

변분다중스케일법을 이용한 $Re_\tau = 180$ 채널 난류 유동의 대와류모사

장경식,^{*1} 이보현,² 윤범상,¹ 이주성,¹ 노명일¹

LARGE EDDY SIMULATION OF TURBULENT CHANNEL FLOW AT $Re_\tau = 180$ USING VARIATIONAL MULTISCALE METHOD

K. Chang,^{*1} B.H. Lee,² B.S. Yoon,¹ J.S. Lee¹ and M.I. Roh¹

In the present work, LES with new variational multiscale method is conducted on the fully developed channel flow with Reynolds number, 180 based on the friction velocity and the channel half width. Incompressible Navier-Stokes equations are integrated using finite element method with the basis function of NURBS. To solve space-time equations, Newton's method with two stage predictor multicorrector algorithm is employed. The code is parallelized using MPI. The computational domain is a rectangular box of size $2\pi \times 2 \times 4/3\pi$ in the streamwise, wall normal and spanwise direction. Mean velocity profiles and velocity fluctuations are compared with the data of DNS. The results agree well with those of DNS and other traditional LES.

Key Words : 변분다중스케일법(Variational Multiscale Method), 등기하해석(Isogeometric Analysis), 채널유동(Channel Flow)

1. 서 론

유동의 대와류모사(Large Eddy Simulation)를 위한 변분다중스케일기법(Variational Multiscale Method)은 Hughes et al.[1]에 의해 소개된 방법으로써, 기존의 필터를 적용한 지배 방정식 대신에 변분 투영(variational projection)을 사용하여 조밀한 스케일 방정식(fine scale equations)으로부터 에디 점성항을 모델링하는 방법이다. 이로 인해 벽근처 비균일(inhomogeneous) 필터 적용에 의한 에러를 피할 수 있으며 성긴 스케일 방정식(coarse scale equations)의 수치적 일관성(consistency)을 유지할 수 있다.

초기에 제안된 모델의 경우 에디 점성항을 모델링 하는데 있어서 기존의 LES 모델링과 같은 Smagorinsky-type 또는 Dynamic 모델링 방법을 사용하였다. 이러한 변분다중스케일법 (Variational Multiscale Method, 이하 VMS)을 등방성 유동

과 완전 발달된 채널 유동에 적용하여 계산한 결과[2], 기존의 모델링 방법의 결과와 잘 일치하거나 더 나은 결과를 보여주었다. 하지만 너무 성긴 격자에서 지배방정식을 차분화(discretization)할 경우 에너지 전달량이 매우 작게 예측되는 단점을 보여주었다[3]. 최근 들어 Bazilevs et al.[4]은 초기 모델의 단점을 극복하고 기존의 에디 점성항의 모델링 방법을 사용하지 않는 잔류 기반의 변분다중스케일법 (Residual based Variational Multiscale Method)를 제안하였는데, perturbation series 와 fine-scale Green's operator를 적용하여 조밀한 스케일(fine-scale) 지배 방정식의 근사해를 구한 다음 이를 성긴 스케일(coarse-scale) Navier-Stokes 방정식에 적용하는 방법이다. 이 때 근사해의 형태가 성긴 스케일 지배방정식의 잔류(residual)의 형태로 나타나게 되므로 잔류 기반의 VMS라 부른다. 잔류 기반의 VMS의 경우 별도의 에디점성항 모델을 필요로 하지 않고 기존의 LES처럼 박리가 존재하는 유동의 예측 정확도가 RANS 난류 모델 보다 뛰어나다. 특히 이 기법을 유체/구조 연성 해석과 같이 복잡한 형태의 유동에 적용하여 그 가능성을 보였다[5]. 본 연구는 등기하해석 기법을 적용한 유체/구조 연성 해석 코드를 개발하기 이전 단계로서, Bazilevs et al.[4]이 제안한 잔류 기반의 변분다중스케일법 (Residual based Variational Multiscale Method)을 소개하고 전형

접수일: 2010년 3월 12일, 수정일: 2010년 5월 6일,

게재확정일: 2010년 5월 14일.

1 정희원, 울산대학교 조선해양공학과

2 정희원, 울산대학교 대학원 조선해양공학과

* Corresponding author, E-mail: kschang76@ulsan.ac.kr

적인 난류 유동의 형태를 보이는 $Re_\tau = 180$ 채널 유동에 적용하여 그 결과를 기존의 결과들과 비교하고 그 가능성을 살펴보고자 한다.

2. VMS 기법의 정식화

지배방정식으로 비압축성 Navier-Stokes 방정식이 적용되었다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \text{in } Q \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

여기서 $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^d$ 는 유체에 작용하는 힘이며 ν 는 동점도(kinematic viscosity)를 나타낸다.

주어진 식을 약형(weak form)으로 나타내면 아래 변분식과 같이 나타낼 수 있다. V 를 지배방정식의 해와 가중함수(weighting function)의 공간으로써 동일하다고 가정한다.

$$B(W, U) = B_1(W, U) + B_2(W, U, U) = L(W) \quad (3)$$

여기서

$$B_1(W, U) = (w(T^-), u(T^-))_\Omega - \left(\frac{\partial w}{\partial t}, u \right)_\Omega + (q, \nabla \cdot w, p)_Q + (\nabla^s w, 2\nu \nabla^s U)_Q \quad (4)$$

$$B_2(W, U, V) = -(\nabla w U, u \otimes v)_Q \quad (5)$$

$$L(W) = (w, f)_Q + (w(0^+), u(0^-))_\Omega \quad (6)$$

$B_1(\cdot, \cdot)$ 는 bilinear form이며 $B_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ 는 trilinear form으로 정의된다.

약형(weak form)의 해 공간 V 를 식 (7)과 같이 성긴 스케일(coarse scale)과 조밀한 스케일(fine scale)로 나누어 각 스케일의 지배방정식을 분리할 수 있다.

$$V = \bar{V} \oplus V' \quad (7)$$

\bar{V} 는 유한 차원의 공간으로써 실제로 계산되는 값들에 해당되며 V' 는 조밀한 스케일 공간이다. 이를 이용하여 기존의 변분식을 가중함수의 성긴 스케일과 조밀한 스케일로 나누면 다음과 같다.

$$B(\bar{W}, \bar{U} + U') = L(\bar{W}) \quad (8)$$

$$B(W', \bar{U} + U') = L(W') \quad (9)$$

여기서

$$B(\bar{W}, \bar{U} + U') = B_1(\bar{W}, \bar{U}) + B_1(\bar{W}, U') + B_2(\bar{W}, \bar{U}, \bar{U}) + B_2(\bar{W}, \bar{U}, U') + B_2(\bar{W}, U', \bar{U}) + B_2(\bar{W}, U', U') \quad (10)$$

$$B(W', \bar{U} + U') = B_1(W', \bar{U}) + B_1(W', U') + B_2(W', \bar{U}, \bar{U}) + B_2(W', \bar{U}, U') + B_2(W', U', \bar{U}) + B_2(W', U', U') \quad (11)$$

\bar{U} 와 U' 은 각각 앞에서 정의된 \bar{V} , V' 공간에 속하는 값들로써, 분해된 속도 스케일과 미분해 속도 스케일을 의미한다. 식 (11)은 식 (12)로 재정리 할 수 있다.

$$B_u(W', U') + B_2(W', U', U') = \langle W', Res(\bar{U}) \rangle_{V', V'} \quad (12)$$

여기서

$$B_u(W', U') = B_1(W', U') + B_2(W', U', \bar{U}) + B_2(W', \bar{U}, U') \quad (13)$$

$$\langle W', Res(\bar{U}) \rangle_{V', V'} = L(W') - B_1(W', \bar{U}) - B_2(W', \bar{U}, \bar{U}) \quad (14)$$

$Res(\bar{U})$ 는 성긴 스케일에 의한 잔류(residual)를 의미한다. 위 식을 바탕으로 조밀한 스케일에서의 U' 을 \bar{U} 와 $Res(\bar{U})$ 로 나타내어지는 함수의 해로 표현할 수 있다.

$$U' = F'(\bar{U}, Res(\bar{U})) \quad (15)$$

식 (15)를 식 (8)에 대입하여 직접 풀게 되는 식은 다음과 같다.

$$B(\bar{W}, \bar{U} + F'(\bar{U}, Res(\bar{U}))) = L(\bar{W}) \quad (16)$$

Bazilev et al.[4]은 성긴 스케일에서의 잔류 즉 $Res(\bar{U})$ 가 작을수록 U' 값이 0에 가까워진다는 가정을 통해 섭동 급수

(perturbation series)를 적용하여 식 (15)를 급수 전개하면 Green's operator 형태로 나타낼 수 있음을 보였다. 이 경우 Green 함수의 정확한 해를 구하는 것은 불가능하기 때문에 Hughes and Sangalli[6]는 Green's operator에 L^2 -projector를 투영시킨 fine-scale Green's operator를 이용하여 조밀한 스케일의 해를 근사화 할 수 있음을 보였는데, Bazilevs et al.[4]은 이를 이용하여 τ 와 국부 성긴 스케일의 잔류(residual)의 곱으로 비교적 간단한 형태로 나타내어지는 Residual-based VMS 식을 제안하였다.

$$\tilde{U} \approx -\tau Res(\tilde{U}) \quad (17)$$

이때 τ 는 element-wise stabilization operator로써[4] 아래의 fine-scale Green operator 형태의 식에 의해 계산되어진다. Q^e 는 space-time element, $\tilde{G}_{\tilde{U}}'$ 는 fine-scale Green operator를 의미하며 fine-scale Green operator에 의해 계산된 비분해 속도값을 \tilde{U}' 로 나타내었다.

$$\tau|_{Q^e} = \frac{1}{|Q^e|} \int_{Q^e} \int_{Q^e} \tilde{G}_{\tilde{U}}'(x, t; \hat{x}, \hat{t}) dQ d\hat{Q} \quad (18)$$

\tilde{U}' 를 속도 벡터와 압력 변수로 나누어 표현하면,

$$\tilde{U}' = \begin{Bmatrix} \tilde{u}' \\ \tilde{p}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_M I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \tau_C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_M(u^h, p^h) \\ r_C(u^h) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

r_M 과 r_C 는 운동량 방정식과 연속방정식을 통한 잔류(residual)를 나타내며 τ_M 과 τ_C 는 아래 식과 같다.

$$\begin{aligned} r_M(u^h, p^h) &= \frac{\partial u^h}{\partial t} + u^h \cdot \nabla u^h + \nabla p^h - \nu \Delta u^h - f \\ r_C(u^h) &= \nabla \cdot u^h \\ \tau_M &= \left(\frac{4}{t^2} + u^h \cdot G u^h + C_p^2 G : G \right)^{-1/2} \\ \tau_C &= (\tau_M g \cdot g)^{-1} \\ G_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} \\ g_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (20)$$

x_i 는 물리적 공간(physical space)의 좌표를, ξ_k 는 매개변수 공간(parametric space)에서의 좌표를 의미한다. τ_M, τ_C 는

momentum 식과 continuity 식에 해당하는 element-wise stabilization operator 이다. C_i 는 inverse estimate로부터 유도되는 값으로써 36으로 정하였으며, C_i 값은 4를 사용하였다[7].

최종적으로 Residual-based VMS 지배방정식에 대한 차분식은 다음과 같이 표현된다.

$$B^{MS}(W^h, U^h) - L^{MS}(W^h) = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B^{MS}(W^h, U^h) &= B^G(W^h, U^h) \\ &+ (u^h \cdot \nabla w^h + \nabla q^h, \tau_M r_M(u^h, p^h))_\Omega \\ &+ (\nabla \cdot w^h, \tau_C r_C(u^h))_\Omega \\ &+ (u^h \cdot (\nabla w^h), \tau_M r_M(u^h, p^h))_\Omega \\ &- (\nabla w^h, \tau_M r_M(u^h, p^h)) \otimes \tau_M r_M(u^h, p^h)_\Omega \end{aligned} \quad (22)$$

$$L^{MS}(W^h) = (w^h, f)_\Omega \quad (23)$$

$$\begin{aligned} B^G(W^h, U^h) &= \left(w^h, \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)_\Omega - (\nabla w^h, u^h \otimes u^h) \\ &- (\nabla \cdot w^h, p^h)_\Omega + (q^h, \nabla \cdot u^h)_\Omega \\ &+ (\nabla^s w^h, 2\nu \nabla^s u^h)_\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

식 (22)을 살펴보면, 오른쪽 항의 두, 세 번째 항은 유한요소해석에서의 SUPG[8] 또는 GLS[9]와 같은 안정화 항(stabilization term)을 의미하며 나머지 두 항은 residual-based VMS에 해당하는 항이다.

위식을 Jansen et al. [10]에 의해 제안된 generalized- α 방법을 이용하여 적분하였다. 식 (21-24)를 풀기 위하여 Saad and Schultz[11]의 two-stage predictor-multicorrector 기법을 적용한 Newton's method를 사용하였다. 자세한 알고리즘은 Bazilevs et al.[4]에 기술되어있다.

3. Simulation 개요

VMS 기법을 적용한 LES 코드 검증을 위하여 완전 발달된 채널 난류 유동을 해석하였다. 채널 반폭(h)과 마찰 속도(friction velocity)를 기준으로 $Re_\tau = 180$ 에 해당하는 완전 발달된 난류 유동 조건이며, 계산 영역의 크기는 유선 방향, 높이 방향, 폭 방향으로 각각 $2\pi \times 2 \times 4/3\pi$ 로 두었다. 격자 크기는 세 경우가 고려되었으며 각각 $16^3, 32^3$ 와 64^3 이다.

본 연구에서는 NURBS(Non-Uniform Rational B-Splines) [12-13] 기저 함수를 이용한 유한 요소 기반의 등기하해석 기법을

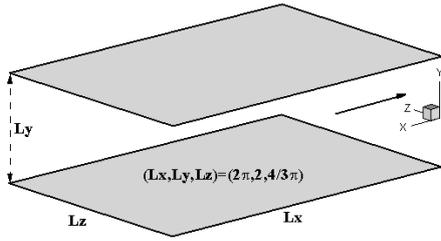


Fig. 1 Computational domain

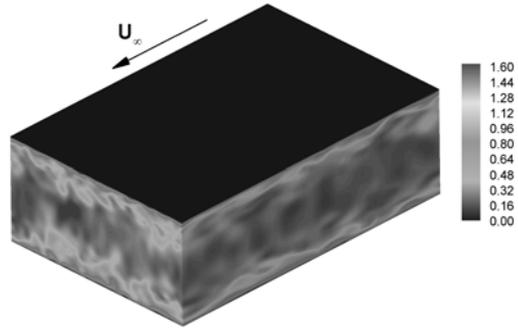


Fig. 3 Instantaneous U-velocity contours

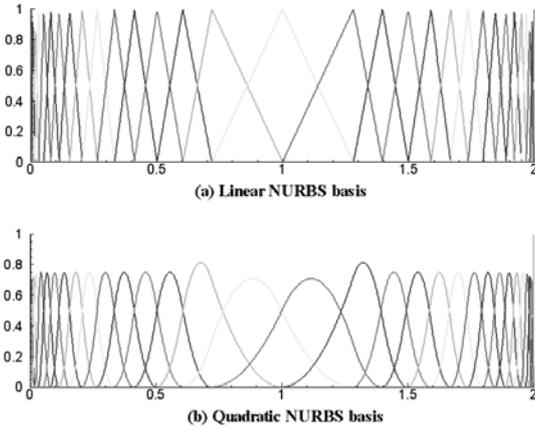


Fig. 2 NURBS basis function of the wall-normal direction

적용한 코드[14]를 사용하였다. 차수에 따른 결과를 연구하기 위해 C^0 -연속적 선형, C^1 -연속적 2차, C^2 -연속적인 3차 노트벡터를 이용하여 이산화 하였다. 유선 방향과 횡 방향으로 는 균일한 노트벡터 (knot vector)를 적용하였지만 벽면 방향으로는 격자의 첫 번째 지점이 $y^+ \approx 1.3$ 안에 위치시키면서 벽 근처 방향으로 stretched 노트벡터를 사용하였다. Fig. 2는 32^3 개의 요소에서 벽면 방향의 C^0 과 C^1 경우의 기저 함수를 보여주고 있다.

층류 유동으로의 수렴을 피하고 난류 유동으로의 빠른 수렴을 위하여 1/7 지수법칙 (power law)을 만족하는 속도 프로파일에 일정 크기의 랜덤 섭동을 추가하여 초기 유동장 속도 조건으로 주었다. 횡 방향 및 벽에 수직 방향으로도 랜덤 섭동을 주어 난류 유동으로 발달시켰다.

$Re_\tau = 180$ 의 채널 유동을 해석하기 위하여 동점도(kinematic viscosity)를 3.57143×10^{-4} 로 정하였다.

경계 조건으로는 유선 방향과 횡 방향으로 주기 조건(periodic condition)을, 채널의 아래와 위의 벽면은 점착(no-slip)된 dirichlet 경계조건을 주었다.

4. 수치해석 결과

Fig. 3은 2차 기저함수를 적용한 32^3 격자계에서 유선 (streamwise) 방향의 순간 등속도 선도를 나타낸 것으로 유선 방향 유동의 섭동(fluctuation)을 잘 묘사하고 있음을 알 수 있다.

유선 방향의 속도와 속도 섭동 (velocity fluctuation)을 시간과 공간에 대하여 평균하여 Kim et al. [15]의 $Re_\tau = 180$ 에 해당하는 직접수치모사 (Direct Numerical Simulation) 결과와 비교하였다.

Fig. 4를 통해 평균 속도 프로파일을 y^+ 와 u^+ 의 벽 단위로 나타내어 비교해보았다. 계산 결과는 각각 C^1 연속성(2차 기저함수)을 갖는 16^3 격자계, C^0 , C^1 , C^2 연속성을 가지는 32^3 격자계, C^0 (선형 기저함수)연속성을 갖는 64^3 에 해당한다.

32^3 격자계의 결과를 살펴보면 2차 또는 3차 기저 함수를 갖는 경우의 속도와 섭동의 프로파일은 직접수치모사 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 하지만 선형 기저 함수 (C^0 연속성)를 적용한 경우에는 점성 저층 (viscous sublayer)까지는 잘 묘사하지만 로그층 (log layer)에서는 과도한 속도 및 섭동 값을 예측하고 있다. C^0 에서 C^1 으로 연속성이 증가할수록 계산 결과는 더욱더 정확해지고 있지만, C^1 에서 C^2 로 변할 경우에는 계산 정확도에 큰 차이를 보이지 못하고 있다.

각각의 방향으로 격자를 2배로 증가시켰을 경우 $16^3 \rightarrow 32^3$, C^1 & $32^3 \rightarrow 64^3$, C^0 , 같은 차수의 기저조건에서 더 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 하지만 1차의 기저함수를 갖는 32^3 격자계의 결과보다 2차의 기저함수를 이용한 16^3 격자계의 결과가 더 정확했으며, 마찬가지로 1차의 기저함수를 갖는 64^3 격자계의 결과보다 2차 기저함수의 32^3 격자계 결과가 정확하였다. 이러한 경향은 Bazilevs et al. [4]의 결과

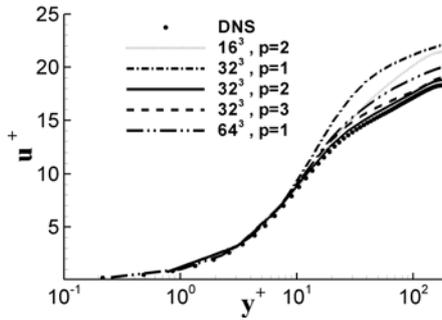


Fig. 4 Mean streamwise velocity profiles

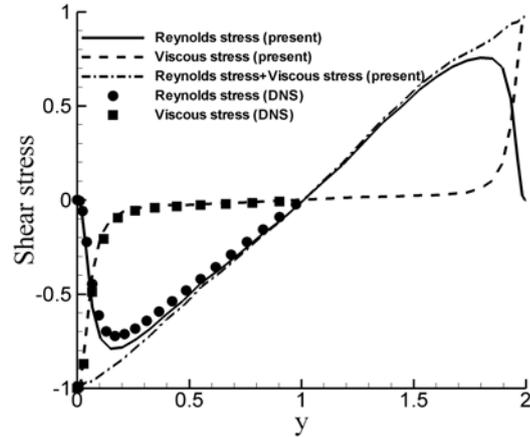


Fig. 6 Shear stress profiles symbols (DNS), Lines (present VMS)

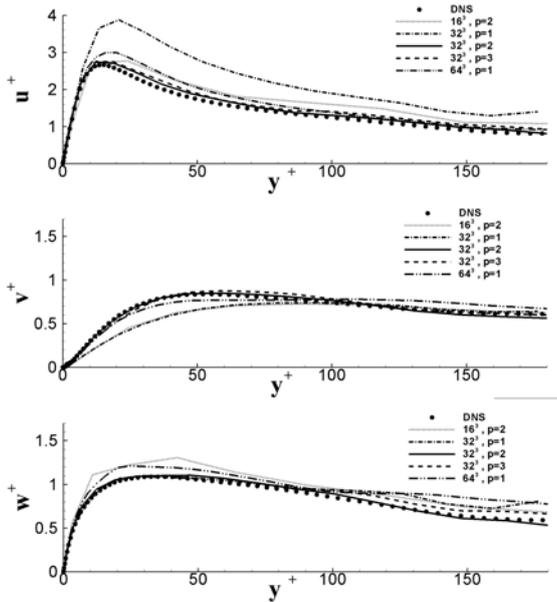


Fig. 5 Mean fluctuation profiles u' , v' , w'

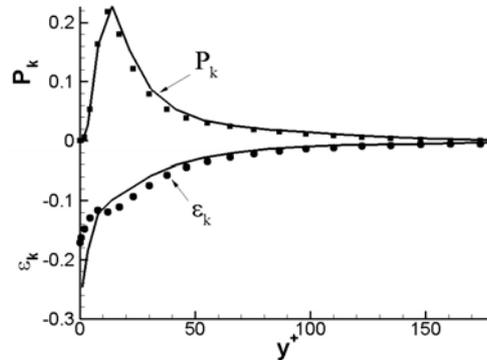


Fig. 7 Production and dissipation plots Symbols (DNS), Lines (present VMS)

에서와 같은 경향을 보이고 있다.

위의 결과들 중에서 직접 수치 모사의 결과와 가장 잘 일치하는 $32^3, C^1$ 의 경우에 대하여 레이놀즈 전단 응력 및 생성항 (production term) 과 소산항 (dissipation term)을 계산하여 비교해 보았다.

Fig. 6을 통해 분해된 레이놀즈 응력 (resolved Reynolds stress) $u'v'$, 점성 전단 응력 (viscous shear stress) $\mu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$ 분포를 나타내었다. 기존의 LES에서 유도되는 에디 점성항에 대한 모델링 과정이 본 연구에서 적용한 잔류 기반의 VMS에는 생략되기 때문에 subgrid 스케일의 응력 부분은 계산되지 않는다. 분해된 레이놀즈 응력과 점성 전단 응력의 합이 거의 선형을 유지하는 것을 알 수 있으며 이는 완전 발달된 유동

의 해를 얻었음을 의미한다. 점성 전단 응력의 경우 벽근처에서만 큰 비중을 차지하고 있다. Kim et al.[15]의 DNS 결과와 비교해보면 두 응력 모두 비교적 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7은 생성항 ($P_k = -u'_i v'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$)과 소산항 ($\epsilon_k = -\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}$)을 벽좌표에 대하여 나타낸 것으로, u_τ^4/ν 향으로 무차원화 하였다. $y^+ = 15$ 근처에서의 생성항의 최대 값(=0.22)을 비교적 정확히(=0.26) 예측하고 있으며 채널 전체 영역에 대하여 잘 모사하고 있다. 소산항의 경우 벽 근처에서 정확히 일치하지 않지만, 기존의 LES 결과[16]와 같은 경향을 보이며 그 이외의 영역에서는 직접 수치 모사 결과와 잘 일치하고 있다.

5. 결 론

완전 발달된 채널의 난류 유동($Re_\tau = 180$)에 Bazilevs et al.[4]가 제안한 Residual을 기반으로 하는 VMS 기법을 적용한 LES 계산을 수행하여 이 기법의 적용 가능성을 살펴보았다.

선형(C^0 -연속) NURBS 기저함수를 적용한 32^3 격자계에서의 결과 값들은 DNS 결과 값보다 다소 크게 예측되는 경향을 보였지만, 2차 또는 3차(C^1 , C^2 -연속)의 NURBS 기저함수를 적용했을 경우에는 DNS 결과와 잘 일치하였다. 하지만 수치 해석을 위해 요구되는 컴퓨터 계산 비용 및 사용 메모리를 고려한다면 3차의 기저함수를 적용하는 경우에 2차의 경우보다 큰 이점이 없음을 알 수 있었다.

그리고 1차의 기저함수를 가지는 64^3 격자계에서의 결과보다 2차의 기저함수를 가지는 32^3 격자계에서의 결과가 DNS 와 더 잘 일치함을 알 수 있었다. 또한 전단 응력, 생성 항 및 소산항과 같은 난류량도 잘 예측하였다.

향후에는 후류 또는 박리가 존재하는 복잡한 유동에 잔류 기반의 VMS를 적용하여 기존의 LES 결과와 비교해 보고 그 예측 정도를 살펴보고자 한다.

후 기

본 연구는 한국과학재단을 통해 교육과학기술부의 세계수준의 연구중심대학육성사업 (WCU) 으로부터 지원받아 수행되었습니다 (R33-2008-000-10150-0).

참고문헌

[1] 2000, Hughes, T.J.R., Mazzei, L. and Jansen, K.E., "Large-eddy simulation and variational multiscale method," *Computing and Visualization in Science*, Vol.3, pp.47-59.

[2] 2001, Hughes, T.J.T., Mazzei, L., Oberai, A.A. and Wray, A.A., "The multiscale formulation of large eddy simulation : decay of homogeneous isotropic turbulence," *Phys. Fluids*, Vol.13, pp.505-512.

[3] 2004, Hughes, T.J.R., Wells, G.N. and Wray, A.A., "Energy transfers and spectral eddy viscosity of homogeneous isotropic turbulence : comparison of dynamic Smagorinsky and multiscale models over a range of discretizations," *Physics of Fluids*, Vol.16, pp.4044-4052.

[4] 2007, Bazilevs, Y., Calo, V.M., Cottrell, J.A., Hughes, T.J.R., Reali, A. and Scovazzi, G., "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation

of incompressible flow," *Comput. Methods Appl. Engrg.*, Vol.197, pp.173-201.

[5] 2008, Bazilevs, Y., Calo, V.M. and Hughes, T.J.R., "Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithm, and computation," *Computational mechanics*, Vol.43, No.1, pp.3-37.

[6] 2007, Hughes, T.J.R. and Sangalli, G., "Variational multiscale analysis : the finescale Green's function, projection, optimization, localization, and stabilized methods," *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.45, pp.539-557.

[7] 1987, Johnson, C., *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, Sweden.

[8] 1982, Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.32, pp.199-259.

[9] 1985, Donea, J., Belytschko, T. and Smolinski, P., "A generalized Galerkin method for steady state convection-diffusion problems with application to quadratic shape function," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.48, pp.25-43.

[10] 1999, Jasen, K.E., Collis, S.S., Whiting, C.H. and Shakib, F., "A better consistency for low-order stabilized finite element methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.305-319.

[11] 1986, Saad, Y. and Schultz, M.H., "GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear system," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol.7, pp.856-869.

[12] 1997, Pigel, L. and Tiller, W., *The NURBS book (Monographs in Visual Communication)*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

[13] 2001, Rogers, D.F., *An Introduction to NURBS with Historical Perspective*, Academic Press, San Diego, CA.

[14] 2005, Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y., "Isogeometric analysis : CAD, finite element, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, pp.4135-4195.

[15] 1987, Kim, J., Moin, P. and Moser, R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.177, pp.133-166.

[16] 2000, Cui, J., Patel, V.C. and Lin, C.-L., "Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow over Rough Surfaces," *IIHR Technical Report*, No.413.