낮은 Mach수유동 해석을 위한 Preconditioning 가중계수의 의존성

안 영 준,[1] 신 병 록*[2]

DEPENDENCE OF WEIGHTING PARAMETER IN PRECONDITIONING METHOD FOR SOLVING LOW MACH NUMBER FLOW

Y.J. An[1] and B.R. Shin*[2]

A dependence of weighting parameter in preconditioning method for solving low Mach number flow with incompressible flow nature is investigated. The present preconditioning method employs a finite-difference method applied Roe's flux difference splitting approximation with the MUSCL-TVD scheme and 4th-order Runge-Kutta method in curvilinear coordinates. From the computational results of benchmark flows through a 2-D backward-facing step duct it is confirmed that there exists a suitable value of the weighting parameter for accurate and stable computation. A useful method to determine the weighting parameter is introduced. With this method, high accuracy and stable computational results were obtained for the flow with low Mach number in the range of Mach number less than 0.3.

Key Words : 가중계수(Weighting Parameter), 전처리법(Preconditioning Method), Runge-Kutta 해법(Runge-Kutta Method) MUSCL-TVD 해법(MUSCL-TVD Scheme), 후향계단(Backword-facing Step), 낮은 Mach수 유동(Low Mach Number Flow)

1. 서 론

일반적으로 전산유체역학에 의한 해법은 높은 Mach수의 압축성 유동 해석을 위한 밀도 기반의 해석 기법과 낮은 Mach수의 비압축성 유동을 해석하기 위한 압력 기반의 해석 기법으로 분류되어 연구되어 왔다. 그러나 실제 유동장에서는 압축성 유동과 비압축성 유동이 따로 존재하지 않고 함께 공존하는 경우가 많다. 특히 고속 액류중에 발생하는 캐비테이션 유동은 압축성의 성격과 비압축성의 성격이 공존하는 대표적인 유동장이다. 이러한 실제 유동장을 해석하기 위해서 많은 연구자들이 압축성 유동해석 기법을 이용하여 비압축성 유동장까지 해석하는 기법을 연구하여 왔다. 하지만 일반적인 압축성 유동해법을 비압축성 유동장에 적용할 경우 지배방정식의 고유값이 분산되어 계산과정에 있어서 수렴성이 나빠지거나 수렴하지 않는(stiffness) 특성을 가지게 된다[1]. 따라서 수렴성의 저하를 막기 위해 일반적으로 전처리법(preconditioning method)이 사용되고 있으며, 이 방법은 Chorin[2]의 정상상태 비압축성 유동해석을 위해 연속방정식에 압력의 시간 미분항을 넣은 인공압축성(artificial compressibility) 해법에 기반을 두고 있다. Turkel[3]은 정상상태 해석이 가능한 Chorin의 방법을 일반화하여 연속방정식과 운동방정식에 대해 인공적인 시간 미분항에 매개변수를 추가함으로써 수렴속도를 가속시켰으며, 이 매개변수를 조절하여 낮은 Mach수의 유동장에 대해 계산이 가능한 전처리법을 연구하였다. 이외에도 Choi 와 Merkle[4], van Leer[5], Weiss[6] 등 많은 연구자들이 전처리법에 대한 연구를 진행하였다. 최근 Shin 등[7]은 균질평형모델 개념을 이용하여 항공기의 이착륙, 정속비행과 수중운동체의 캐비테이션 유동과 같이 넓은 범위의 Mach수를 갖

접수일: 2010년 5월 27일, 수정일: 2010년 6월 26일,
게재확정일: 2010년 6월 28일.
1 정회원, 창원대학교 대학원 기계공학과
2 종신회원, 창원대학교 기계공학과
* Corresponding author, E-mail: brshin@changwon.ac.kr

는 유동장에 대해 유체의 상변화 등을 고려한 전처리법을 제안하였다.

본 연구에서는 캐비테이션 유동해석을 위하여 Shin 등[8]이 제안한 기-액 2상류 해법을 비압축성 유동에서 압축성 유동장까지 해석할 수 있도록 전처리 한 후 후향계단의 표준문제에 적용하여, preconditioning 가중계수의 의존성에 대해 조사하였다.

2. 수치해법

2.1 Preconditioned Navier-Stokes 방정식

Shin 등이 제안한 기-액 2상 유동해법[8]은 압축성 Navier-Stokes 방정식에 기상(Gas phase)에 대한 질량보존식을 하나 더 추가한 것이다. 원시변수 벡터 $\boldsymbol{W}=[p,u,v,T,Y]^T$를 이용하여 낮은 Mach수 유동장에 대한 해석을 위해 preconditioning을 가하고 곡선좌표계의 식으로 나타내면, 2차원 유동에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}+\frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E_v})}{\partial \xi}+\frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F_v})}{\partial \eta}=0 \tag{1}$$

여기서, $\boldsymbol{E}$와 $\boldsymbol{F}$는 플럭스 벡터, $\boldsymbol{E_v}$와 $\boldsymbol{F_v}$는 점성항, Γ^{-1}은 전처리 행렬(Preconditioning Matrix)라 부르며 구체적으로 다음과 같다.

$$\Gamma^{-1}=\begin{pmatrix} \theta+\rho_p & 0 & 0 & \rho_T & \rho_Y \\ u\theta+u\rho_p & \rho & 0 & u\rho_T & u\rho_Y \\ v\theta+v\rho_p & 0 & \rho & v\rho_T & v\rho_Y \\ H\theta+H\rho_p^{-1} & \rho u & \rho v & \rho C_p+H\rho_T & H\rho_Y \\ Y\theta+Y\rho_p & 0 & 0 & Y\rho_T & \rho+Y\rho_Y \end{pmatrix}$$

여기서 preconditioning 매개변수 θ는 예를 들면 Choi & Merkle[4]과 Weiss & Simth[6]의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\theta=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}$$

$$a^2=\min\left[c^2,\max\left(|\boldsymbol{u}|^2,\beta|U_0|^2\right)\right] \tag{2}$$

여기서, $|U_0|$는 입구측의 평균 자유 유동 속도와 같은 고정된 기준값이고, c는 음속, β는 부하를 조절할 수 있는 경험상수이다.

2.2 상태방정식

기-액 2상 유동은 두 상간의 물질이동에 따른 밀도변화가 발생하기 때문에 기본적으로 이들이 고려되는 지배방정식이 요구된다. 일반적으로 액상에 대한 일반 상태방정식은 포화증기 상태의 증기압에서부터 비교적 높은 압력 범위에서 고안된 Tammann[9]형을 이용하고, 기상에 대해서는 이상기체의 상태방정식을 이용한다. 이 두 식을 국소평형상태 하에서 선형결합을 하면 다음과 같은 기-액 2상 국소균질매체에 대한 상태방정식을 유도할 수 있다[8,10].

$$\rho=\frac{p(p+p_c)}{K(1-Y)p(T+T_c)+RY(p+p_c)T} \tag{3}$$

여기서, p, T, ρ는 각각 압력, 온도, 밀도를 나타내며, R은 기체상수이다. 또 식 (3)에서 Y는 기체의 질량분율(quality)을 나타내는 것으로 $Y=0$일 때는 완전 액상, $Y=1$일 때는 완전 기상을 나타낸다.

한편, 식 (3)에 대한 기-액 2상 매체에서의 음속(c)은 열역학적 관계식을 이용하여 정의 할 수 있으며, 구체적으로 다음과 같이 유도된다[10].

$$c^2=\frac{C_p\tilde{p}^2 p}{\rho\tilde{p}^2(C_p-YR)-C_p\tilde{Y}\rho K\tilde{T}p_c-\tilde{Y}Kp\tilde{p}} \tag{4}$$

여기서 $\tilde{p}=p+p_c$, $\tilde{T}=T+T_c$, $\tilde{Y}=1-Y$, C_p는 기-액 2상 매체에서의 비열비로, $C_p=YC_{pg}+(1-Y)C_{p\ell}$이고, 여기서 하첨자 ℓ은 액상을 g는 기상을 나타낸다.

2.3 수치해법

2차원 전처리된 지배방정식 (1)은 유한차분 Runge-Kutta 양해법을 사용하여 수치적으로 적분하고 수치적 안정성을 강화하기 위해 3차 정확도의 MUSCL-TVD 스킴을 고려한 Roe의 유속차분리법(FDS : flux difference splitting)[11]을 적용하였다. 예를 들어 유속벡터 $\boldsymbol{E}$에 대한 공간 위치 i에서의 차분식은 $(\partial \boldsymbol{E}/\partial\xi)=(\boldsymbol{E_{i+1/2}}-\boldsymbol{E_{i-1/2}})/\Delta\xi$과 같이 쓸 수 있고, Roe의 FDS를 바탕으로 하는 근사 Riemenn 해법을 적용하면 수치유속 $\boldsymbol{E_{i+1/2}}$는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E_{i+1/2}}=\frac{1}{2}\ \{&\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i+1/2}}\right)+\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{i+1/2}}\right)\\ &-\Gamma^{-1}_{i+1/2}\left(\boldsymbol{L_p}^{-1}|\Lambda|\boldsymbol{L_p}\right)_{i+1/2}\left(\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{i+1/2}}-\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i+1/2}}\right)\}\end{aligned} \tag{5}$$

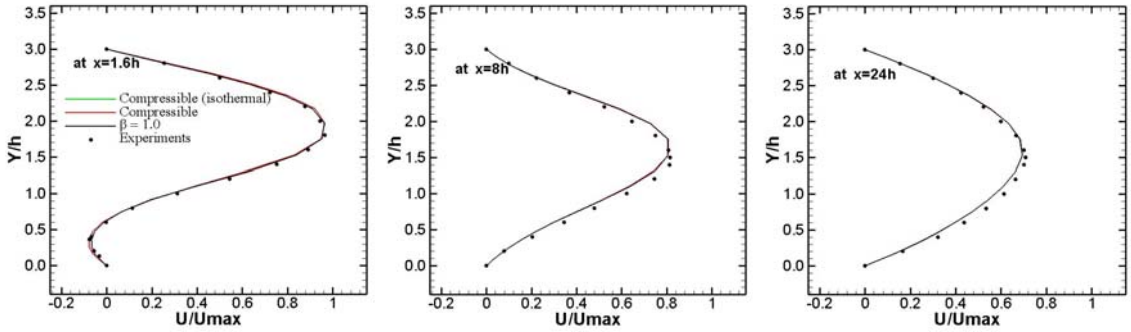


Fig. 1 Comparison of velocity profiles for a backward-facing step at several downstream sections

여기서, 상첨자 R, L은 각각 계산셀의 우측 및 좌측의 경계값을 의미한다. 또한 Λ는 $\Gamma\partial \boldsymbol{E}/\partial \boldsymbol{W}$의 고유값으로 구성된 대각행렬이다. L_p와 L_p^{-1}는 좌고유벡터로 구성된 행렬과 그 역행렬이고, 각 성분은 밀도의 평방근으로 평가한 Roe의 평균값으로 구한다. 또 식 (5)에서 물리량 $\boldsymbol{W}_{i+1/2}^{L,R}$은 최대 3차 정확도의 공간 해상도를 얻을 수 있는 MUSCL-TVD법을 적용하여 안정하게 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_{i+1/2}^{L} &= \boldsymbol{W}_i + (1/4)\{(1-\kappa)D^+\boldsymbol{W}_{i-1/2} + (1+\kappa)D^-\boldsymbol{W}_{i+1/2}\}\\ \boldsymbol{W}_{i+1/2}^{R} &= \boldsymbol{W}_{i+1} - (1/4)\{(1-\kappa)D^-\boldsymbol{W}_{i+3/2} + (1+\kappa)D^+\boldsymbol{W}_{i+1/2}\}\end{aligned} \tag{6}$$

여기서 유속 제한값 $D\boldsymbol{W}$와 minmod함수는

$$D^+\boldsymbol{W}_{i-1/2} = \mathrm{minmod}(\delta\boldsymbol{W}_{i-1/2}, b\delta\boldsymbol{W}_{i+1/2})$$

$$D^-\boldsymbol{W}_{i-1/2} = \mathrm{minmod}(\delta\boldsymbol{W}_{i+1/2}, b\delta\boldsymbol{W}_{i-1/2})$$

$$\delta\boldsymbol{W}_{i+1/2} = \boldsymbol{W}_{i+1} - \boldsymbol{W}_i$$

$$\mathrm{minmod}(x,y) = \mathrm{sign}(x)\max[0, \min\{|x|, y\,\mathrm{sign}(x)\}]$$

이고, 선형 결합 매개변수 κ는 $-1 \le \kappa \le 1$의 범위에서 결정되고 $\kappa = 1/3$에서 3차의 정확도를 갖는다[12]. 또 플럭스의 기울기는 제한 함수 b로 조절되고, $1 \le b \le (3-\kappa)/(1-\kappa)$의 범위를 갖는다. 이번 계산에서는 $b=4$를 택하여 상류화 영역을 최소화 하였고, $\kappa = 1/3$을 적용하였다. 한편, 방정식(1)의 시간적분에 대해서는 다음과 같은 4차 정확도의 Runge-Kutta법을 이용하여 적분하였다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}^{(1)} &= \boldsymbol{W}^n - \frac{1}{4}\Delta t\Gamma\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q}^n)\\ \boldsymbol{W}^{(2)} &= \boldsymbol{W}^n - \frac{1}{3}\Delta t\Gamma\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q}^{(1)})\\ \boldsymbol{W}^{(3)} &= \boldsymbol{W}^n - \frac{1}{2}\Delta t\Gamma\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q}^{(2)})\\ \boldsymbol{W}^{(n+1)} &= \boldsymbol{W}^n - \Delta t\Gamma\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q}^{(3)})\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})$는 아래와 같이 정의 된다.

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q}) = \frac{\partial(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}_v)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_v)}{\partial\eta}$$

3. 후향계단 유동의 해석

3.1 격자생성 및 경계조건

본 연구에서 이용한 후향계단은 입구폭 H와 step 높이 h를 사용하여 확장비((H+h)/H)가 1.5인 Morgan[13]과 같은 형상이다. 계산 격자는 90×21이며 입구부에는 Poiseuille 유동분포를 적용하였으며, 출구부에는 압력 일정의 Dirichlet 조건을 주었다. 그리고 모든 벽면에서는 no-slip조건을 주었다. 또한 작동유체는 20℃의 이상기체이며 Reynolds수 (Re)는 입구최대유속 $U_{\max}$, 유동장의 입구폭 H를 기준으로 정의된다.

3.2 수치해법의 검증

표준문제에 의한 검증을 위해 계산된 유동은 Re=300에 입구최대 Mach수가 0.22인 비압축성 유동에 가까운 유동이다. Fig. 1은 수치해석 결과와 실험값과의 비교를 나타낸 것으로 step의 높이 h를 기준으로 하여 step부에서 1.6h, 4h, 8h, 24h 지점에서의 속도분포를 나타낸 것이다. 본 계산에서는 전처리를 가한 압축성 유동해법으로 낮은 Mach수 유동의 해석 정도

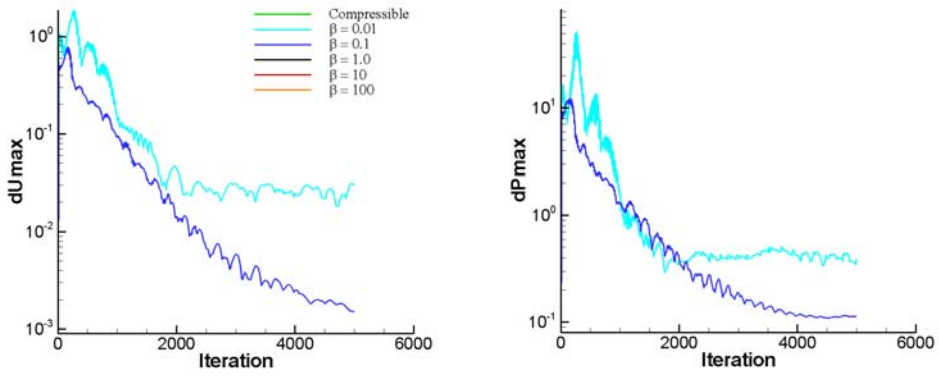


Fig. 2 Convergence history at M=0.22 and $\Delta t=1.7\times10^{-2}$

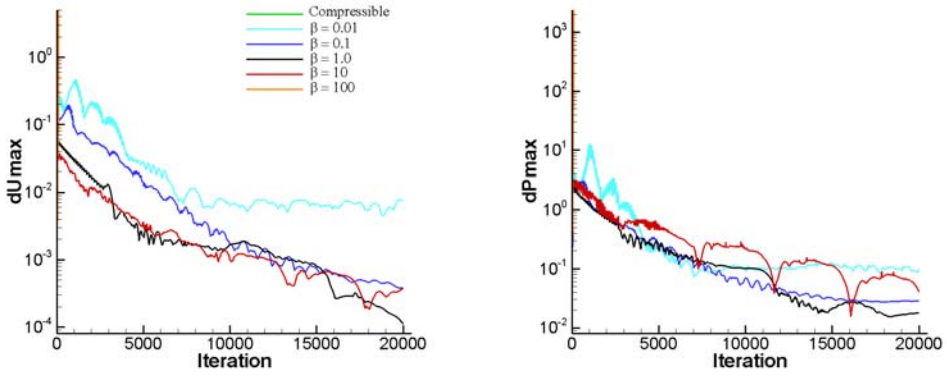


Fig. 3 Convergence history at M=0.22 and $\Delta t=4.2\times10^{-3}$

를 파악하기 위해 상태방정식 (3)에서 아예 Y=1로 고정한 이상기체에 대한 계산으로 조사하였으며, 4차 정확도의 Runge-Kutta법을 이용하여 해의 정확성을 높였다. 식 (2)의 preconditioning 가중계수에 대해서는 β=0.01 ~ β=100까지 넓은 범위에 걸쳐 실시하였으며, 이 유동의 경우에는 β=1.0이 실험값에 제일 가까워 여기에선 β=1.0에 대한 결과만의 비교를 나타내고 있는데, 유동장 전역에 걸쳐 좋은 결과를 보이고 있다. 한편, 이 그림에서는 압축성 코드에 의한 계산결과를 함께 나타내었는데, 이 정도의 Mach수 유동에 대해서는 압축성 유동의 해법으로도 일부분 해석이 가능함을 알 수 있다. 또한, 등온과정을 가정한 압축성 해법의 계산에 대해서도 온도변화가 거의 없고 압축성 코드에 의한 결과와 거의 일치함을 확인하였다. 이와 같은 현상은 유동자체가 온도와 밀도의 변화가 작은 비압축성 유체의 특성을 나타내고 있음을 시사한다.

3.3 Preconditioning 가중계수의 의존성

preconditioning 가중계수는 식 (2)와 같이 주어지며, 여기에는 경험적으로 정해야 하는 상수 β가 포함되어 있다. 따라서 전처리법을 사용함에 있어 수치해석의 최적 해를 구하기 위해서는 적정한 β를 구하는 것이 문제가 되고, 이를 위하여 입구에서 최대 Mach수 M=0.22와 이것의 1/10인 M=0.022 유동에 대하여 β의 의존성을 조사하였다. Fig. 2, 3은 Re=300, M=0.22인 유동에 대하여 입구폭 H와 평균속도 U_0로 무차원화된 시간간격(Δt)과 β의 변화에 따른 속도와 압력에 대한 수렴이력을 나타낸 것이다. 시간간격이 1.7×10^{-2}인 경우에는 β=1.0 이상에서는 발산하였고, β=0.1보다 β값이 0.01일 때 속도, 압력의 수렴속도가 다소 늦다 (Fig. 2에서 β=1.0과 0.1의 결과는 거의 중첩되어있다). 시간간격을 4.2×10^{-3}으로 낮출 경우에는 β=10까지 계산이 가능하나 수렴성은 β=1.0보다 오히려 떨어진다. 이때도 압축성 유동해법과 β=100에 대해서는

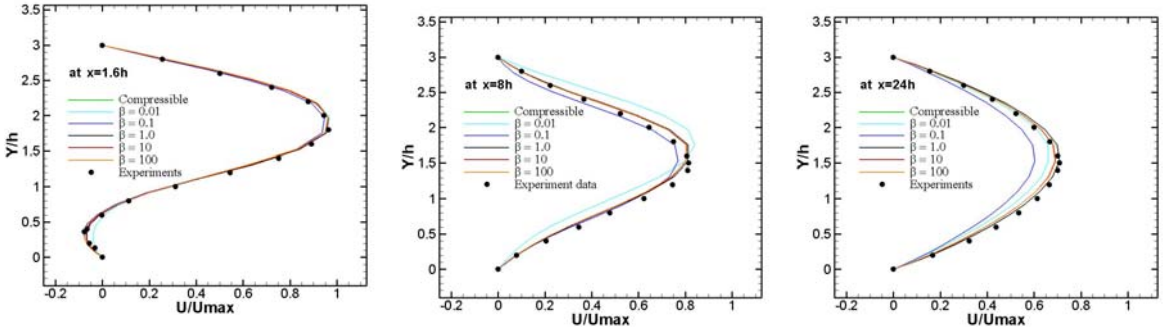
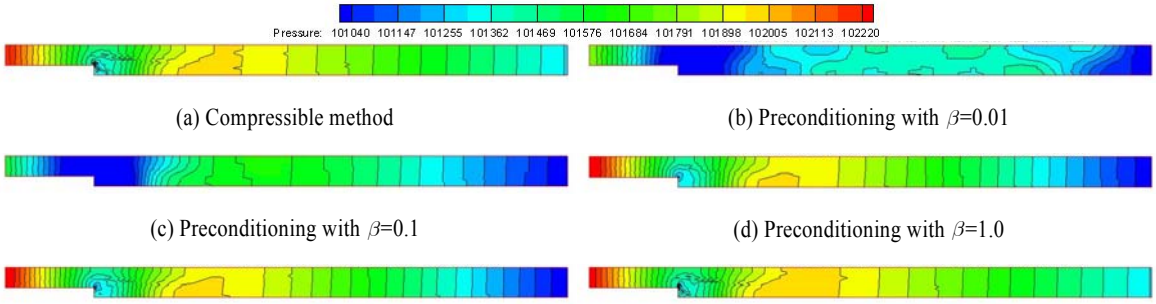


Fig. 4 Comparison of velocity profiles at several downstream locations, M=0.22 and $\Delta t=4.2\times10^{-3}$



(a) Compressible method (b) Preconditioning with β=0.01

(c) Preconditioning with β=0.1 (d) Preconditioning with β=1.0

(e) Preconditioning with β=10 (f) Preconditioning with β=100

Fig. 5 Pressure contours for flow over the backward-facing step at several β

발산하였다. 시간간격 변화에 대한 수렴이력의 비교를 통하여 β값이 작을수록, 즉 식 (2)에서 가중계수 θ가 클수록 큰 시간간격에서도 안정한 계산이 가능함을 알 수 있다. 수렴속도에 대해서는 β=1.0과 같이 적정한 값이 존재하며, 적정값 상하영역에서는 수렴성이 떨어진다. 한편, 식 (2)에서 $\beta|U_0|>c$ 이거나 유동속도가 음속보다 큰 경우, $U>c$때는 θ=0이 되어 수치해법은 압축성 해법으로 자동 전환되고, M=0.22인 유동에서 β=100인 경우가 여기에 해당된다.

Fig. 4는 넓은 범위의 β에 대해 해석이 가능한 4.2×10^{-3}의 시간간격에서 계산결과와 실험값의 속도분포 비교를 나타낸다. 전체적으로 실험값보다 과소 또는 과대평가하고, 하류로 내려갈수록 큰 오차를 발생함을 알 수 있다. 이에 반해 β의 값이 1.0인 경우 수렴속도가 빠르고 가장 낮은 잔차를 갖는 만큼 유동장 전 영역에 걸쳐 실험값에 매우 근접한 결과를 보인다. 참고로 이 그림에는 발산하지 않을 정도의 작은 시간간격으로 계산된 압축성해법에 의한 결과와 β=100을 이용한 결과도 함께 나타내었다. 이 두 해는 서로 일치하고 실험값에 가까우나 β=1.0의 결과보다는 다소 오차가 있다.

Fig. 5의 압력 분포에서는 β=1.0을 중심으로 낮은 β에서는 유동장 하류측에서 압력이 아직 충분히 회복되지 못한 모습을 보이고 있고, 압력차 또한 낮다. β=10 경우에는 β가 커짐에 따라서 해법이 압축성 성격을 띄게되며 그 예로 step을 지나 급확대부 유동의 전단영역 근방에 압력의 불연속이 나타난다. 압축성 유동해석과 β=100에서는 전체적으로 β=0.1, 0.01보다는 압력이 고르게 발달되어 있으나, Re=300에 대한 비압축성 유동의 해[13]에 가까운 β=1.0와 비교하여 압력진동이 현저하다. 또한 재부착점에서의 압력이 주위보다 높아졌음을 확인할 수 있는데, 이는 박리된 유동이 하부벽면에 다시 부착될 때 유동이 벽면에서 충돌하여 압력이 높아졌기 때문이며 유동이 하류로 이동하면서 점차적인 압력강하를 보이고 있다. 더욱이 step후단 역압력 구배의 영역에서 유동박리가 일어나고 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은 Re=300, M=0.022인 유동에 대하여 β에 따른 속도분포를 나타낸다. β=1.0의 경우 앞서 살펴본 M=0.22 유동의 경우와 달리 후향계단의 step부를 지나 초기에는 실험값에 비교적 일치하지만, 하류로 이동할수록 실험값과의 오차는 증가

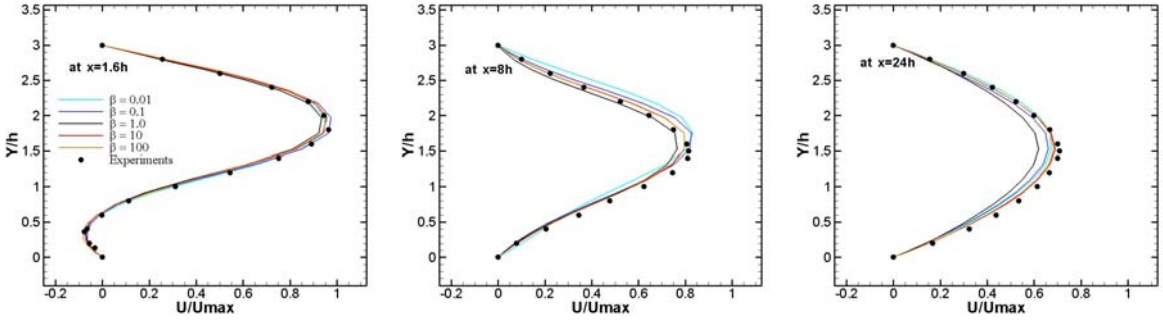


Fig. 6 Comparison of velocity profiles for a backward-facing step at M=0.022 and Re=300

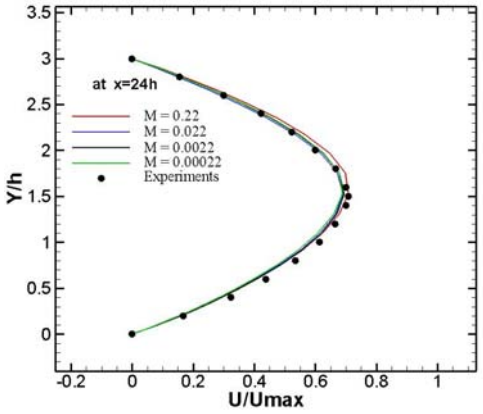


Fig. 7 Velocity profiles at several Mach numbers with β=50

한다. 거꾸로 β=0.01과 β=0.1의 경우 초기에는 실험값과 비교적 큰 오차가 발생하나 하류로 갈수록 실험값에 근접한다. 그리고 β=10과 β=100을 비교할 때 전반적으로 β=10의 결과가 실험값에 가깝다. 이상의 두 Mach수에 대한 유동해석 결과를 종합해 볼 때 저속의 낮은 Mach수 유동일수록 β값을 증가시킴으로서 해의 높은 정확성을 확보할 수 있음을 알 수 있다.

임의의 Mach수 유동을 안정하고, 비교적 정확하게 해석하기 위해서는 적절한 가중계수의 선택이 필요한데, 위와 같은 사실을 면밀히 분석해보면 적절한 β값을 찾는 불편을 완화할 수 있는 방법을 제안할 수 있다. 즉, 가중계수 식 (2)의 $\beta|U_0|^2$ 대신에

$$\theta = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}$$
$$a^2 = \min\left[c^2, \max\left(|\boldsymbol{u}|^2, \beta U_0 \mathrm{sign}\left(U_0\right)\right)\right] \tag{8}$$

와 같이 나타내므로써 일정한 β값으로 Mach수에 상응하는 Preconditioning 가중계수를 부여할 수 있다.

Fig. 7은 Mach수에 따라 각기 다른 β값을 취하는 대신 예를 들어 β=50으로 고정하고, 입구최대 Mach수를 0.22~0.00022까지 변화시켜 계산하였을 때의 계산결과를 나타낸다. 해법에 따라서 속도변화가 비교적 크게 나타날 수 있는 $x = 24h$의 하류영역에서 매우 낮은 Mach수 유동에 대해서도 비교적 좋은 결과를 보이고 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 압축성 유동해법으로 비압축성 유동장을 계산할 수 있는 Preconditioning 수치해법에 있어서 최적의 Preconditioning 가중계수를 도출하기 위하여 이에 대한 의존성을 조사하고, 그 계수를 구하는 방법을 검토하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) Reynolds수가 300인 후향계단의 표준문제해석을 통하여 MUSCL TVD 해법과 4차 Runge-Kutta 법을 적용한 본 해법은 입구최대 Mach수 M=0.22~0.00022 범위의 낮은 Mach수 유동에 대하여 안정하고 비교적 정확하게 해석할 수 있음을 확인하였다.

(2) 후향계단의 유동해석을 통해 물리적으로 타당한 해를 구하기 위한 Preconditioning 가중계수에서 경험상수 β를 구하는 방법을 제안하였고, β=50은 M<0.3의 범위에서 타당한 해를 제시하였다.

후 기

이 논문은 2008년도 정부재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2008-D00060).

참고문헌

[1] 1997, Reed, C.L. and Anderson, D.A., "Application of Low Speed Preconditioning to the Compressible Navier-Stokes equations," *AIAA-1997-873*.

[2] 1967, Chorin, A.J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, Vol.2, pp.12-26.

[3] 1987, Turkel, E., "Preconditioning Methods for Solving the Incompressible and Low-Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.72, pp.277-298.

[4] 1993, Choi, Y.H. and Merkle, C.L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.105, No.2, pp.207-223.

[5] 1993, Godfrey, A.G. and Leer, B., "Pre conditioning for the Navier-Stokes Equations with Finite-Rate Chemistry," *AIAA-93-0535*.

[6] 1995, Weiss, J.M. and Smith, W.A., "Precon ditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," *AIAA Journal*, Vol.33, No.11, pp.20-50.

[7] 2004, Shin, B.R., et al., "Application of Preconditioning Method to Gas-Liquid Two-Phase Flow Computations," *ASME*, Vol.126, pp.605-612.

[8] 2003, Shin, B.R., et al., "A Numerical Study of Unsteady Cavitating Flows Using a Homogenous Equilibrium Model," *Computational Mechanics*, Vol.30, No.5, pp.388-395.

[9] 1971, Chen, H.T. and Collins, R., "Shock Wave Propagation Past on Ocean Surface," *J. comput. Phys*., Vol.7, pp.89-101.

[10] 2007, 신병록, "캐비테이션 유동해석을 위한 기-액 2상 국소균질 모델," *전산유체공학회지*, 제12권, 제2호, pp.53-62.

[11] 1981, Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.43, pp.357-372.

[12] 2003, Shin, B.R., "A Stable Numerical Method Applying a TVD Scheme for Incompressible Flow," *AIAA J*., Vol.41, No.1, pp.49-55.

[13] 1984, Morgan, K. Periaux, J. and Thomasset, F. (Eds), "Analysis of laminar Flow over a backward facing steps-an experimental investigation," *In Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vol.9, Vieweg, Braunschweig, pp.32-47.