

비정렬 격자 기반의 물-기체 2상 유동해석기법에서의 압력기울기 재구성 방법

이 희 동,¹ 정 재 준,^{*2} 조 형 규,² 권 오 준³

A NEW PRESSURE GRADIENT RECONSTRUCTION METHOD FOR A SEMI-IMPLICIT TWO-PHASE FLOW SCHEME ON UNSTRUCTURED MESHES

H.D. Lee,¹ J.J. Jeong,^{*2} H.K. Cho² and O.J. Kwon³

A thermal-hydraulic code, named CUPID, has been developed for the analysis of transient two-phase flows in nuclear reactor components. A two-fluid three-field model was used for steam-water two-phase flows. To obtain numerical solutions, the finite volume method was applied over unstructured cell-centered meshes. In steam-water two-phase flows, a phase change, i.e., evaporation or condensation, results in a great change in the flow field because of substantial density difference between liquid and vapor phases. Thus, two-phase flows are very sensitive to the local pressure distribution that determines the phase change. This in turn puts emphasis on the accurate evaluation of local pressure gradient. This paper presents a new reconstruction method to evaluate the pressure gradient at cell centers on unstructured meshes. The results of the new scheme for a simple test function, a gravity-driven cavity, and a wall boiling two-phase flow are compared with those of the previous schemes in the CUPID code.

Key Words : 압력기울기 재구성 기법(Pressure Gradient Reconstruction Method), ICE 기법(ICE Method), 비정렬 격자계(Unstructured Meshes), 2상 유동(Two-Phase Flow)

1. 서 론

현재 한국원자력연구원에서는 원자로 내의 특정 기기 내에서 발생할 수 있는 다차원 이상 유동에 대한 효율적인 해석을 위해 기기 열수력 해석 코드 CUPID (Component Unstructured Program for Interfacial Dynamics)를 개발 중에 있다[1,2]. CUPID는 물-증기로 구성되는 비정상 2상 유동 해석을 위해 2-유체 3-상(two-fluid three-field) 모델을 지배방정식으로 사용하며, 지배방정식은 압력기반기법(pressure-based

method) 중에 하나인 ICE(Implicit Continuous Eulerian)[3,4] 기법을 기반으로 격자셀 중심의 비정렬 유한체적법을 이용하여 풀이된다.

압력기반기법은 대부분 정렬 격자계를 기반으로 개발되어 왔으며, 또한 압력-속도 분리(pressure-velocity decoupling) 문제를 극복하기 위해 속도와 압력 변수를 서로 다른 위치에서 정의하는 엇갈림 격자(staggered grid) 기법이 널리 적용되어 왔다. 이에 반해, 격자가 불규칙적으로 배열되어 있어 엇갈림 격자 기법의 적용이 어려운 비정렬 격자계에서는 모든 변수를 동일한 위치에 저장시키는 비엇갈림 격자(non-staggered grid) 기법이 널리 사용되고 있다. 그리고 엇갈림 격자에서 발생할 수 있는 압력-속도 분리 문제를 방지하기 위해 격자셀에서의 속도를 격자면으로 내삽하는 과정에서 격자면에서의 압력기울기와 격자셀 중심에서의 압력기울기를 사용하는 Rhie와 Chow[5]의 압력가중내삽기법(PWIM, Pressure Weighted Interpolation Method)을 통상적으로 사용한다.

접수일: 2010년 5월 20일, 수정일: 2010년 6월 18일,
게재확정일: 2010년 6월 25일.

1 정회원, 한국과학기술원 대학원 항공우주공학과

2 정회원, 한국원자력연구원 열수력안전연구부

3 종신회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

* Corresponding author, E-mail: jjeong@kaeri.re.kr

비엇갈림 비정렬 격자계에서의 압력기반기법에서는 운동량 방정식의 압력항 뿐만 아니라 Rhie와 Chow의 압력가중내삽기법의 적용을 위해 격자셀 중심에서의 압력기울기 값이 사용되며, 압력기울기 재구성 기법의 정확도는 전반적인 수치해의 정확도 및 수렴성을 결정하는 중요한 요인이 된다. 더욱이 2상 유동에서는 국부적인 압력값에 따라 상의 변화율이 결정되므로 압력기울기의 정확한 계산이 필수적이다.

본 연구에서는 CUPID 코드의 정확도 개선 작업의 일환으로, 압력기울기 재구성 기법의 정확도에 따른 ICE 기법의 거동 특성을 분석하였다. 현재 버전의 CUPID에서 사용 중인 기울기 재구성기법을 포함하여 다양한 기울기 재구성기법의 정확도를 테스트하였으며, 비정렬 격자계에서 정확한 압력기울기를 재구성할 수 있는 수정된 Frink 방법을 제안하였다. 그리고 제안된 방법을 포함하여 다양한 압력기울기 재구성기법을 공동 내부의 자연내류 문제와 벽면에서 비등이 발생하는 2상 유동 문제에 적용함으로써 재구성된 압력기울기의 정확도가 수치해에 미치는 영향을 파악하였다.

2. 지배방정식 및 수치기법

CUPID는 상변화가 발생하는 다상 유동장의 해석을 위하여 증기상과 물의 2-유체(two-fluid)에 대하여 연속액상, 액적상, 그리고 증기상의 3-상(three-field)에 대한 해석 모델을 지배방정식으로 사용하며, ICE기법을 기반으로 지배방정식을 풀이하며 유한체적법을 이용하여 차분화한다.

2.1 2-유체 3-상 지배방정식

증기상, 연속액상, 그리고 액적상에 대한 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{u}_k) &= \Omega_k \\ \Omega_v &= \Gamma_v \\ \Omega_l &= -(1-\eta)\Gamma_v - S_E + S_{DE} \\ \Omega_d &= -\eta\Gamma_v + S_E - S_{DE} \\ \eta &= \frac{\alpha_d}{(\alpha_l + \alpha_d)} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 하첨자 k 는 증기상 v , 연속액상 l , 그리고 액적상 d 를 각각 의미하며, Γ_v 는 상변화에 의한 질량생성율, S_E 와 S_{DE} 는 증기에 의하여 연속액상에서 액적이 생성되어 이탈하거나 반대로 액적이 연속액상에 포함되는 율을 나타낸다. 그리고 α_k 는 각 상의 체적분율이며, η 는 연속액상과 액적상에서 액적상이 차지하는 비율을 의미한다. 증기와 비응축성 기

체가 공존하는 경우를 고려하기 위해 비응축성 기체에 대한 연속 방정식을 다음과 같이 추가하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_v \rho_v X_n) + \nabla \cdot (\alpha_v \rho_v X_n \underline{u}_v) = 0 \quad (2)$$

여기서 X_n 은 기체 혼합체 중 비응축성 기체의 질량비를 의미한다. 그리고 비응축성 기체는 증기와 균질하게 섞여 증기와 동일한 온도와 속도를 가진다고 가정하였다.

각 상에 대한 운동량 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k \underline{u}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{u}_k \underline{u}_k) &= -\alpha_k \nabla P \\ &+ \nabla \cdot [\alpha_k (\tau_k + \tau_k^T)] + \alpha_k \rho_k \underline{g} + \underline{M}_{ik} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 \underline{M}_{ik} 는 상 간의 운동량 전달량이며 질량전달에 의한 운동량전달, 상 간의 마찰에 의한 운동량 전달, 그리고 상 간의 가속력 차이에 의해 발생하는 운동량 전달을 포함한다.

에너지 방정식은 액적과 연속 액체 간의 열적 평형상태 가정 하에 기체 및 전체 액체에 대해 구성하였으며, 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_v \rho_v e_v) + \nabla \cdot (\alpha_v \rho_v e_v \underline{u}_v) &= -P \frac{\partial}{\partial t} \alpha_v \\ &+ E_v^D - P \nabla \cdot (\alpha_v \underline{u}_v) + Q_v - Q_{vl} + q_{wv} \\ \frac{\partial}{\partial t} [(1-\alpha_v) \rho_l e_l] + \nabla \cdot [(\alpha_l \underline{u}_l + \alpha_d \underline{u}_d) \rho_l e_l] &= -P \frac{\partial}{\partial t} (1-\alpha_v) \\ &+ E_l^D - P \nabla \cdot (\alpha_l \underline{u}_l + \alpha_d \underline{u}_d) + Q_l + Q_{vl} + q_{wl} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 Q_{vg} 와 Q_{vl} 은 계면 열전달항이며, E_k^D 는 확산에 의한 열소산항을 의미한다.

식 (1)-(4)로 구성되는 지배방정식은 상태방정식을 이용하여 각 상의 밀도, 온도, 포화온도, 포화압력을 P , α_v , α_d , e_l , e_v , X_n , \underline{u}_k 으로 변환함으로써 닫힌계(closed system)가 된다. 본 절에서 소개한 지배방정식에서의 상변화항과 상태방정식은 참고문헌 [1]과 [2]에 자세히 기술되어 있다.

2.2 유한체적법을 이용한 ICE 기법

CUPID 코드는 엇갈림 격자에서 유한차분법을 기반으로 개발된 ICE기법[6]을 비엇갈림 유한체적법을 이용하여 비정렬 격자계에 대해 확장 적용한 것이다[1]. 2-상 3-장 지배방정식에 대한 ICE기법은 다음과 같이 구성된다. 먼저 운동량방정식으로부터 n단계의 압력을 이용하여 중간속도를 구하고, 에너지방정식과 질량보존방정식으로부터 도출된 압력수정방정

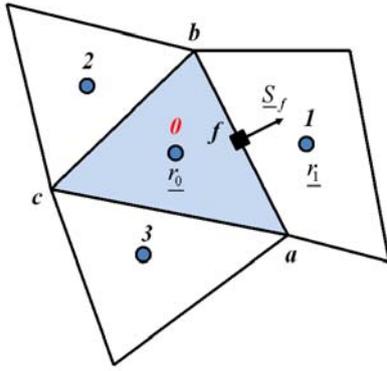


Fig. 1 Control volume for an unstructured FVM

식을 이용하여 압력수정값을 계산한다. 그리고 계산된 압력수정값으로부터 질량보존을 만족하는 n+1단계에서의 속도를 구하고 에너지방정식과 질량보존방정식으로부터 압력을 제외한 나머지 스칼라 변수를 계산한다.

운동량 방정식 식 (3)을 Fig. 1에서와 같이 하나의 제어체적 0에 대해 적분한다. 운동량방정식의 대류항, 점성항, 중력항은 외재적으로 처리되나, 상변화에 따른 운동량 전달항은 상 간의 의존성이 매우 크기 때문에 내재적으로 처리된다. 내재적으로 처리된 운동량 전달항은 소스항이므로 이웃하는 속도와의 연계성은 없으며, 주어진 셀에서의 각 상 속도만 연계되는 형태로 차별화된다. n 시간단계에서의 압력값을 사용하여 얻은 각 상의 중간속도 $\underline{u}_{k,0}^*$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\underline{u}_{k,0}^* = \gamma_{k,0}^n + \beta_{k,0} \nabla P_0^n \quad (5)$$

여기서 $\gamma_{k,0}^n$ 은 외재적으로 처리된 모든 항을 포함하고 있으며, $\beta_{k,0}$ 는 압력기울기항의 계수이다. n+1단계에서의 속도는 압력을 내재적으로 처리함으로써 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\underline{u}_{k,0}^{n+1} = \gamma_{k,0}^n + \beta_{k,0} \nabla P_0^{n+1} \quad (6)$$

그리고, 식 (5)와 (6)으로부터 다음과 같이 n+1단계에서의 속도, 중간속도 그리고 압력수정값의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\underline{u}_{k,0}^{n+1} = \underline{u}_{k,0}^* + \beta_{k,0} \nabla \delta P_0 \quad (7)$$

여기서 $\delta P_0 = P_0^{n+1} - P_0^n$ 는 압력수정값을 의미하며, 스칼라 방정식으로부터 유도된 압력수정방정식을 이용하여 질량보존을 만족하도록 결정된다.

운동량방정식을 제외한 질량보존방정식과 에너지 방정식을 이용하여 6개의 스칼라 방정식을 구성한다. 스칼라 방정식의 차별화는 상변화와 관련된 소스항 뿐만 아니라 대류항도 내재적으로 처리되며, 이외의 다른 항은 외재적으로 처리된다. 그리고 각 상의 밀도와 온도는 선형화를 통해 압력 및 에너지로 변환된다. 이러한 일련의 과정을 비응축성 기체의 연속방정식, 증기상의 에너지 방정식, 연속액상-액적상의 에너지 방정식, 증기상의 연속방정식, 액적상의 연속방정식, 그리고 연속액상의 연속방정식에 대해 적용하면 스칼라 변수 $\underline{x} = (\delta X_n, \delta e_v, \delta e_l, \delta \alpha_v, \delta \alpha_l, \delta P)^T$ 에 대해 다음과 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{s} + \sum_f \underline{v} \psi_{v,f}^{n+1} + \sum_f \underline{l} \psi_{l,f}^{n+1} + \sum_f \underline{d} \psi_{d,f}^{n+1} \quad (8)$$

여기서 계수 행렬 \underline{A} 는 각 방정식의 비정상항과 생성항의 선형화를 통해 얻어진 값이고, \underline{s} 는 대류항을 제외한 나머지 항을 나타낸다. 그리고, $\psi_{k,f}^{n+1}$ 는 격자면에서의 수직속도 $\underline{u}_{k,f}^{n+1} \cdot \underline{S}_f$ 을 의미하며, 식 (7)을 이용하여 다음과 같이 중간속도와 압력수정값으로 치환된다.

$$\begin{aligned} \psi_{k,f}^{n+1} &= \psi_{k,f}^* + \beta_{k,f} \nabla \delta P \cdot \underline{S}_f \\ &\simeq \psi_{k,f}^* + \beta_{k,f} \frac{S_f}{r_{01} \cdot \hat{n}} (\delta P_1 - \delta P_0) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $\psi_{k,f}^*$ 는 격자면에서의 중간속도 $\underline{u}_{k,f}^* \cdot \underline{S}_f$ 를 의미하고, \hat{n} 과 r_{01} 은 격자면 f 에서의 단위수직벡터와 격자면과 인접하는 두 셀 중심을 잇는 벡터를 각각 의미한다. 격자면의 중간속도 $\underline{u}_{k,f}^*$ 를 단순히 격자셀 중심에서의 속도만을 이용하여 내삽하는 경우 압력-속도 분리(pressure-velocity decoupling) 문제가 발생하여 수치해의 진동현상이 나타날 수 있다. 본 연구에서는 이를 방지하기 위해 Rhie와 Chow[5]의 압력가중내삽 기법을 다음과 같이 적용하였다.

$$\underline{u}_{k,f}^* = \overline{\underline{u}_k} - \beta_k [(P_1 - P_0) - \overline{\nabla P} \cdot \underline{S}_f] \frac{\hat{n}}{r_{01} \cdot \hat{n}} \quad (10)$$

여기서 $\overline{\quad}$ 는 격자면 f 와 인접하는 두 셀의 산술평균을 의미한다.

식 (9)를 (8)에 대입시키고, 계수 행렬 \underline{A} 의 역을 취하면 스칼라 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \underline{b} + \sum_f \underline{c} (\delta P_1 - \delta P_0) \\ \underline{b} &= \underline{A}^{-1} \underline{s} + \sum_f \left[\underline{A}^{-1} (\underline{v} \psi_{v,f}^* + \underline{l} \psi_{l,f}^* + \underline{d} \psi_{d,f}^*) \right] \\ \underline{c} &= \underline{A}^{-1} \beta_{k,f} \frac{S_f}{\underline{r}_{01} \cdot \hat{n}} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{w_0 P_0 + w_1 P_1}{w_0 + w_1} \\ w_0 &= \frac{1}{\|\underline{r}_f - \underline{r}_0\|}, w_1 = \frac{1}{\|\underline{r}_f - \underline{r}_1\|} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 식 (11)의 여섯 번째 방정식은 스칼라 변수 중 압력수정값 δP 로만 표현되므로, 이를 이용하여 다음과 같이 압력수정방정식을 도출할 수 있다.

$$\left[1 + \sum_f c^{(6)} \right] \delta P_0 - \sum_f c^{(6)} \delta P_1 = b^{(6)} \quad (12)$$

식 (12)의 압력수정방정식을 전체 격자계에 대해 풀이함으로써 압력수정값 δP 를 계산할 수 있으며, 식 (7) 및 (11)을 이용하여 n+1단계에서의 속도와 스칼라변수를 구할 수 있다.

3. 압력기울기 재구성 기법

본 장에서는 현재 버전의 CUPID에서 사용 중인 압력기울기 재구성기법을 포함하여 다양한 형태의 기울기 재구성기법을 소개하고, 각 기법의 정확도에 대해 논의한다. 그리고 경계셀에서 재구성된 기울기의 부정확성을 개선하기 위해 Frink 방법을 수정하여 새로운 기울기 재구성기법을 제안한다.

3.1 기울기 재구성 기법

2.2절에서 소개한 ICE기법에서는 다음과 같이 세 과정에서 압력기울기가 사용된다.

- 1) 중간속도 \underline{u}_k^* 를 구하기 위한 운동량 방정식 (5)
- 2) 격자면에서의 중간속도 $\underline{u}_{k,f}^*$ 를 구하기 위한 식 (10)
- 3) 압력수정값의 기울기를 이용하여 n+1 시간단계에서의 속도를 업데이트하기 위한 식 (7)

현재 버전의 CUPID에서는 Green-Gauss 정리를 이용하여 격자셀 중심에서의 압력기울기를 다음과 같이 재구성한다.

$$\begin{aligned} \nabla P_0 &= \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} P d\underline{S} \\ &= \frac{1}{V_0} \sum_f P_f S_f \underline{r}_f \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 P_f 는 격자면에서의 압력을 의미하며, 거리역가중치 (IDW, Inverse Distance Weighting)를 이용하여 다음과 같이 계산된다.

여기서 P_0 와 P_1 은 격자면 f 와 이웃하는 두 격자셀 중심에서의 압력을 의미한다. 이와 같이 거리역가중치를 이용하여 압력기울기를 재구성하는 방법은 비직교성이 보장된 격자에서는 2차 정확도를 가질 수 있으나, 비정렬 격자계에서와 같이 비직교성을 가진 격자에서는 정확도 저하가 발생할 수 있다.

Mathur와 Murthy[7]는 격자면에서의 압력을 계산하기 위해 이웃하는 두 격자셀 값을 다음과 같이 단순평균(simple average)하는 방법을 사용하였다.

$$P_f = \frac{1}{2} (P_0 + P_1) \quad (15)$$

이는 선형가정 없이 단순 평균하여 격자면 값을 구하는 방법으로 균일한 격자크기를 가지는 직교 격자에 한해서만 2차 정확도를 갖는다. Murthy와 Mathur[8]는 정확도 향상을 위해 기울기를 반복적으로 구하는 방법을 제안하였다. 식 (15)와 (13)을 이용하여 초기 기울기를 계산하고, 격자면 압력은 계산된 기울기를 이용하여 다음과 같이 재계산한다.

$$P_f = \frac{1}{2} [(P_0 + \nabla P_0 \cdot \underline{r}_{0f}) + (P_1 + \nabla P_1 \cdot \underline{r}_{1f})] \quad (16)$$

그리고, 식 (16)과 (13)을 이용하여 격자셀 기울기를 반복적으로 계산한다. 그러나 이 방법은 초기에 부정확하게 계산된 기울기 값을 사용함으로써 초기 오차를 완화시킬 수는 있으나, 경계조건과 같은 구속조건이 존재하지 않아 정확한 기울기로의 수렴성이 보장되지 않는다.

Frink[9]는 격자면 값을 이웃하는 격자셀 값으로부터 직접 내삽하지 않고, 격자점의 값으로 내삽한 뒤 기울기를 재구성하는 방법을 제안하였다. Frink 방법을 이용하면 격자면 압력 값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_f = \frac{1}{2} (P_a + P_b) \quad (17)$$

여기서 P_a 와 P_b 는 Fig. 1에서와 같이 격자면 f 를 구성하는 두 격자점에서의 압력이며, 격자점 압력값 P_n 은 Fig. 2에서 도시한 바와 같이 격자점과 인접하는 격자셀로부터 다음과 같이 내삽된다.

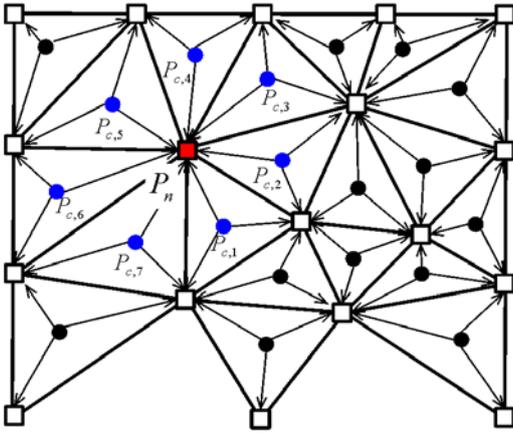


Fig. 2 Interpolation of node values in the Frink's method

$$P_n = \frac{\sum_{i=1}^{n_{sc}} w_i P_{c,i}}{\sum_{i=1}^{n_{sc}} w_i} \quad (18)$$

여기서 n_{sc} 는 격자점과 인접하는 격자셀 개수를 의미하고, w_i 는 인접한 격자셀에 대한 가중치를 나타낸다. 가중치 w_i 는 2차 정확도를 가지는 pseudo-Laplacian 방법[10]을 이용하여 계산된다. Frink 방법은 격자점의 값을 2차 정확도로 내삽하는 경우 선형 기울기를 정확히 계산할 수 있으며, 격자점을 공유하는 모든 격자셀 값이 기울기 계산에 사용되므로 격자의 찌그러짐(skewness)이 큰 비정렬 격자계에 대해서도 안정적으로 정확한 기울기를 재구성할 수 있는 장점이 있다.

한편, 이와 같은 Green-Gauss 기반의 기울기 재구성 기법은 경계셀에서 가용할 수 있는 스텐실의 한계로 인해 기울기를 정확히 계산하지 못하는 문제점이 존재한다. 경계면에서의 압력값 P_f 를 단순히 경계셀값으로 대체하여 기울기를 구하면, 경계셀 중심에서부터 경계면까지의 구배를 고려할 수 없게 되어 실제보다 낮게 기울기를 계산하게 된다. 이러한 문제점은 Frink의 방법 중 경계점 값을 내삽과정에서도 유사하게 발생한다. 경계셀에서의 문제점을 해결하기 위해 현재 CUPID에서는 least-square 방법을 이용하여 경계셀에서의 기울기를 계산한다.

Least-square 재구성 기법은 유동분포를 선형적으로 가정하고 주위 격자셀 값이 선형분포를 최소자승적으로 만족할 때의 기울기를 결정하는 방법이다. 주위 격자셀 압력이 격자셀 0에 대한 선형 압력분포를 만족한다고 가정하는 경우 다음과 같이 압력기울기에 대해 over-determined system을 구축할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} (x_1 - x_0) & (y_1 - y_0) \\ (x_2 - x_0) & (y_2 - y_0) \\ \vdots & \vdots \\ (x_{n_{NC}} - x_0) & (y_{n_{NC}} - y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 - P_0 \\ P_2 - P_0 \\ \vdots \\ P_{n_{NC}} - P_0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기서 n_{NC} 는 주어진 격자셀과 격자면을 공유하는 이웃 격자셀 개수를 의미한다. 식 (19)는 normal equation, Gram-Schmidt 직교화 과정, 그리고 Householder transformation 등의 방법으로 풀이될 수 있으며, 본 연구에서는 normal equation 방법을 이용하여 풀이하였다.

Least-square 방법은 격자셀 형태와 무관하게 정렬 및 비정렬 격자계에 대해 사용될 수 있으나, Fig. 2의 왼쪽 상단 경계셀과 같이 이웃하는 격자셀이 하나만 존재하는 경우에는 해가 존재하지 않는다. 이와 같이 이웃셀이 하나만 존재하는 경계셀에서는 스텐실을 격자점을 공유하는 셀까지 확장함으로써 least-square 방법을 적용할 수 있다. 그러나, 비정렬 격자계에서의 스텐실 확장은 추가적인 자료구조를 요구하여 과도한 메모리 증가가 초래된다.

3.2 수정된 압력기울기 재구성 기법

전술한 바와 같이 Green-Gauss 기반의 재구성 기울기 기법이 가지는 경계셀에서의 부정확성을 개선하기 위해, 본 연구에서는 Frink 방법을 기반으로 경계점 값을 반복적으로 계산하는 새로운 방법을 제안하였다. 격자셀에서의 압력기울기는 다음과 같은 일련의 반복과정을 거쳐 계산된다.

- (a) 모든 격자점의 압력을 식 (18)을 이용하여 계산한다.
- (b) 식 (17) 및 (13)을 이용하여 경계점과 인접하는 격자셀에서의 기울기를 계산한다.
- (c) 경계점 압력을 재구성된 격자셀 기울기를 이용하여 다음과 같이 내삽한다.

$$P_n^{new} = \frac{1}{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_{sc}} [P_{c,i} + \nabla P_{c,i} \cdot (r_n - r_{c,i})] \quad (20)$$

- (d) 새로운 경계점 압력이 $|P_n^{new} - P_n| < \epsilon_{crit}$ 만족할 때까지 (b)와 (c)의 과정을 반복한다.
- (e) 수렴된 경계점 압력과 (a)과정에서 얻어진 내부격자점 값을 이용하여 식 (17) 및 식 (13)의 Frink 방법에 따라 모든 격자셀에서의 기울기를 재구성한다.

수정된 Frink 방법은 반복적으로 경계점 값을 내삽함에 따라 계산비용이 증가될 수 있으나, 반복계산이 경계점에만 국한되므로 전체 계산량 증가는 미미하다.

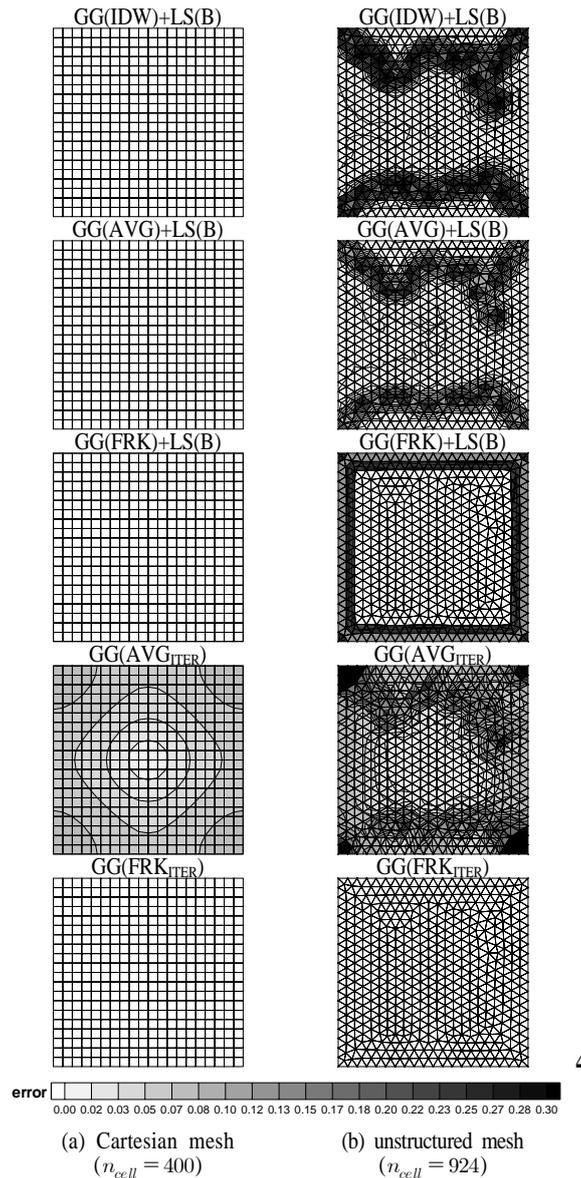


Fig. 3 Errors of reconstructed gradients for the test function

4. 결과 및 검토

본 장에서는 3장에서 소개한 다양한 압력기울기 재구성 기법 및 수정된 압력기울기 재구성 기법을 엄밀해가 존재하는 해석함수에 대해 적용하여 재구성된 기울기의 정확도를 확인하였다. 그리고 다양한 압력기울기 재구성기법을 이용하여 공동 내부의 자연대류 문제와 2상 유동인 벽면에서의 비등 문제를 해석하였으며, 압력기울기 재구성기법에 따른 수치해의

거동 특성을 파악하였다.

4.1 기울기 재구성 기법 테스트

엄밀해가 존재하는 선형함수에 대한 기울기를 재구성함으로써 3장에서 소개한 기울기 재구성기법의 정확도를 확인하였다. 재구성된 기울기의 정확도를 파악하기 위해 사용된 선형함수는 다음과 같다.

$$f(x,y) = x + y \tag{21}$$

식 (21)의 선형함수는 전 계산영역에 대해 $\nabla f = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ 의 기울기를 가진다. 본 테스트에서는 다음의 기울기 재구성기법을 이용하여 수행되었다.

- (a) GG(IDW) + LS(B) : 내부셀은 식 (14)의 거리역가중치에 기반한 Green-Gauss방법을 사용하고, 경계셀은 least-square 방법을 사용한다.
- (b) GG(AVG) + LS(B) : 내부셀은 식 (15)의 단순평균에 기반한 Green-Gauss방법을 사용하고, 경계셀은 least-square 방법을 사용한다.
- (c) GG(FRK) + LS(B) : 내부셀은 식 (18) 및 (17)을 이용한 Frink의 Green-Gauss방법을 사용하고, 경계셀은 least-square 방법을 사용한다.
- (d) GG(AVG_ITER) : 모든 셀에 대해 식(15)를 초기값으로 사용하고 식 (16)을 이용하여 100번의 반복 계산을 수행한다.
- (e) GG(FRK_ITER) : 3.2절에 제시한 수정된 Frink의 Green-Gauss 방법을 사용한다.

(a)부터 (c)까지의 방법은 Green-Gauss 방법에서 발생하는 경계셀 오차를 제거하기 위해 least-square 방법을 경계셀에 적용한 것이며, (d)는 반복적으로 기울기를 재구성하는 방법이다. 그리고, (e)는 경계점 값을 반복적으로 계산하여 기울기를 재구성하는 방법으로 Frink의 방법을 수정한 것이다. 재구성된 기울기에 대한 정확도 테스트는 Fig. 3에 나타난 바와 같이 400개의 사각형 격자요소로 구성된 직교 격자계와 924개의 삼각형 격자요소로 구성된 비정렬 격자계에 대해 수행되었다.

Fig. 3은 각 기법을 이용하여 재구성된 기울기의 오차를 나타낸 것이다. 직교성을 보장하고 격자 간격이 동일한 직교 격자계에서는 GG(AVG_ITER) 방법을 제외하고 모두 정확하게 기울기를 재구성하고 있다. GG(AVG_ITER)에서 나타나는 오차는 경계면에서의 값을 격자셀 중심값으로 사용함으로써 발생한 오차가 반복과정을 통해 내부로 전파된 것이다. 비정렬 격자계에서의 GG(IDW)+LS(B)와 GG(AVG)+LS(B)는 직교성이

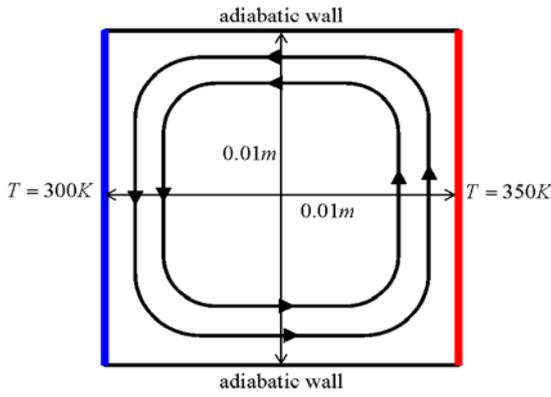


Fig. 4 The buoyancy-driven cavity problem

위배되는 비등방성의 삼각형이 분포하는 영역에서 큰 오차가 발생한다. 이에 반해 GG(FRK)+LS(B)는 비등방성이 존재하는 영역을 포함하여 내부 영역에서는 기울기를 정확하게 계산하나 경계영역에서 오차가 국부적으로 발생하고 있다. 이는 스텝일의 한계로 인해 부정확하게 내삽된 경계점 값이 경계점과 이웃한 내부셀 기울기 계산에 사용됨으로써 발생한 오차이다. GG(AVG_{ITER})의 경우 직교 격자계에서와 유사하게 경계면에서 발생한 오차와 비직교성 영역에서 발생한 오차가 주위로 확산되는 형태를 보인다. 본 연구에서 제안한 GG(FRK_{ITER})는 격자계와 무관하게 정확한 기울기를 계산하고 있으며, 반복계산을 통해 경계에서도 오차 없이 기울기를 재구성하고 있다.

본 테스트를 통해 GG(FRK_{ITER})는 격자의 직교성 또는 등방성과 무관하게 정확한 기울기를 재구성할 수 있으며, 가용될 수 있는 스텝일의 한계로 인해 나타나는 경계셀 오차 또한 제거될 수 있음을 확인하였다.

4.2 공동 내부의 자연대류 문제

압력기울기 재구성 기법의 정확도에 따른 CUPID 코드의 거동특성을 파악하기 위해 공동 내부의 자연대류 문제를 해석하였다. Fig. 4에서와 같이 가로 0.01m, 세로 0.01m인 정사각형 형상에 대해 우측벽면에는 350K의 고온경계조건을 적용하고 좌측벽면에는 300K의 저온경계조건을 적용하여 밀도변화에 따른 자연대류가 발생하도록 하였다. 압력기울기 재구성 기법 정확도가 수치해에 미치는 영향을 파악하기 위해, 4.1절에서 테스트한 격자와 동일한 격자를 이용하여 계산을 수행하였다. 4.1절에서 테스트한 기법들 중 전체 영역에서 오차가 발생하는 GG(AVG_{ITER})를 제외한 GG(IDW)+LS(B), GG(AVG)+LS(B), GG(FRK)+LS(B), 그리고 GG(FRK_{ITER}) 압력기울기 재구성 기법을 이용하여 계산을 수행하였다.

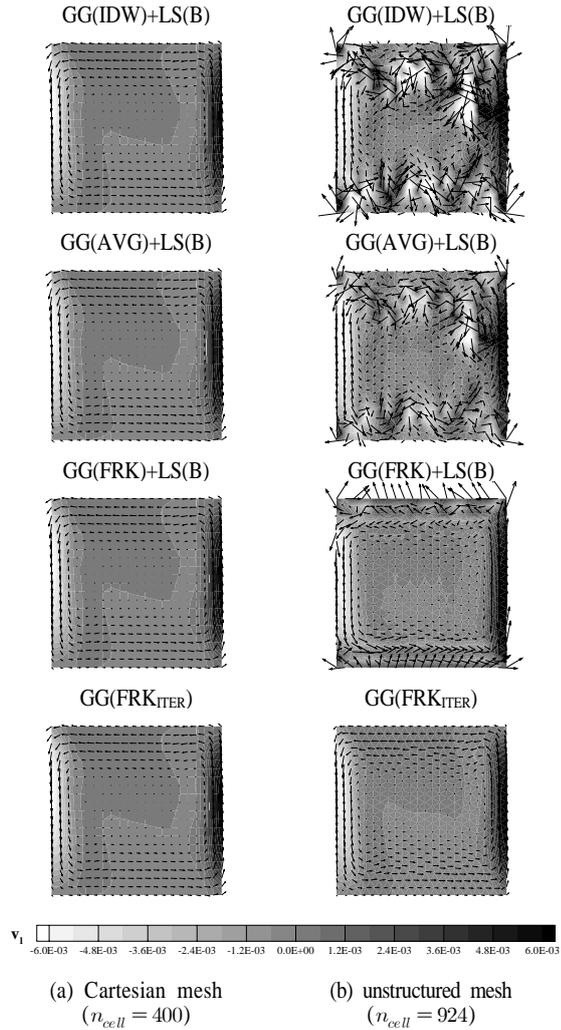


Fig. 5 The vertical velocity distributions of the buoyancy-driven cavity problem

Fig. 5는 각 기울기 재구성기법을 이용하여 계산된 수직속도 분포 및 속도벡터를 나타낸 것이다. 모든 기법이 압력기울기를 정확하게 재구성하는 직교 격자계에서는 모든 압력기울기 재구성 기법에 대해 정상적인 속도 분포를 얻을 수 있었다. 그러나 비정렬 격자계의 경우, 압력기울기의 계산에서 오차가 발생하는 GG(IDW)+LS(B), GG(AVG)+LS(B), 그리고 GG(FRK)+LS(B)에서 비물리적인 속도가 발생하였다. 특히 GG(IDW)+LS(B)와 GG(AVG)+LS(B)에서는 수렴된 해를 얻을 수 없었다. 반면에, 격자계와 무관하게 선형함수의 기울기를 정확하게 재구성할 수 있는 GG(FRK_{ITER})에서는 두 격자계 모두에서 정상적인 유동해를 얻을 수 있었다. 압력기울기에서의

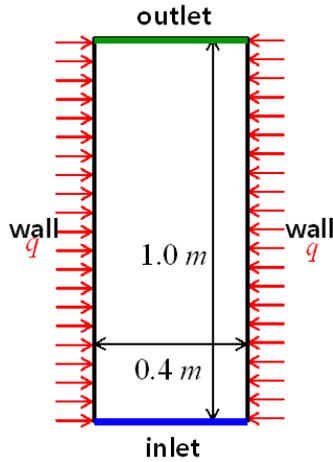


Fig. 6 The schematic of the wall boiling problem

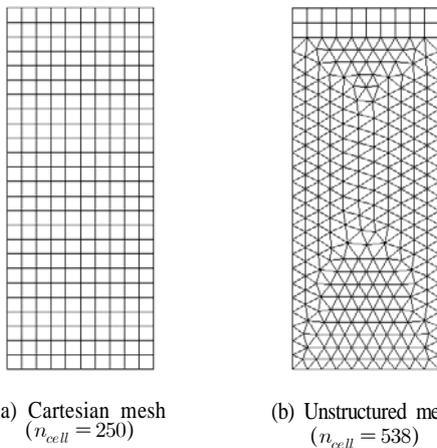


Fig. 7 Computational meshes for the wall boiling problem

오차를 나타내는 Fig. 3과 속도분포를 나타내고 있는 Fig. 5를 비교하면, 압력기울기의 오차가 크게 발생하는 영역에서 비물리적인 속도가 발생하는 것을 확인할 수 있으며, 이는 압력기울기의 정확도가 전체 수치해의 정확도를 결정하는 주요 요인임을 의미한다.

4.3 벽면 비등 문제

압력기울기의 정확도가 2상 유동에서 어떠한 영향을 보이는지 확인하기 위해 관내 벽면에서 비등이 발생하는 문제에 대한 해석을 수행하였다. 계산은 Fig. 6에서와 같이 가로 0.4 m, 세로 1.0 m인 2차원 채널 형상에 대해 수행하였다. 채널 하부 입구경계에서는 452 K의 과냉각된 물이 1.0 m/s의 속도로 유입되도록 속도경계조건을 부과하였으며, 채널 상부인 출

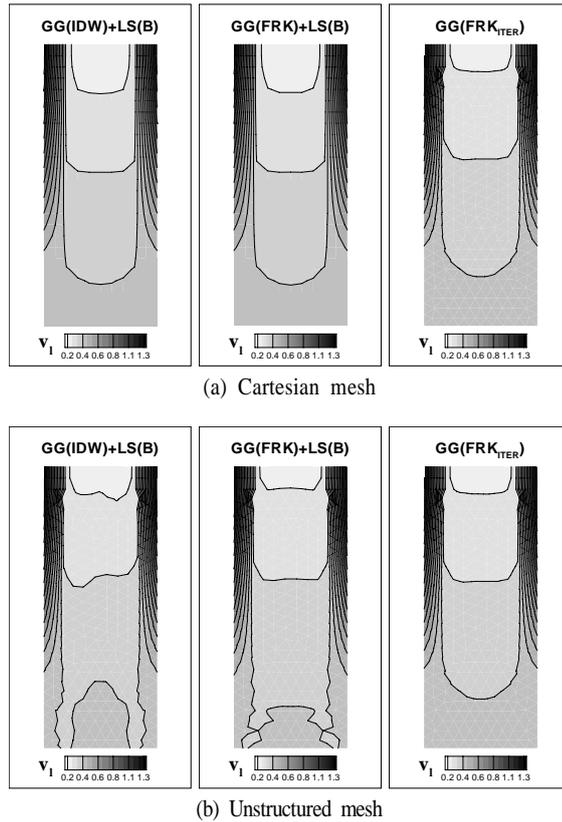


Fig. 8 The velocity distributions of the wall boiling problem

구경계에서는 10기압의 압력경계조건을 부과하였다. 그리고 벽면 부근에서 비등이 발생하도록 채널 양측 벽면에서는 $5 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ 의 균일 열속을 부과하였다. 계산은 Fig. 7에서와 같이 250개의 사각형으로 구성되는 직교 격자계와 538개의 삼각형과 사각형으로 구성된 비정렬 격자계에 대해 수행하였다. 본 문제에서는 공동내부의 자연대류 문제에서 가장 큰 압력기울기 오차를 보인 GG(AVG)+LS(B)를 제외하고 GG(IDW)+LS(B), GG(FRK)+LS(B), 그리고 GG(FRK_ITER) 재구성 방법을 이용하여 계산을 수행하였다.

Fig. 8은 물의 수직속도 분포를 나타낸 것으로 중심속도보다 벽면에서의 속도가 더욱 빠른 전형적인 비등 특성을 보이고 있다. 공동 내부의 자연대류 문제와 유사하게, 직교 격자계에서는 세 압력기울기 방법에 대해 정상적인 속도 분포를 보이나, 비정렬 격자계에서 GG(IDW)+LS(B)와 GG(FRK)+LS(B)을 사용한 경우 입구영역에서 속도의 왜곡이 발생한다. 특히 GG(IDW)+LS(B)의 경우는 비대칭적인 속도분포를 보이고 있으며, 이는 비등방성이 존재하는 내부셀에서의 압력기울기 오차에 기인된 것이다. 본 연구에서 제안한

GG(FRK_{ITER}) 방법을 이용하여 압력기울기를 계산한 경우는 정렬 격자뿐만 아니라 비정렬 격자계에서도 정상적인 속도 분포를 얻을 수 있었다.

5. 결 론

본 연구에서는 원자력 발전소 주요 기기에 대한 다차원 과도상태 2상 유동 해석을 위한 CUPID코드의 정확도 개선을 위해 압력기울기 재구성기법에 따른 ICE기법의 거동 특성을 분석하였다. 현재 버전의 CUPID에서 사용 중인 압력기울기 재구성기법을 포함하여 다양한 형태의 기울기 재구성기법에 대해 논의하였으며, 엄밀해가 존재하는 해석함수에 대해 기울기 재구성 기법의 정확도를 테스트하였다. 단순 내삽 과정을 통해 격자면의 값을 계산하고 Green-Gauss 방법에 기초하여 기울기를 재구성하는 방법은 직교 격자계에서는 정확하게 기울기를 계산할 수 있으나 직교성이 보장되지 않는 비정렬 격자계에서는 매우 큰 오차가 발생함을 확인하였으며, 비정렬 격자계에서도 오차 없이 정확하게 압력기울기를 재구성할 수 있는 수정된 Frink 방법을 제안하였다.

압력기울기 재구성기법의 정확도에 따른 CUPID의 거동특성을 확인하기 위해 단상유동인 공동에서의 자연대류 문제와 2상 유동인 벽면에서의 비등 문제를 해석하였으며, 압력기울기의 부정확성은 비물리적인 속도장을 유발함으로써 수치해의 정확성 및 수렴성을 저하시키는 주요 요인이 됨을 확인하였다. 그리고 본 연구에서 제안한 수정된 Frink 방법은 압력기울기를 정확하게 재구성함으로써 격자의 종류와 무관하게 정상적인 해를 얻을 수 있었다. 본 연구에서 제안한 기울기 재구성기법은 CUPID 수치기법의 개선을 위해 대류항의 2차 정확도 확장 및 점성항의 이산화 과정에도 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 교육과학기술부와 한국연구재단에서 지원하는 원자력 연구개발사업의 일환으로 수행되었다. (Grant code: M20702040002-08M0204-00210).

참고문헌

- [1] 2008, Jeong, J.J., Yoon, H.Y., Park, I.K., Cho, H.K. and Kim, J., "A Semi-Implicit Numerical Scheme for Transient Two-Phase Flows on Unstructured Grids," *Nuclear Engineering and Design*, Vol.238, pp.3403-3412.
- [2] 2009, Yoon, H.Y., Park, I.K., Lee, Y.J. and Jeong, J.J., "An Unstructured SMAC Algorithm for Thermal Non-Equilibrium Two-Phase Flows," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol.36, pp.16-24.
- [3] 1971, Harlow, F.H. and Amsden, A.A., "A Numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds," *Journal of Computational Physics*, Vol.8, pp.197-213.
- [4] 1975, Harlow, F.H. and Amsden, A.A., "Numerical Calculation of Multiphase Fluid Flow," *Journal of Computational Physics*, Vol.17, pp.19-52.
- [5] 1983, Rhie, C.M. and Chow, W.L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA Journal*, Vol.21, pp.1525-1532.
- [6] 1999, Jeong, J.J., Ha, K.S., Chung B.D. and Lee, W.J., "Development of a Multi-Dimensional Thermal-Hydraulic System Code, MARS 1.3.1," *Annals of Nuclear Energy*, Vol.26, pp.1611-1642.
- [7] 1997, Mathur, S.R. and Murthy, J.Y., "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes," *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol.31, pp.195-215.
- [8] 2002, Murthy, J.Y. and Mathur, S.R., *Draft Note on Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer*, Purdue University.
- [9] 1994, Frink, N.T., "Recent Progress Toward a Three-Dimensional Unstructured Navier-Stokes Flow Solver," *AIAA Paper* 94-0061.
- [10] 1992, Rausch, R.D., Batina J.T. and Yang, H.T.Y., "Spatial Adaptation of Unstructured Meshes for Unsteady Aerodynamic Flow Computations," *AIAA Journal*, Vol.30, pp.1243-1251.