} &= [A_3]\delta d + d^T [C^T C + B^T C]\delta d \end{aligned} \quad (26)$$

식(26)을 식(25)에 대입하여 정리하면,

$$\begin{aligned} A_m h_m [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)([A_1] + [d^T B^T B]) \\ + (\sigma_y^{(0)} + \sigma_y)([A_2] + [d^T C^T C]) \\ + (\tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy})([A_3] + d^T [C^T B + B^T C])] \\ = (f^{(0)} + f)^T \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,  $A_m, h_m$ 은 각각 막요소의 단면적과 막요소의 두께를 나타내며, 식 (24)를 식(21)에 대입하고, 그 결과를 다시 식(27)에 대입하여  $d$ 의 고차항을 생략하면 식 (28)과 같다.

$$\begin{aligned} f^{(0)} + f &= A_m h_m (A^T \sigma^{(0)}) \\ &+ A_m h_m [\sigma_x^{(0)} B^T B + \sigma_y^{(0)} C^T C + \tau_{xy}^{(0)} (B^T C + C^T B)] d \\ &+ A_m h_m [A^T E A] d \end{aligned} \quad (28)$$

여기서,

$$\{\sigma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(0)} \\ \sigma_y^{(0)} \\ \tau_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

고차항의 생략, 수치해석의 오차 등으로 인하여 불평형력(residual force)이 발생한다. 이러한 불평형력  $r$ 을 식(28)의 오른쪽 제1항으로부터 다음과 같이 정의한다.

$$r = A_m h_m \cdot A^T \sigma^{(0)} - f^{(0)} \quad (30)$$

위 식을 이용하여 식(28)의 증분방정식을 구하면 다음과 같이 된다.

$$f - r = [k_E + k_G] d \quad (31)$$

여기서,

$$k_E = A_m h_m [A^T E A] : \text{요소의 탄성강성행렬} \quad (32)$$

$$k_G = A_m h_m \left[ \sigma_x^{(0)} B^T B + \sigma_y^{(0)} C^T C + \tau_{xy}^{(0)} (B^T C + C^T B) \right] : \text{요소의 기하강성행렬} \quad (33)$$

좌표변환 행렬  $T$ 를 이용하여 전체좌표계에서 증분방정식을 나타내면 다음과 같이 된다.

$$F - R = [K_E + K_G] D \quad (34)$$

$$K_E = T^T k_E T : \text{전체좌표계에서의 탄성강성행렬}$$

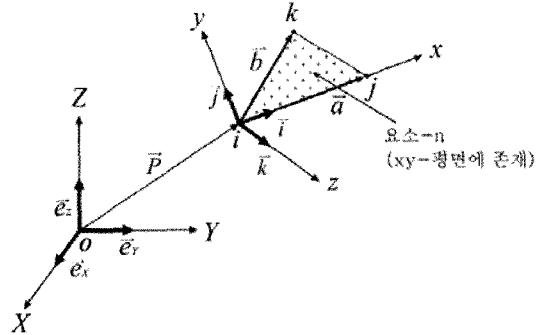
$$K_G = T^T k_G T : \text{전체좌표계에서의 기하강성행렬}$$

### 2.1.5 좌표변환 및 전체 강성방정식

전체좌표계를  $X, Y, Z$  요소좌표계를  $x, y, z$ 라하고, 전체좌표계에서의 절점  $i, j, k$ 의 절점좌표를 다음과 같이 나타낸다.

$$X_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix} \quad X_j = \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{Bmatrix} \quad X_k = \begin{Bmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{Bmatrix} \quad (35)$$

삼각형 막요소에 대한 전체좌표계와 요소좌표계는 그림 2와 같다.



(그림 2). 막요소의 전체좌표계 및 요소좌표계

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  벡터를  $a, b$  로하고, 식(35)를 이용하면,

$$a = X_j - X_i, \quad b = X_k - X_i \quad (36)$$

위 식을 이용하면,  $i, j, k$ 는 다음과 같다.

$$i = \frac{a}{|a|}, \quad k = \frac{a \times b}{|a \times b|}, \quad j = k \times i \quad (37)$$

식(36)을 이용하여,  $a, b, a \times b$  벡터를 다음과 같이 계산해 둔다.

$$a = (X_j - X_i)e_x + (Y_j - Y_i)e_y + (Z_j - Z_i)e_z \quad (38)$$

$$b = (X_k - X_i)e_x + (Y_k - Y_i)e_y + (Z_k - Z_i)e_z \quad (39)$$

$$a \times b = \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \\ X_j - X_i & Y_j - Y_i & Z_j - Z_i \\ X_k - X_i & Y_k - Y_i & Z_k - Z_i \end{bmatrix} = \Delta_x e_x + \Delta_y e_y + \Delta_z e_z \quad (40)$$

여기서,

$$\Delta_x = (Y_j - Y_i)(Z_k - Z_i) - (Y_k - Y_i)(Z_j - Z_i) \quad (41)$$

$$\Delta_y = (Z_j - Z_i)(X_k - X_i) - (Z_k - Z_i)(X_j - X_i)$$

$$\Delta_z = (X_j - X_i)(Y_k - Y_i) - (X_k - X_i)(Y_j - Y_i)$$

계산을 간단히 표현하기 위해, 다음과 같은 기호를 도입한다.

$$l_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (42)$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2}$$

식(38), (39), (40), (42)를 이용하면, 식(36)은 다음과 같이 유도된다.

$$i = \frac{1}{l_{ij}}(X_j - X_i) = \lambda_x e_x + \lambda_y e_y + \lambda_z e_z \quad (43)$$

$$k = \frac{1}{\Delta}(a \times b) = u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z \quad (44)$$

$$j = k \times i = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z \quad (45)$$

위 식을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} X_j \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad (46)$$

여기서,

$$\lambda_x = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}}, \lambda_y = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}, \lambda_z = \frac{Z_j - Z_i}{l_{ij}}$$

$$v_x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, v_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, v_z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

$$u_x = \lambda_z v_y - \lambda_y v_z$$

$$u_y = \lambda_x v_z - \lambda_z v_x$$

$$u_z = \lambda_y v_x - \lambda_x v_y \quad (47)$$

간략히 표현하면,

$$\{\bar{i}\} = [T_n] \{\bar{e}\} \quad (48)$$

역관계를 구하면 다음과 같다.

$$\{\bar{e}\} = [T_n]^T \{\bar{i}\} \quad (49)$$

전체 좌표계에서의 절점력, 불평형력, 절점변위는 다음과 같이 나타낸다.

$$F = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{Bmatrix}, F_{i(j \text{ or } k)} = \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix}_{i(j \text{ or } k)} \quad (50)$$

$$R = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{Bmatrix}, R_{i(j \text{ or } k)} = \begin{Bmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_Z \end{Bmatrix}_{i(j \text{ or } k)} \quad (51)$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \\ D_k \end{Bmatrix}, D_{i(j \text{ or } k)} = \begin{Bmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{Bmatrix}_{i(j \text{ or } k)} \quad (52)$$

식(48)을 이용하면,

$$f = TF, r = TR, d = TD \quad (53)$$

여기서,

$$T = \begin{bmatrix} T_n & 0 & 0 \\ 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & T_n \end{bmatrix} \quad (54)$$

T행렬이 막구조의 변환 행렬이다. 식(53)을 식(31)에 대입하면,

$$T(F - R) = [k_E + k_G] TD \quad (55)$$

양변에  $T^T$ 을 곱하고,  $T^T = I$ 관계를 이용하면,

$$\begin{aligned} F-R &= T^T[k_E+k_G]TD \\ &= [K_E+K_G]D \end{aligned} \quad (56)$$

여기서,

$$K_E = T^T k_E T \quad (57)$$

$$K_G = T^T k_G T$$

이상으로 전체좌표계에서의 증분 구간에 관한 강성 행렬이 구해졌다. 다음은 요소좌표계에서의 절점좌표를 구해본다. 즉,  $x_i, x_j, x_k$ 를  $X_i, X_j, X_k$ 로 표현한다. 원점 0과 절점  $i$ 를 연결하는 위치벡터를  $P$ 라고 하면,  $P$ 는 식(58)과 같다.

$$P = X_i e_X + Y_i e_Y + Z_i e_Z \equiv X_i \quad (58)$$

따라서 절점  $j$ , 절점  $k$ 에 관한 벡터는 다음과 같다.

$$X_j = P + x_j i \quad (59)$$

$$X_k = P + x_k i + y_k j$$

즉,

$$(X_j - X_i, Y_j - Y_i, Z_j - Z_i) \begin{Bmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{Bmatrix} = (x_j, 0, 0) \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (60)$$

$$(X_k - X_i, Y_k - Y_i, Z_k - Z_i) \begin{Bmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{Bmatrix} = (x_k, y_k, 0) \begin{Bmatrix} i \\ j \\ k \end{Bmatrix} \quad (61)$$

위 식에 식(49)를 대입하면 다음과 같다.

$$(X_j - X_i)^T T_n^T = (x_j, 0, 0) \quad (62)$$

$$(X_k - X_i)^T T_n^T = (x_k, y_k, 0) \quad (63)$$

이상으로 요소좌표계에서의 절점좌표  $x_j, x_k, y_k$ 가 구해졌다.

## 2.2 비선형 Cable 요소의 정식화

Cable 요소로 구성된 공간 구조물의 기하학적 비선형성을 고려한 해석을 위해 본 절에서는 2절점 3자유도를 갖는 Cable 요소의 접선강성 행렬을 유도한다.

### 2.2.1 Cable 요소의 좌표계와 변위함수

Cable 요소의 요소 좌표계 및 전체 좌표계를 그림 3과 같이 정의한다.

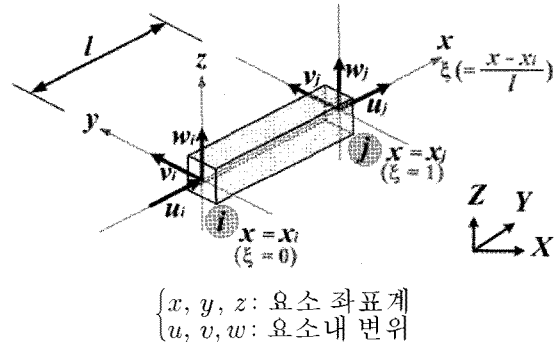


그림 3. Cable 요소의 절점자유도와 좌표계

요소 좌표계에서 절점의 변위 및 하중은 각각 식(64), (65)와 같이 선택한다.

$$d = \begin{Bmatrix} d_i \\ \dots \\ d_j \end{Bmatrix} = [u_i v_i w_i : u_j v_j w_j]^T \quad (64)$$

$$f = \begin{Bmatrix} f_i \\ \dots \\ f_j \end{Bmatrix} = [f_{x_i} f_{y_i} f_{z_i} : f_{x_j} f_{y_j} f_{z_j}]^T \quad (65)$$

한 요소가 갖는 절점을 2개로 두고 요소 내 변위를 식(66)과 같이  $x$ 에 관한 1차식으로 가정한다.

$$u(x) = N_i u_i + N_j u_j \quad (66)$$

$$v(x) = N_i v_i + N_j v_j$$

$$w(x) = N_i w_i + N_j w_j$$

식(66)에서 형상함수인  $N_i$ 와  $N_j$ 는 Lagrangian 보간 함수로 식(67)과 같이 나타낸다.

$$N_i = 1 - \xi, N_j = \xi, \xi = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (67)$$

### 2.2.2 변위-변형도 관계식

요소의 변위-변형도 관계식을 기하학적 비선형을 나타내는 2차항까지를 포함한 식(68)로 채택한다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (68)$$

식(66)을 식(68)에 대입하고 변형도를 절점변위로 표현하면 식(69)와 같다.

$$\epsilon_x = N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j + \frac{1}{2} \left\{ (N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j)^2 + (N_{i,x} v_i + N_{j,x} v_j)^2 + (N_{i,x} w_i + N_{j,x} w_j)^2 \right\} \quad (69)$$

식(69)를 행렬로 나타내면 식(70)과 같다.

$$\epsilon_x = A_1 d + \frac{1}{2} d^T B^T B d \quad (70)$$

여기서,

$$A_1 = [N_{i,x} \ 0 \ 0 \ N_{j,x} \ 0 \ 0] \quad (71)$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & N_{j,x} \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 응력도-변형도 관계식

중분구간에서 응력도-변형도 관계식을 식(72)와 같이 채택한다.

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (72)$$

여기서,  $E$ 는 요소의 탄성계수이다.

### 2.2.4 가상일에 의한 방정식

물체력(body force)과 표면력(surface traction)을 받는 구조가 평형상태에 있을 때, 임의의 가상변위에 의해 발생한 외부가상일( $\delta W$ )과 가상변위로 인해 구조체 내에 저장된 내부 가상변형에너지( $\delta U$ )가 일치한다는 것, 즉  $\delta W = \delta U$ 가 가상일의 기본원리(principle of virtual work)이고, 식(73)과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta U = \delta W \quad (73)$$

식(73)의  $\delta U$ 와  $\delta W$ 를 구하면 식(74)와 같다.

$$\int_V \sigma_x \delta \epsilon_x dV = f^T \delta d \quad (74)$$

현재의 상태를 초기상태로 가정하고, 현 상태에서의 증분에 관한 가상일의 원리를 적용하면 식(75)와 같다.

$$\int_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \epsilon_x] dV = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (75)$$

식(70)으로부터  $\delta \epsilon_x$ 를 구하면 식(76)과 같다.

$$\delta \epsilon_x = A_1 \delta d + d^T B^T B \delta d = (A_1 + d^T B^T B) \delta d \quad (76)$$

식(76)을 식(75)에 대입하고, 적분영역  $dV$ 를 일정단면적  $A$ 와 일정길이  $l$ 로 치환하면 식(77)과 같이 된다.

$$A l [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) (A_1 + d^T B^T B)] \delta d = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (77)$$

식(77)에서  $\delta d$ 는 임의의 가상변위이므로 위 식이 성립하려면 등식 양변의  $\delta d$ 의 앞부분이 같아야 한다. 즉,

$$A l [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) (A_1 + d^T B^T B)] = (f^{(0)} + f)^T \quad (78)$$



여기서,

$A$  : 요소의 단면적

$l$  : 요소의 길이

식(70)을 식(72)에 대입하면, 식(79)와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E\epsilon_x = E\left(A_1d + \frac{1}{2}d^T B^T B d\right) \\ &= EA_1d + \frac{1}{2}Ed^T B^T B d \end{aligned} \quad (79)$$

식(79)를 식(78)에 대입하면, 식(80)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (f^{(0)} + f)^T &= Al \left\{ \left( \sigma_x^{(0)} + EA_1d + \frac{1}{2}Ed^T B^T B d \right) \right. \\ &\quad \left. \times (A_1 + d^T B^T B) \right\} \end{aligned} \quad (80)$$

식(80)에서  $d$ 에 관한 2차항 이상을 소거하고, 양변행렬에 전치를 취하면 식(81)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} f^{(0)} + f &= Al(A_1^T \sigma_x^{(0)}) + Al(\sigma_x^{(0)} B^T B)d \\ &\quad + AlE(A_1^T A_1)d + \text{고차항} \end{aligned} \quad (81)$$

식(81)에서  $d$ 에 관한 고차항의 소거로 인하여 생기는 불평형력은 식(82)와 같이 정의한다.

$$r = AlA_1^T \sigma_x^{(0)} - f^{(0)} \quad (82)$$

식(82)를 식(81)에 대입하면, 식(83)과 같은 접선강성 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f - r &= AlE(A_1^T A_1)d + Al(\sigma_x^{(0)} B^T B)d \\ &= (k_E + k_G)d \end{aligned} \quad (83)$$

여기서,

$k_E = AlE(A_1^T A_1)$  : 요소의 탄성강성행렬

$k_G = Al(\sigma_x^{(0)} B^T B)$  : 요소의 기하강성행렬

## 2.2.5 좌표변환

요소 좌표계에서의 절점하중 벡터, 불평형력 벡터, 절점변위 벡터에 대응하는 전체 좌표계에서의 절점하중 벡터, 불평형력 벡터, 절점변위 벡터를 각각 식(84), (85), (86)과 같이 정의한다.

$$F = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad F_{i(\text{or } j)} = \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix}_{i(\text{or } j)} \quad (84)$$

$$R = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} \quad R_{i(\text{or } j)} = \begin{Bmatrix} R_X \\ R_Y \\ R_Z \end{Bmatrix}_{i(\text{or } j)} \quad (85)$$

$$D = \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \quad D_{i(\text{or } j)} = \begin{Bmatrix} D_X \\ D_Y \\ D_Z \end{Bmatrix}_{i(\text{or } j)} \quad (86)$$

절점하중 벡터, 불평형력 벡터, 절점변위 벡터를 변환행렬  $T$ 를 이용하여 변환하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f = TF, \quad r = TR, \quad d = TD \quad (87)$$

변환 매트릭스  $T$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & T_0 \end{bmatrix} \quad (88)$$

여기서,

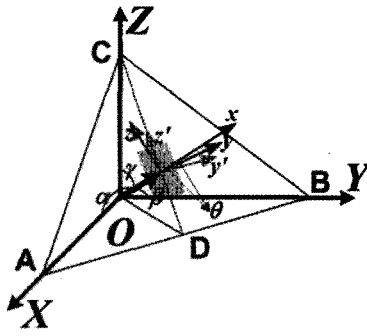
$$T_0 = \begin{bmatrix} l & m & n \\ -\frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}} & \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}} & 0 \\ -\frac{ln}{\sqrt{l^2 + m^2}} & -\frac{mn}{\sqrt{l^2 + m^2}} & \sqrt{l^2 + m^2} \end{bmatrix}$$

$$l = \frac{1}{s}(X_j - X_i)$$

$$m = \frac{1}{s}(Y_j - Y_i)$$

$$n = \frac{1}{s}(Z_j - Z_i)$$

$$s = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$



〈그림 4〉 3차원 공간의 좌표변환 모형

### 2.2.6 Cable 요소의 증분형 강성방정식

식(87)을 식(83)에 대입하면 식(89)와 같다.

$$T(F-R) = [k_E + k_G]TD \quad (89)$$

따라서, 전체좌표계에서의 증분구간에 관한 강성행렬은 다음과 같이 구해진다.

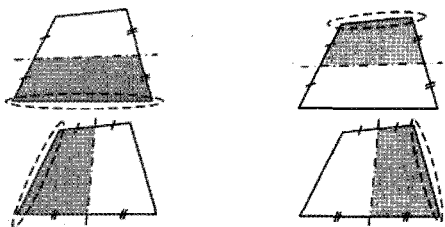
$$F-R = [K_E + K_G]D \quad (90)$$

여기서,

$K_E = T^T k_E T$  : 전체좌표계에서의 탄성강성행렬

$K_G = T^T k_G T$  : 전체좌표계에서의 기하강성행렬

### 3. 선재치환을 위한 초기응력산정과 요소 분할

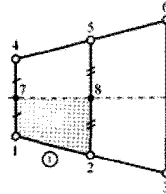


■면적 ÷ ○면적요소길이 × 초기응력 = 선요소의 초기응력

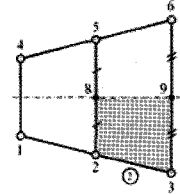
〈그림 5〉 임의의 면재에 대한 초기응력

초기응력이 도입된 삼각형 요소의 분할된 곡면을 선 요소로 치환 할 경우, 이에 상응하는 초기응력의 산정을 필요로 한다. 초기응력의 등가 산정은 그림 5와 같이 임의의 삼각형 요소로 형성되는 사각형의 경계를 선재로

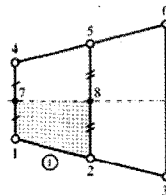
치환 할 때에 각 변의 중점을 연결시킨 선과의 교차점을 얻어 해당 절점으로 이루어진 요소의 면적에 대하여 구할 수 있다. 즉, 면재의 면적에 치환하려는 요소길이를 나눈 값이 선재의 평균단면적으로 고려되어지며, 이 단면적에 면재의 초기응력을 곱한 값을 선재의 초기응력으로 치환하는 방법이다.



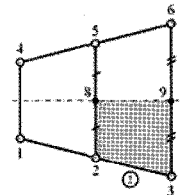
(a) ①번요소의 치환



(b) ②번요소의 치환



(c) ③번요소의 치환

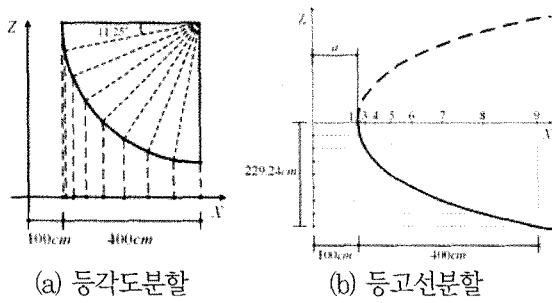


(d) ④번요소의 치환

〈그림 6〉 중복된 면재에 대한 초기응력

또 그림 6과 같이 두 사각형 면의 경계로 이루어진 경우에 대해 초기응력은 두 면에 대한 산출결과의 합산으로 구성하는 방법을 채택한다.

초기형상해석을 수행하기 위한 요소의 분할은 해석방법에 따라 다양하게 설정되지만 증분해석을 수행할 경우 일반적으로 평면에 투영시킨 좌표값을 이용하여 등간격으로 분할한다. 그러나 증분해석과 불평형력에 대한 평형해석의 수렴과정에서는 투영된 좌표값에 따른 등간격 분할은 해석과정에서 공간상의 각 요소에 대한 길이나 면적이 매우 다를 수 있다. 따라서 해석과정을 통해 구한 3차원 공간상의 좌표값을 가진 요소의 분할을 등각도 분할 방법과 등고선분할 방법을 이용하여 요소간의 균일성을 부여한다. 여기서 등각도분할과 등고선분할은 형상에 따라 다르게 적용할 수 있으며, 본고에서는 투영된 좌표를 이용한 등간격분할과 등고선분할을 이용하여 카테나리 곡면 예제에 적용하도록 한다.



〈그림 7〉 요소의 등각도분할과 등고선분할

#### 4. 해석 예제

본 연구에서 채택된 카테나리 곡면 예제는 목표형상이 바깥원의 반지름 500cm, 내부원의 반지름이 100cm, 그리고 높이 229.24cm로서 막 구조물의 해석예제에 많이 이용되는 모델이며, 그림 8에서 보는 바와 같다. 여기서, 해석대상 구조물의 대칭성을 고려하여 전체의 1/4만을 해석대상으로 한다.

해석 예제의 초기장력은  $\sigma^0 \cdot t = 0.3kgf/cm$ 로 적용하며, 형상해석을 수행하기 위한 나머지 초기 입력 자료는 표 1과 같이, 막구조물의 재료강성을 무시하고 기하강성만으로 형상을 탐색하고자 영계수와 포아송비를 0에 가깝게 주었다.

해석방법은 증분해석과 평형해석을 통하여 형상해석을 수행하도록 하며, 증분해석시에 적용되는 강제변위는 (+)Z축 방향으로 229.24cm이다.

〈 표 1 〉 해석대상 예제의 초기입력자료

영 계 수	$E \approx 0$
포아송비	$\nu \approx 0$
초기응력	$\sigma^0 \cdot t = 0.3kgf/cm$

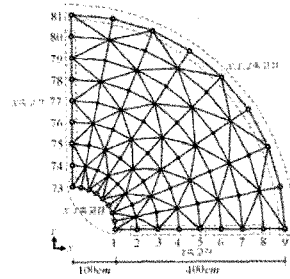
면재 모델 및 선재치환방법을 적용한 모델의 해석결과와 비교를 위해 식(91)의 이론식을 이용하여 오차를 비교한다.

$$Z = a \{ \ln(\sqrt{X^2 + Y^2} + \sqrt{X^2 + Y^2 - a^2}) - \ln(a) \} \quad (91)$$

해석예제의 요소분할에 대하여는 투영된 좌표값에 대한 등간격 요소분할의 방법과 등고선요소분할방법을 이용하여 분할하고 해석을 수행한다.

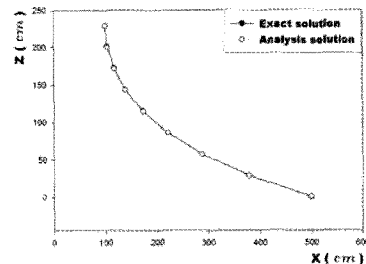
#### 4.1 등간격 요소분할 해석예

경계조건은 전체 모델의 1/4만 해석하는 특성상 X축과 평행한 1-9번 절점은 Y축 방향 고정, Y축과 평행한 73-81 절점은 X축 방향 고정, 외부원에 위치한 절점의 경계조건은 X,Y,Z축 방향 모두 고정, 그리고 Z축으로 변위제어를 받는 절점인 내부원의 절점들은 X,Y축 두 방향을 고정하였다.



〈그림 8〉 등간격 면재 모델

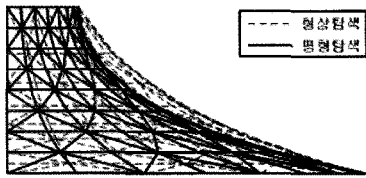
그림 9에서는 형상해석의 결과를 그래프로 나타냈으며, 정해값과의 비교는 표 2에서와 같다. 형상해석의 과정에서 증분해석을 통한 형상탐색과 수렴해석을 통한 평형해석과정의 결과를 그림으로 나타내어 비교하면 그림 10과 같다. 표 및 그림에서와 같이 형상해석의 결과는 정해와 비교해 볼 때 약 1% 미만의 값으로 매우 일치한다.



〈그림 9〉 등간격 면재 모델의 형상해석 결과형상

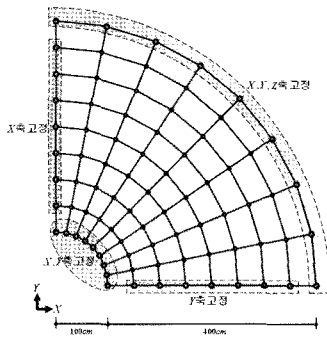
〈 표 2 〉 등간격 면재 모델의 형상해석 결과

절점	X좌표(cm)	정해값(cm)	해석값(cm)	오차(%)
1	100.00	229.24	229.24	0.00
2	104.07	200.80	200.54	0.13
3	116.79	172.07	171.85	0.12
4	139.21	143.34	143.15	0.13
5	173.21	114.61	114.46	0.13
6	221.61	85.880	85.77	0.12
7	288.41	57.15	57.08	30.12
8	379.15	28.43	28.40	30.11
9	500.00	0.00	0.00	0.00



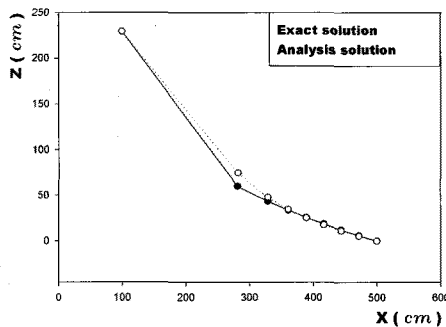
〈그림 10〉 등간격 면재 모델의 탐색단계별 해석결과

그림 8의 면재를 이용한 모델을 선재치환하여 예제 모델을 구성하고 같은 조건하에 해석하여 해석을 수행한다. 선재치환한 카테나리 모델은 그림 11과 같고, 초기응력의 산정은 앞서 설명한 바와 같이 삼각형요소로 구성된 사면체의 면적에 대한 비율로 증가한 초기응력값을 정의하였다.



〈그림 11〉 등간격 선재치환 모델

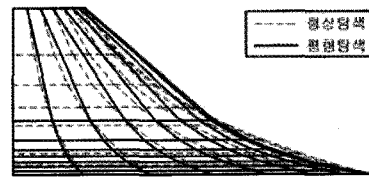
그림 12에서는 형상해석의 결과를 정해와 함께 그래프로 나타냈으며, 비교결과는 표 3에서와 같다. 해석결과 Hoop방향의 요소들이 -Z축 방향으로 미끄러지는 현상을 보였다. 그림 13은 형상탐색 결과와 평형탐색 결과를 비교한 그림이다.



〈그림 12〉 등간격 선재치환 모델의 형상해석 결과형상

〈 표 3 〉 등간격 선재치환 모델의 형상해석 결과

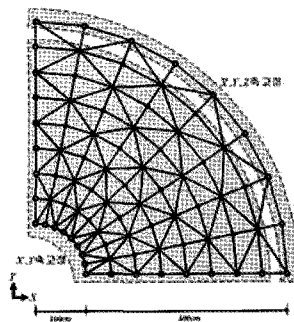
절점	X좌표(cm)	정해값(cm)	해석값(cm)	오차(%)
1	100.00	229.24	229.24	0.00
2	281.49	59.74	74.586	24.83
3	329.51	43.06	47.706	10.76
4	361.39	33.41	34.39	22.91
5	389.45	25.65	25.04	22.40
6	416.65	18.68	17.49	86.37
7	443.95	12.16	11.00	99.49
8	471.69	5.95	5.2363	12.04
9	500.00	0.00	0.00	0.00



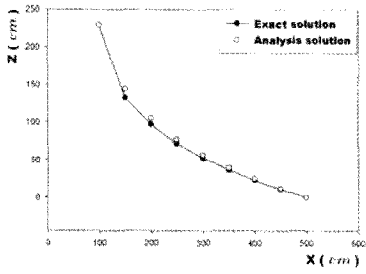
〈그림 13〉 등간격 선재치환 모델의 탐색단계별 해석결과

그림 14의 해석모델은 그림 8의 모델과 동일한 조건에서 경계조건의 변화를 주어 해석하였다. 예제의 경계조건설정을 바깥 원에 놓여진 절점의 지지부분들은 X,Y,Z축 방향 모두 고정하였고, 나머지 절점 모두 X,Y축 두 방향을 고정하여 해석하였다. 이는 그림 12와 그림 13에서 나타난 선재요소의 미끄러짐 현상을 제어하기 위함이다.

형상해석의 결과는 그림 15에서와 같이 그래프로 나타내었고, 비교오차는 표 4에서와 같다. 결과에서 볼 때, 그림 8에 나타난 모델에 비하여 오차가 더 컸으며, 형상탐색과 평형탐색의 해석결과를 그림 16에 나타내었다.



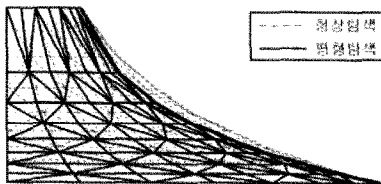
〈그림 14〉 x,y축 자유도를 고정시킨 등간격 면재 모델



〈그림 15〉 형상해석 결과형상

〈 표 4 〉 x,y축 자유도를 고정시킨 등간격 면재 모델의 형상해석 결과

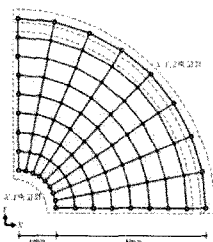
절점	X좌표(cm)	정해값(cm)	해석값(cm)	오차(%)
1	100.00	229.24	229.24	0.00
2	150.00	133.00	144.39	8.57
3	200.00	97.54	105.47	8.13
4	250.00	72.56	78.30	7.91
5	300.00	52.97	57.09	7.78
6	350.00	36.76	39.59	7.71
7	400.00	22.90	24.65	7.66
8	450.00	10.78	11.60	7.63
9	500.00	0.00	0.00	0.00



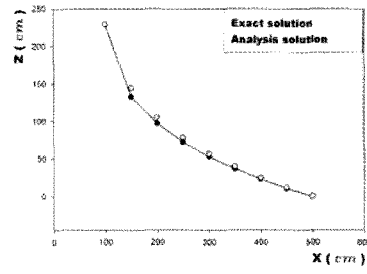
〈그림 16〉 x,y축 자유도를 고정시킨 등간격 면재 모델의 탐색 단계별 해석결과

그림 14의 면재 모델을 선재치환한 카테나리 모델은 그림 17과 같다. 형상해석의 결과는 그림 18에서와 같이 그래프로 나타냈으며, 해석결과의 오차는 표 5에서와 같다.

형상해석의 결과는 면재와 유사한 결과를 도출하였으며, 그림 11에 나타난 모델보다 더 큰 오차를 보이고 있다. 형상탐색과 평형탐색과정의 해석결과는 그림 19와 같다.



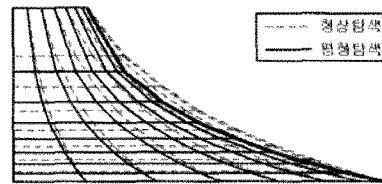
〈그림 17〉 x,y축 자유도를 고정시킨 선재치환 모델



〈그림 18〉 x,y축 자유도를 고정시킨 선재치환 모델의 형상해석 결과형상

〈 표 5 〉 x,y축 자유도를 고정시킨 선재치환 모델 형상해석 결과

절점	X좌표(cm)	정해값(cm)	해석값(cm)	오차(%)
1	100.00	229.24	229.24	0.00
2	150.00	133.00	144.69	8.79
3	200.00	97.54	105.71	8.37
4	250.00	72.56	78.49	8.17
5	300.00	52.97	57.23	8.05
6	350.00	36.76	39.69	7.98
7	400.00	22.90	24.71	7.93
8	450.00	10.78	11.63	7.91
9	500.00	0.00	0.00	0.00



〈그림 19〉 x,y축 자유도를 고정시킨 선재치환 모델의 탐색단계별 해석결과

#### 4.2 등고선요소분할 해석에

임의의 모델을 모델링 할 때와는 다르게 카테나리 곡면의 모델은 정해를 통해서 목표형상의 값을 알 수 있다. 이러한 경우 요소의 분할은 평면에 투영한 좌표값을 이용하는 것 보다 등각도 분할이나 등고선분할방법을 이용하여 요소를 분할하는 것이 유리하다. 이는 공간상의 요소들에 대해 길이나 면적에 대한 균일한 분할을 얻을 수 있기 때문이다.

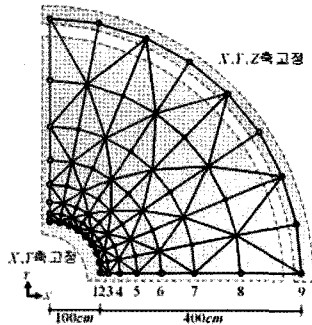
본 절에서는 카테나리 곡면의 좌표값을 등고선을 이용하여 요소분할을 하여 해석을 수행한다.

그림 7-(b)에서와 같이, 등고선분할방법을 통해 카테

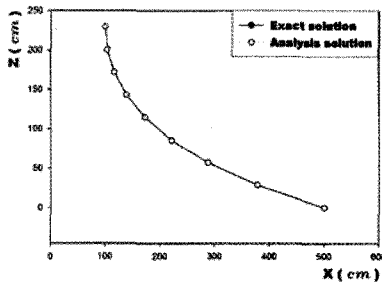
나리로 곡면의 요소분할을 그림 20과 같이 생성하여 해석한다.

형상해석 결과 그림 21에서 보는 그래프와 같고, 비교 오차는 표 6과 같다. 또 형상탐색과 평형탐색과정의 형상해석결과를 그림 22에 나타내었다.

등고선 요소분할방법을 이용한 해석의 결과는 표 6에서와 같이 약 1% 미만의 오차범위를 보였으며, 정해와 매우 근사한 결과를 보였다.



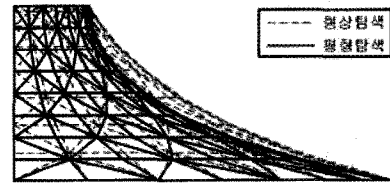
〈그림 20〉 등고선분할 면재 모델



〈그림 21〉 등고선분할 면재 모델의 형상해석 결과형상

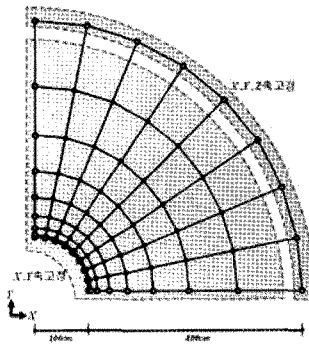
〈 표 6 〉 등고선분할 면재 모델의 형상해석 결과점

절점	X좌표(cm)	정해값(cm)	해석값(cm)	오차(%)
1	100.00	229.24	229.24	0.00
2	104.13	200.60	200.41	0.09
3	116.88	171.92	171.74	0.11
4	139.28	143.28	143.12	0.11
5	173.20	114.62	114.49	0.12
6	221.44	85.97	85.87	0.12
7	287.99	57.31	57.25	0.11
8	378.35	28.65	28.62	0.11
9	500.00	0.00	0.00	0.00



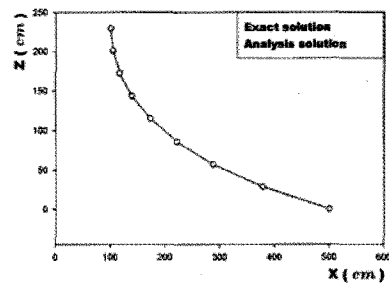
〈그림 22〉 등고선분할 면재 모델의 탐색단계별 해석결과

등고선요소분할의 면재 모델을 선재치환하여 해석을 수행하기 위해 그림 23과 같이 모델을 정의하였다. 초기 응력의 산정도 다른 모델과 마찬가지로 사각형 면적을 통한 등가초기응력을 산정하여 적용하였고, 증분법을 이용한 형상탐색과 반복과정을 통한 평형탐색을 수행하여 초기형상을 결정하였다.



〈그림 23〉 등고선분할 선재치환 모델

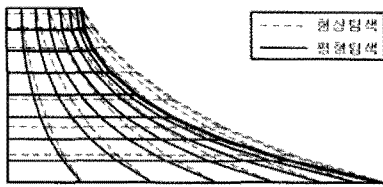
형상해석 결과 그림 24와 같은 결과형상을 구할 수 있었으며, 정해와의 오차는 표 7에 나타내었다. 표 7에서 보는 바와 같이 1% 미만의 오차범위를 나타내었다. 또 탐색단계별 해석결과도 그림 25와 같이 정해로 수렴하는 결과를 보였다.



〈그림 24〉 등고선분할 선재치환 모델의 형상해석 결과형상

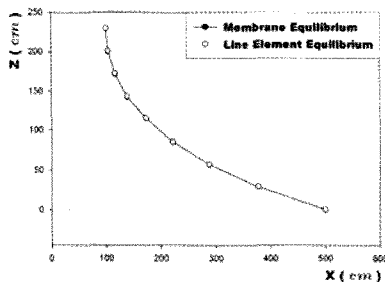
〈 표 7 〉 등고선분할 선재치환 모델의 형상해석 결과

절점	X좌표(cm)	정해값(cm)	해석값(cm)	오차(%)
1	100.00	229.24	229.24	0
2	104.13	200.60	200.78	0.09
3	116.88	171.92	172.27	0.20
4	139.28	143.28	143.58	0.21
5	173.20	114.62	114.88	0.23
6	221.44	85.97	86.16	0.23
7	287.99	57.31	57.45	0.24
8	378.35	28.65	28.73	0.25
9	500.00	0.00	0.00	0.00



〈그림 25〉 등고선분할 선재치환 모델의 탐색단계별 해석결과

면재를 이용하여 수행한 형상해석 결과를 바탕으로 선재치환 모델의 결과와 비교하여 해의 결과를 살펴보면 그림 26과 같고 결과의 차이는 표 8과 같다. 그림에서 보는 바와 같이 두 요소의 해석결과는 매우 근접한 결과를 보였고, 표에서 나타난 바와 같이 오차는 약 0.4%의 값을 보였다.



〈그림 26〉 면재와 선재의 평형탐색 결과비교

〈 표 8 〉 면재와 선재의 해석결과 비교

면재(cm)	선재(cm)	오차(%)
200.41	200.78	0.18
171.74	172.27	0.30
143.12	143.58	0.32
114.49	114.88	0.34
85.86	86.164	0.34
57.24	57.446	0.34
28.62	28.725	0.35

## 5. 결 론

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 연성 막 구조물의 형상 결정방법에 관해 연구하였다. 일반적으로 면요소를 이용하여 강제변위에 의한 형상 탐색을 시도할 경우, 대변형으로 인해 막면의 쓸림 현상이 나타나며, 이를 해결하기 위해 면부재를 선부재로 치환하여 형상해석을 수행하는 방법을 제안하였다. 또 인접 요소의 면적을 고려한 초기응력산정과 요소의 분할방법도 제시하였다. 축력만을 고려하여 비선형해석을 함으로 인해 요소의 쓸림 현상을 없애고 자연스러운 곡면 형상을 탐색할 수 있었다. 본 연구에서 얻은 결과를 정리하면 다음과 같다

- 1) 선재치환요소를 이용한 모델의 해석결과는 정해와 비교해 볼 때 약 1% 미만의 오차를 보였으며, 면요소의 해석결과와도 매우 만족할 만한 결과를 얻었다.
- 2) 선재치환요소 모델에 대한 초기좌표의 설정에 있어서 투영좌표에 대한 등간격분할보다 등고선분할의 경우가 더 정확한 결과를 나타내었다.

본 연구 결과에 의한 기법을 이용하면 보다 간단하게 면재로 구성된 유한요소 모델의 최적곡면을 얻을 수 있고, 실무에서도 보다 간편하게 접근할 수 있는 장점이 있다.

## -감사의 글-

이 논문은 2010학년도 세명대학교 지원에 의한 연구입니다. 이에 감사드립니다.

## -참고문헌-

1. Otto, F. TENSILE STRUCTURES, Vol. I, II, MIT Press, Cambridge, Mass., 1969
2. Haug, E. and Powell, G. H., "Finite Element Analysis of Nonlinear Membrane Structures," IASS Pacific Symposium-Part II, Oct., Tokyo and Kyoto, 1971, pp.2-3-1/2-3-13
3. Argyris, J. H. and Scharpf, D. W., "Large

- Deflection Analysis of Prestressed Networks,"  
Journal of the Structural Division, Proceedings  
of the American Society of Civil Engineers,  
March, 1972
4. Haug, E. and Powell, G. H., "Analytical Shape  
Finding for Cable Nets," Proc. 1971 IASS  
Pacific Symposium Part II on Tension  
Structures and Space Frames, Tokyo and  
Kyoto, Paper No.1-5, Architectural Institute of  
Japan, 1972, pp.83-92
  5. Haber, R.B., Abel, J.F., Greenberg, D.P., "An  
integrated design system for cable reinforced  
membranes using interactive computer  
graphics," Computers & structures, v.14  
no.3/4, 1981, pp.261-280.
  6. Hsiao, Kuo-Mo, Horng, Horng-Jann and  
Chen, Yei-Ren, "A corotational procedure that  
handles large rotations of spatial beam  
structures," Computers and Structures, Vol.27,  
No.6, 1987, pp.769-781.
  7. 石井一夫, "膜構造の應力・變形解析假說," 膜構  
造研究論文集 '90, No.4, 日本膜構造協會, 1990
  8. 권택진, 항가이아수히코, 최현식, 김승덕, 서삼열,  
"기하학적 비선형을 고려한 막형 케이블네트 구조  
물의 최적형상 및 응력-변형해석에 관한 연구," 대  
한건축학회논문집, 11권, 1호, 통권 75호, 1995,  
pp.153-160
  9. 최현식, 김승덕, 이형훈, "케이블 구조물의 기하학  
적 비선형을 고려한 최적 형상해석," 韓國剛構造學  
會誌, 제8권, 제1호, 1996, pp.127-135
  10. 최현식, 김승덕, 조윤경, "케이블構造物의 非線形  
解析에 관한 研究," 大韓建築學會論文集, 第13  
卷, 第9號, 1997, pp.233-241
  11. 김승덕, 손수덕, 조병욱, 손승철, "비선형 해석프로  
그램 NASS-98을 이용한 연성 막구조물의 구조설  
계에 관한 연구," 大韓建築學會學術發表論文集,  
第18卷, 第2號, 1998, pp.27-32
  12. 임채욱, Catenary 곡면을 갖는 막 구조물의 치환  
기법에 관한 연구, 大韓建築學會學術發表論文集,  
第23卷, 第2號, 2003, 10, pp.245-248

▶접수일자 : 2008년 2월 19일

▶심사 완료일자 : 2010년 4월 28일

▶게재 확정일자 : 2010년 6월 10일