

다중완화시간 가상경계볼츠만법을 이용한 실린더 주위의 난류유동해석

김형민^{*1}

NUMERICAL STUDY ON TURBULENT FLOW OVER CYLINDER USING IMMERSED BOUNDARY LATTICE BOLTZMANN METHOD WITH MULTI RELAXATION TIME

Hyung Min Kim^{*1}

Immersed boundary lattice Boltzmann method (IBLBM) has been applied to simulate a turbulent flow over circular cylinder in a flow field effectively. Although IBLBM is very effective method to simulate the flow over a complex shape of obstacle in the flow field regardless of the constructed grids in the calculation domain, the results, however, become numerically unstable in high Reynolds number flow. The most effective suggestion to archive the numerical stability in high Reynolds number flow is applying the multiple relaxation time (MRT) model instead of single relaxation time(SRT) model in the collision term of lattice Boltzmann equation. In the research MRT model for IBLBM was introduced and comparing the numerical results obtained by applying SRT and MRT. The hydraulic characteristic of cylinder in a flow field between two parallel plate at the range of $Re \leq 2000$ represented and it is also compared the drag and lifting coefficients of the cylinder calculated by IBLBM with SRT and MRT model.

Key Words : 가상격자볼츠만법 (Immersed Boundary Lattice Boltzmann Method), 다중완화시간 (Multiple Relaxation Time), 난류유동 (Turbulent Flow), SGS모델 (Sub Grid Scale Model), 실린더 주위 유동 (Flow Over Cylinder)

1. 서 론

확률적 분포함수를 이용하여 유동해석을 수행하는 레티스 볼츠만법 (LBM : Lattice Boltzmann Method)은 1986[1]년 고안된 이래로 방정식의 구성과 해석방법 그리고 코드의 제작이 용이하며 해석결과 역시 나비스트크방정식의 해와 비교하여 정도가 높다는 평가를 받고 있다. LBM에서 가장 보편적으로 이용되고 있는 모델은 볼츠만방정식의 충돌항을 시간에 대해 1차로 완화시켜 단일완화시간(SRT, Single Relaxation Time)을 갖는 Bhatnagar Gross Krook (BGK)[2]모델과 2차원해석에서 정사각형 격자를 이용하는 D2Q9[3]모델이다. 하지만 D2Q9

모델은 계산영역을 정사각형의 격자로만 구성해야한다는 제한성 때문에 유동장에 위치한 어떤 물체 주위의 유동해석에서 그 외형을 계단형으로 표현해야 하는 단점을 가지고 있다. 이런 단점은 격자점과 일치하지 않는 물체의 외형 테두리에서 확률분포함수를 외삽법으로 결정하는 곡선경계처리법[4-6]이나 레티스볼츠만방정식에 가상의 외형을 표현할 수 있는 외력항을 추가하여 계산영역에 구성된 격자와 독립적으로 형상을 표현하는 가상경계법(IBM : Immersed Boundary Method)을 이용하여 보완하고 있다. 이들 중 IBM은 구성 격자와 독립적으로 물체의 외형을 표현하기 때문에 물체의 자유로운 이동까지 구현할 수 있어 고정뿐만 아니라 이동 물체 주위의 유동해석까지 LBM의 적용범위를 확대시킬 수 있는 최적의 해석법이라고 판단된다. 하지만 IBM을 적용한 LBM은 레이놀즈수가 높은 난류 유동해석에서 수치적으로 불안정해지는 단점을 가지고 있으며 이는 단일완화시간으로 충돌항을 단순화한 SRT모델 대신에 다중완화시간(MRT : Multi Relaxation

접수일: 2010년 3월 2일, 수정일: 2010년 5월 26일,

게재확정일: 2010년 6월 2일

1 정회원, 경기대학교 기계시스템공학과

* Corresponding author, E-mail: pius@kyonggi.ac.kr

Time) 모델을 적용하여 수치적 안정성을 확보할 수 있다.

이 연구에서는 2차원 수평 평판 사이에 놓인 실린더 주위의 유동해석을 통해 실린더의 공력특성을 도출하기 위한 수치해석법으로 실린더의 형상을 격자와 독립적으로 표현할 수 있는 가상격자법과 수치적 안정성을 확보할 수 있는 MRT 모델을 접목한 MRT-IBLBM을 제안하며, 이 해석방법을 검증하기 위하여 $50 < Re < 100$ 범위의 해석결과를 기존의 해석결과와 비교하였으며, $100 < Re \leq 2000$ 범위에서 SRT 모델과 MRT 모델을 적용한 해석결과를 비교하여 IBLBM의 난류유동해석에서 MRT를 적용하는 것이 수치적으로 안정적임을 확인하였다.

2. 수치해석방법

2.1 다중완화시간 레티스볼츠만법

1986년 Frisch[1]등에 의해서 고안된 LBM은 McNamara[7], Higuera[8], Koelman[9] 그리고 Qian[10]등에 의해서 이론적으로 발전하였으며 이들 중 현재 가장 활발하게 활용되고 있는 것은 볼츠만방정식의 충돌항을 시간에 대하여 1차로 완화시키는 BGK[10]모델을 적용한 LBE이다. 이 모델은 대부분의 물리량 계산에 단일한 완화시간을 이용하여 단순하고 적용이 용이하다는 장점을 가지고 있어 현재까지 대부분의 LBM 해석에 이용되고 있지만 레이놀즈수가 높은 유동해석에서 수치적인 안정성이 떨어진다는 단점을 가지고 있다. 이 같은 단점을 보완한 방법이 LBE의 충돌항에 다중완화시간(MRT)[11] 모델을 적용하는 것으로, 9개의 방향을 갖는 정사각형의 격자계인 D2Q9 모델에서 각 방향의 속도 \vec{c}_α 를 이용하여 이산화한 MRT-IBLBE는 식 (1)과 같다.

$$f_\alpha(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) - f_\alpha(\vec{x}, t) = \frac{3}{2} \Delta t \omega_\alpha g_i c_i - M^{-1} \cdot S \cdot (m_\alpha - m_\alpha^{eq}) \quad (1)$$

여기서 M 은 분포함수를 식 (3)과 같은 9개의 모멘트 성분으로 구성시켜주는 행렬식이며, 식 (4)의 관계로 얻어지는 모멘트 성분은 각각 식 (4-10)에서 보는바와 같다.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$m^{eq} = (\rho, e, \epsilon, u_x, q_x, u_y, q_y, p_{xx}, p_{xy}) \quad (3)$$

$$m^{eq} = M \cdot f^{eq} \quad (4)$$

$$e = \frac{a_2}{4} \rho + \frac{g_2}{6} (\vec{j} \cdot \vec{j}) \quad (5)$$

$$\epsilon = \frac{a_3}{4} \rho + \frac{g_4}{6} (\vec{j} \cdot \vec{j}) \quad (6)$$

$$\vec{u} = \rho \vec{j} \quad (7)$$

$$\vec{q} = \frac{c_1}{2} \vec{j} \quad (8)$$

$$p_{xx} = \frac{3}{2} g_1 (j_x^2 - j_y^2) \quad (9)$$

$$p_{xy} = \frac{3}{2} g_3 j_x j_y \quad (10)$$

또한 S 는 MRT 모델의 완화계수로 식 (11)에서와 같이 $S_0 = S_3 = S_5 = 0$ 이며, 그 외 다른 계수들은 모델의 선형안정화로부터 도출된다. 이 연구에서는 $s_1 = 1.64$, $s_2 = 1.54$, $s_4 = s_6 = 1.9$, $s_7 = s_8 = 1/\tau_i$ 를 적용하였다.

$$S = [0, s_1, s_2, 0, s_4, 0, s_6, s_7, s_8] \quad (11)$$

2차원 격자계인 D2Q9 모델에서 평형상태의 입자밀도분포함수(f^{eq})는 Maxwell Boltzmann 분포함수를 이용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f_\alpha^{eq} = \rho w_\alpha \left(1 + \frac{c_{\alpha i} u_i}{C_s^2} + \frac{Q_{\alpha ij} u_i u_j}{2 C_s^4} \right) \quad (12)$$

$$Q_{\alpha ij} = c_{\alpha i} c_{\alpha j} - C_s^2 \delta_{ij} \quad (13)$$

$$\omega_\alpha = \left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \frac{1}{36} \right) \quad (14)$$

이 연구에 적용한 그 밖의 계수들은 $g_1 = g_3 = 2/3$ 그리고 $g_2 = 18$, $g_4 = -18$, $c_1 = -2$, $a_2 = -8$, $a_3 = 4$ 이며 유

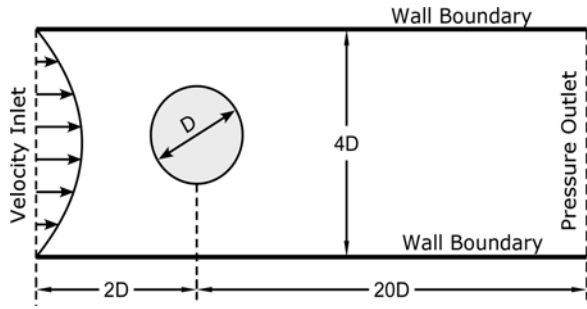


Fig. 1 Computational domain and geometry of the channel

동특성을 결정짓는 유효점성계수 ν_t 와 충돌완화시간 τ_t 와 관계는 다음과 같다.

$$\nu_t = C_s^2(\tau_t - \Delta t/2) \tag{15}$$

여기서 $C_s = c/\sqrt{3}$ 으로 격자유체 내에서의 음속이고 유효점성계수(ν_t)는 점성계수(ν)와 에디점성계수(ν_e)의 합이며, SGS (Sub Grid Scale)모델[12]에서 변형율텐서 S_{ij} 와 관계는 식 (16-17)과 같다.

$$\nu_e = (C_{sgs}\Delta)^2 \bar{S}, \quad \bar{S} = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \tag{16}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{17}$$

LBM에서 변형율텐서는 식 (18)과 같이 비평형상태의 운동량텐서 Π_{ij} 를 이용하여 계산할 수 있다.

$$S_{ij} = -\frac{1}{2\rho\tau_i\Delta t} \frac{C_2}{C_4} \Pi_{ij} \tag{18}$$

식 (15-18)로부터 SGS모델을 적용한 충돌완화시간(τ_t)은 식 (19-20)과 같다.

$$\tau_t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\tau^2 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{C_{sgs}\Delta}{\Delta x} \right)^2 \left(\frac{C_2}{C_4} \right)^2 \sqrt{8\Pi_{ij}\Pi_{ij}} + \tau} \right) \tag{19}$$

$$\Pi_{ij} = \sum_{\alpha=0}^9 c_{\alpha i} c_{\alpha j} f_{\alpha}^{meq} \tag{20}$$

2.2 가상경계법

가상경계법은 Buick와 Greated[13]가 제안한 LBE의 오른쪽에 체적력항, $3/2\omega_{\alpha}g_{\alpha} \cdot c_{\alpha}$,를 추가하여 물체의 형상을 묘사하는 방법을 적용하였다. 체적력항의 \vec{g}_{α} 는 가상경계와 유동장 사이의 관계를 나타내는 것으로 식 (21)과 같으며

$$g_i(\vec{x},t) = \int_{\Omega} \vec{G}(s,t)\delta(\vec{x}-\vec{X}(s,t))ds \tag{21}$$

여기서 $\vec{G}(s,t)$ 는 라그랑지관점의 외력밀도이고 $\delta(\vec{x}-\vec{X})$ 는 델타함수이다. \vec{x}, \vec{X} 는 각각 좌표계와 물체의 외형을 이루는 경계점들의 위치벡터이다. 유동장 내의 구성된 격자계에 델타함수는 D_{mn} 으로 나타내고 이는 식 (22-23)과 같다.

$$D_{mn}(\vec{x}_{mn}-\vec{X}_l) = \frac{1}{h^2} \delta_h \left(\frac{x_{mn}-X_l}{h} \right) \delta_h \left(\frac{y_{mn}-Y_l}{h} \right) \tag{22}$$

$$\delta_h(a) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right) \right) & |a| \leq 2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{23}$$

여기서 $h = \delta_x$ 는 격자간격, 아래첨자 m,n 은 격자점, 그리고 l 은 라그랑지 관점에서 물체의 외형 경계점을 나타낸다. 결과적으로 식 (1)에 첨가된 외력항 \vec{g}_i 는 식 (24)와 같다.

$$g_i(\vec{x}_{mn},t) = \sum_l G_i(s,t) D_{mn}(\vec{x}_{mn}-\vec{X}_l) \Delta s_l \tag{24}$$

여기서 Δs_l 은 물체의 외형을 구성하는 경계점들의 간격이다. 가상경계로 표현된 물체의 외형 및 이 물체의 이동이 유동장에 미치는 영향은 가상의 경계를 이루는 요소점들 사이에 스프링상수를 이용한 복원력에 탄성체의 변형을 고려한 탄성력을 포함시켜 식 (25)와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_i(s,t) = \kappa_1(Z_i(s,t)-X_i(s,t)) + \kappa_2 \left(\frac{\partial^2 X_i(s,t)}{\partial s^2} \right) \tag{25}$$

$\vec{Z}(s,t)$ 는 물체의 가상 경계요소점의 목표점을 나타내며, κ_1 는 κ_2 상수이다. 라그랑지관점의 경계 요소점들의 속도는 식 (26)과 같이 정의된다.

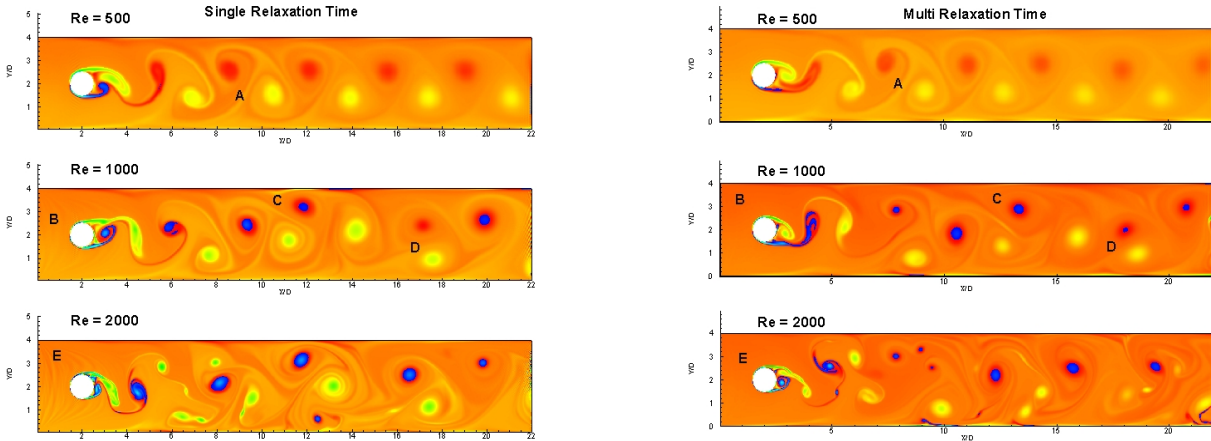


Fig. 2 Contour plot of vorticity at Re = 500, 1000, 2000 using SRT and MRT

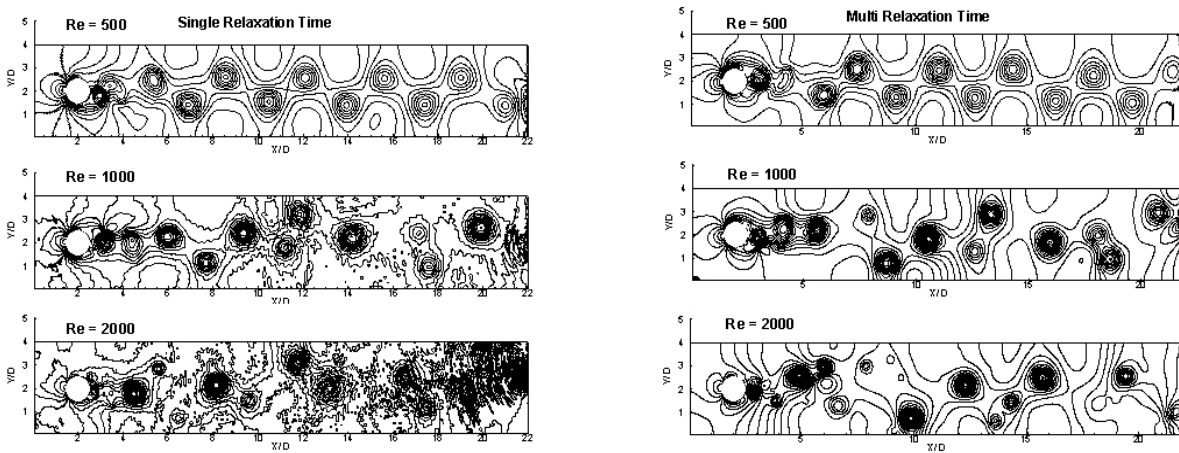


Fig. 3 Contour plot for pressure at Re = 500, 1000, 2000 using SRT and MRT

$$\frac{\partial X_i(s,t)}{\partial t} = U_i(s,t) \tag{26}$$

2.3 경계조건

LBM에서 경계조건은 고체벽면에서 점착을 유도하는 bounce back조건과 일정한 압력 또는 속도를 조건으로 적용하

는 압력 및 속도경계조건이 일반적이다. 이 연구는 난류유동 해석에 관한 것으로 상대적으로 적은 수의 격자계에서 높은 레이놀즈수를 갖는 유동해석의 안정성을 확보할 수 있으며, 2차의 정도를 가지고 있는 Regularized 경계조건[15]을 적용하였다. 이 경계조건은 비평형상태의 분포함수 f_{α}^{neq} 와 전단응력 텐서 A_{ij}^{neq} 를 이용하여 경계면에서 분포함수를 계산하는

Table 1 Comparison of drag coefficient, strohal number and length of recirculating zone of flow over circular cylinder at Re = 20 and 100

	Re = 20					Re = 100			
	N-S ⁽¹³⁾	LBM ⁽¹⁴⁾	IB-LBM			N-S ⁽¹³⁾	LBM ⁽¹⁴⁾	IB-LBM	
			SRT	MRT				SRT	MRT
C_D	5.570 ~ 5.590	5.557 ~ 5.816	5.617	5.651	C_D	3.220 ~ 3.240	3.198 ~ 3.951	3.109	3.114
Lr/D	-	0.767 ~ 0.895	0.869	0.839	St	0.295 ~ 0.305	0.278 ~ 0.300	0.304	0.306

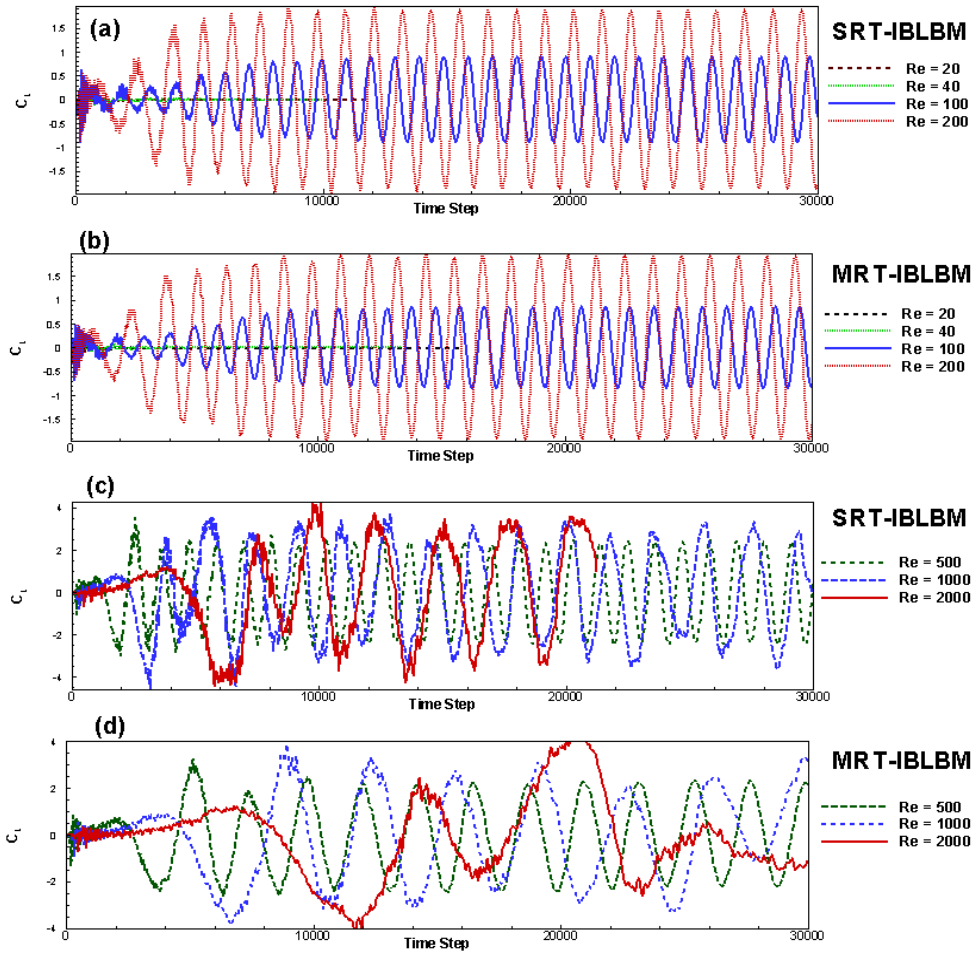


Fig. 4 Variation of lifting coefficient

방법으로, 경계면에 적용되는 경계 조건식은 식 (27-28)와 같다.

$$f_\alpha = \frac{\omega_\alpha}{2C_s^4} (c_{\alpha i} c_{\alpha i} - C_s^2 \delta_{ij}) A_{ij}^{neq} \quad (27)$$

$$A_{ij}^{neq} = A_{ij} - C_s^2 \rho \delta_{ij} - \rho u_i u_j \quad (28)$$

3. 해석 결과

두 평판 사이의 완전히 발달한 유동장에 놓인 원형실린더 주위의 유동과 공력특성을 해석하기 위하여 Fig. 1과 같이 (22D, 4D)의 계산영역에 지름이 D인 원형실린더를 입구로부터 2D떨어진 중앙에 위치시켰다. 입구와 출구에는 각각 완전

히 발달한 속도와 일정한 압력조건을 적용하였으며 IBM으로 실린더의 형상을 표현하기 위하여 둘레에 100개의 가상경계 점을 주었다.

레이놀즈수($Re = U_{ave} D / \nu$)의 범위는 2000보다 작은 영역으로 설정하였으며 $Re > 100$ 에서 SGS모델을 적용하였다. 레이놀즈수가 임계값보다 작은 $Re=20, 40$ 일 때 해석을 수행하여 임계레이놀즈수 이하에서의 유동특성을 확인하였고, 해석코드의 검증에 위하여 $Re = 20, 100$ 일 때 나비아스토크방정식과 기존의 LBM해석을 통해서 얻은 항력계수 ($C_D = F_D / (0.5 \rho U_{max}^2 D)$) 그리고 스트로홀수 ($St = fD / U_{ave}$), 재순환길이(L_r / D)를 비교하여 Table 1에 나타냈다.

레이놀즈수가 임계레이놀즈수보다 큰 유동에서는 실린더 후류에는 와류림이 발생하며, 레이놀즈수가 더 커짐에 따라

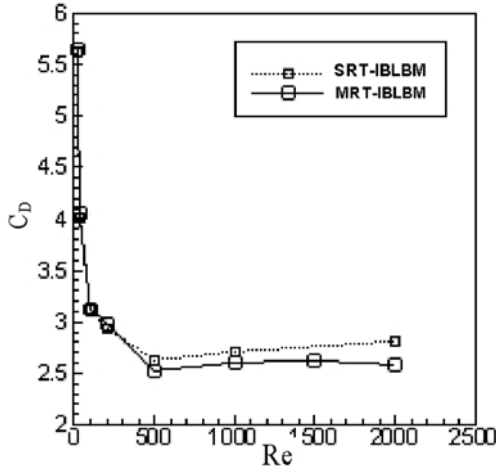


Fig. 5 Drag coefficient of cylinder at various Reynolds number

실린더 후류에 발생한 와류는 상하 평판에서 발생한 와류와 결합한 2차 와류가 형성된다. Fig. 2의 'A', 'C', 'D'로 표시한 곳이 2차와류가 형성된 곳이며 이것은 SRT와 MRT모형을 적용한 해석에서 동일한 결과를 보이지만 $Re=2000$ 일 때 SRT모형을 적용하여 얻은 와도분포의 상류에서 등와류선이 툽니모양으로 나타나며 이것은 레이놀즈수가 커질수록 심해지는 것을 볼 수 있다. 이런 현상은 SRT모형이 MRT모형에 비해서 상대적으로 더 크게 나타나며 이것은 SRT모형의 수치적 안정성이 MRT모형에 비해서 낮다는 것을 추정할 수 있는 근거이다.

레이놀즈수의 변화에 따른 유동장의 압력분포의 변화를 Fig. 3에 나타냈다. $Re=500$ 일 때 실린더의 후류에 형성된 압력분포는 중심선을 중심으로 상하에 상반대칭적인 압력분포가 형성되는 것을 볼 수 있으며, $Re=1000, 2000$ 으로 증가될 때 상하 평판에서 형성된 와류의 영향으로 더 이상 상하 대칭적 압력분포를 형성하지 않는다. 이런 현상은 SRT와 MRT모형을 적용한 해석에서 모두 동일하게 나타나지만 SRT모형을 적용한 해석에 비해 MRT모형을 적용한 해석이 보다 안정적인 해석결과를 얻을 수 있다는 것을 그림으로부터 확인할 수 있다.

유동장에 위치한 실린더의 양력과 항력의 변화를 레이놀즈수에 따라 Fig. 4와 5에 나타냈다. Fig. 4의 (a)와 (b)는 $Re \leq 200$ 일 때 (c)와 (d)는 $Re \geq 500$ 을 때 시간에 따른 양력계수의 변화를 나타낸 것이다. 이 중 (a)와 (c)는 SRT모형을, (b)와 (d)는 MRT모형을 적용한 결과이다. 레이놀즈수가 임계레이놀즈수보다 큰 영역에서 실린더의 후류에 상반대칭적 와홀림이 형성되는 경우 즉 레이놀즈수가 200보다 작은 영역에서는 유동장에 2차 와류가 강하게 형성되지 않아 후류

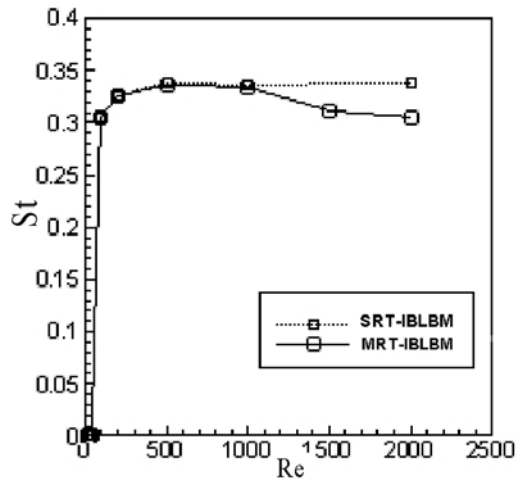


Fig. 6 Strouhal number of the vortex shedding at various Reynolds number

에 와홀림은 강한 주기를 가지며 양력계수 역시 뚜렷한 주기를 갖는 공력특성을 보인다. 반면에 $Re \geq 500$ 일 때 레이놀즈수가 커질수록 강하게 형성된 2차 와류의 영향으로 양력계수의 진폭이 일정하지 않으며, 뚜렷한 주기는 찾기 어려워진다.

SRT와 MRT 두 모델은 $Re < 500$ 영역에서 와도 그리고 압력분포와 마찬가지로 두 해석 결과가 모두 일치하지만 $Re \geq 500$ 에서는 레이놀즈수가 커질수록 두 결과는 차이를 보인다. 특히 $Re = 2000$ 일 때 두 결과는 상당히 큰 차이를 보이며 이는 난류유동해석에서 SRT모형의 수치적 안정성이 저하되어 발생한 차이라고 판단된다.

Fig. 5는 실린더의 항력계수의 변화를 레이놀즈수에 따라 나타낸 그림이다. $Re < 500$ 에서는 레이놀즈수가 커질수록 항력계수는 급격히 작아지다가 $Re > 500$ 에서는 다소 커지는 것을 볼 수 있다. MRT모형을 적용한 경우 SRT모형을 적용하여 얻은 결과에 비해 다소 작은 값을 가지며 레이놀즈수가 2000보다 큰 영역에서는 일정한 값 ($C_D = 2.58$)을 유지할 것으로 예측된다.

Fig. 6은 실린더 후류의 스트로홀수를 레이놀즈수의 변화에 따라 나타낸 그림이다. $100 \leq Re < 500$ 에서 레이놀즈수가 증가함에 따라 스트로홀수도 증가하며 $Re \geq 500$ 에서 일정한 값 0.336이 유지된다. 하지만 MRT모형을 적용하여 얻은 결과로부터 계산한 스트로홀수는 $Re < 500$ 에서는 SRT모형의 결과와 일치하지만 $500 \leq Re < 1000$ 에서는 레이놀즈수가 증가함에 따라 다소 감소하고, $Re \geq 1000$ 에서는 크게 감소한 후 $Re = 2000$ 에서 0.304를 가지며 이후 일정한 값을 유지할 것으로 예측된다.

4. 결 론

비압축성유체의 새로운 유동해석법으로 그 적용범위가 확대되고 있는 LBM은 불조만방정식의 충돌항에 BGK모델을 적용하여 1차의 시간으로 완화시킨 식이며 이 완화시간은 유동이 갖는 레이놀즈수에 따라 단일한 값을 갖는다. 하지만 이 모델은 두 평판 사이에 위치한 실린더 주위의 유동에서 레이놀즈수가 커짐에 따라 수치적 안정성을 확보할 수 없으며 이를 극복하기 위한 방법 중의 하나가 다중완화시간법(MRT)이다. 이 연구에서는 가상경계격자불조만(IBLBM)에 다중완화시간법(MRT)를 적용하여 높은 레이놀즈수 영역에서의 두 평판 사이에 위치한 실린더주위의 유동해석과 실린더의 공력특성을 도출하였으며 유동장에 형성된 압력과 와도분포를 통해서 레이놀즈수가 증가함에 따라 SRT모델을 적용한 해석 결과가 불안정하다는 것을 확인하였다.

레이놀즈수가 임계레이놀즈수($Re = 50$) 이상의 유동장에서 실린더 후류에 와류림이 발생하며, $Re < 500$ 에서 이 와류림은 상반대칭적인 구조를 가지며, 실린더의 양력계수는 뚜렷한 주기와 일정한 진폭을 갖지만 레이놀즈수가 증가함에 따라 상하의 평판에서 형성된 와류는 실린더 후류에 형성된 와와 결합하여 2차 와류가 강하게 형성하기 시작하고 이 2차 와류는 실린더의 공력특성에 큰 영향을 미친다는 것을 확인하였다. SRT와 MRT모델을 적용하여 얻은 해석결과로부터 계산된 항력계수와 스트로홀수는 후류에 2차 와류가 형성되기 시작하는 $Re > 500$ 에서 차이를 보이지만 이 차이는 SRT모델의 수치적 불안정성에서 비롯된 것으로 판단된다.

후 기

본 연구는 2009학년도 경기대학교 학술연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참고문헌

- (1) 1986, Frisch, U., Hasslacher, B. and Pomeau, Y., "Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equations," *Phys. Rev. Lett.*, Vol.56, pp.1505-1508.
- (2) 1954, Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. and Krook, M., "A model for collision processes in gases. I: small amplitude processes in charged and neutral one-component system," *Phys. Rev.*, Vol.94, pp.511-525.
- (3) 1998, Chen, S. and Doolen, G., "Lattice Boltzmann method for fluid flows," *Ann. rev. Fluid Mech.*, Vol.30, pp.329-364.
- (4) 2000, Renwei, M., Luo, L.-S. and Shyy, W., "An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method," *ICASE Report*, No.2000-6.
- (5) 2003, Lallemand, P. and Luo, L.-S., "Lattice Boltzmann method for moving boundary," *Journal of Computational Physics*, Vol.184, pp.406-421.
- (6) 2007, Kim, H.M. and Jhon, M.S., "Numerical Study on Flow Over Oscillating Circular Cylinder Using Curved Moving Boundary Treatment," *KSME Journal B*, Vol.31, No.11, pp.895-903.
- (7) 1988, McNamara, G. and Zanetti, G., "Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas Automata," *Phys. Rev. Lett.*, Vol.61, pp.2332-2335.
- (8) 1989, Higuera, F. and Jimenez, J., "Boltzmann approach to lattice gas simulations," *Europhys. Lett.*, Vol.9, pp.663-668.
- (9) 1991, Koelman, JMVA, "A simple lattice Boltzmann scheme for Navier-Stokes fluid flow," *Europhys. Lett.*, Vol.15, pp.603-607.
- (10) 1990, Qian, Y.H., "Lattice Gas and Lattice Kinetic Theory Apply to Navier-Stokes Equation," *PhD Thesis*, University et Peirre Marie Curie, Paris.
- (11) 2002, d'Humieres, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P. and Luo, L.-S., "Multiple-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Models in Three Dimensions," *Philosophical Transactions of the Royal society A*, Vol.360, pp.437-451.
- (12) 2001, Sauro, S., *Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press, USA.
- (13) 1996, Schafer, M., "Benchmark Computations of laminar flow around a cylinder, Flow simulation with high-performance computation II, Notes on Numerical fluid Mechanics," *Vieweg Verlag, Braunschweig*, Germany, Vol.52, pp.547-566.
- (14) 2009, Mussa, A., Asinari, P. and Luo, L.-S., "Lattice Boltzmann Simulation of 2D flows past two tandem cylinders," *Journal of computational physics*, Vol.228, pp.983-999.
- (15) 2006, Latt, J. and Chopard, B., "Lattice Boltzmann method with regularized non-equilibrium distribution functions," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol.72, pp.165-168.