

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.10.1427

ISSN 1226-4873

기하학적 비선형 판재 해석을 위한 혼합형 FE Model 연구[§]

김우람^{**} · 최윤대^{*}

* 육군3사관학교

Study of a Mixed Finite Element Model for the Analysis of a Geometrically Nonlinear Plate

Wooram Kim^{**} and Youn Dae Choi^{*}

* Dept. of Mechanical Engineering, Korea Army Academy at Yeong Cheon

(Received July 5, 2010 ; Revised July 19, 2010 ; Accepted July 20, 2010)

Key Words: von Kármán Nonlinearity(본 카르만 비선형성), Geometric Nonlinearity(기하학적 비선형성), Mixed Finite Element Model(혼합형 유한요소 모델), Classical Plate Theory(전통적 판재 이론), Galerkin Method(갈라킨 법), Lagrange Multiplier Method(라그랑지 승수법)

초록 : 전통 판재이론을 이용하여 기하학적 비선형성을 갖는 판재의 휨해석을 위한 혼합형 유한요소모델을 구성하였다. 혼합형 유한요소 모델의 구성에 포함되는 변형률과 합성력의 관계에 대한 적절한 가중함수를 찾기 위하여 라그랑지 승수법과 최소가상에너지 원리를 사용하였다. 각 요소별 유한요소 방정식의 계수행렬과 뉴턴 반복법 사용을 위한 접선 행렬에 대한 구체적 값을 제시하였다. 구성된 유한요소 해석모델의 선형 해에 대한 정확도 분석을 위하여, 여러 경계조건하에서의 수학적 해와 제시된 모델과 기존 모델의 유한요소해를 비교하여 현재 모델의 정확도의 향상을 확인하였다. 또한 수립된 비선형해를 이용하여 제시된 모델의 경우, 각종 합성력들에 대한 요소 경계에서의 연속성이 기존의 모델의 합성력에 비해 개선됨을 제시하였다. 최종적으로 수립한 비선형해에 대한 유효성을 보이기 위하여 기존 모델의 비선형 수립해와 현재 모델의 비선형 수립해를 비교하여 제시하였다.

Abstract: A mixed finite element model was developed using the classical plate theory to analyze the nonlinear bending of a plate. The appropriate weight functions for the constraints integrated over the domain were determined by the Lagrange multiplier method by using the principle of minimum virtual energy; which provides the constitutive relations between force-like variables and strains. All of detail terms of element wise coefficient matrices and associate tangent matrices to be used in the Newton iterative method are presented. Then, the linear solutions of the current model and those of the traditional displacement model under the SS (simple support) boundary conditions were compared with the existing analytical solution. The post-processed images of the nonlinear results of the force-like variables are presented to show the continuity of the solutions at the joint of the element boundaries. Finally, the converged nonlinear finite element solutions of the current model are compared with those of existing traditional displacement model.

1. 서론

1.1 연구목적

최근 컴퓨터 모델링 기술의 눈부신 발전으로 컴퓨터를 활용한 공학적 문제의 분석이 활발하게 진행되고 있다. 이러한 분석법 중 유한요소법(the finite element method)은 그 활용분야가 매우 광범위하고 신뢰도가 높아 공학 분야에서 널리 활용

되고 있다.

특히 과거의 전통적 판재 이론⁽¹⁾은 비교적 단순하지만 기초적인 구조물에 대한 정확한 분석이 가능하며 약간의 수정을 통하여 나노·MEMS와 같은 첨단 분야에도 활용이 가능하다.

그러나 지금까지의 구조분야의 유한요소 모델에는 사용된 수학 이론상의 제약보다도 유한요소 모델 자체가 지닌 한계점이 있다. 한 예로 전통적 판재 이론의 해석을 위한 기존의 유한요소 모델은 변위(displacement)만을 변수로 취급하고 있으며, 변위 이외의 다른 물리적 변수들은 유한요소 해석을 통해 얻어진 변위의 유한요소해를 후처리 연산 과정을 거쳐서 계산하는 방식을 채택

§ 이 논문은 2010년도 대한기계학회 경북지회 춘계학술대회(2010. 5. 14., 계명대) 발표논문임

† Corresponding Author, c14445@naver.com

© 2010 The Korean Society of Mechanical Engineers

하고 있다. 이 방식은 유한요소법을 통하여 얻어지는 변위 이외의 다른 변수(특히 변위의 미분계수로 표현되는 변수)의 정확도를 급격하게 감소시키는 문제를 안고 있다.

이 연구에서는 기존의 변위형 유한요소모델이 지니고 있는 근본적인 단점을 해결하기 위해 전통적 판재 이론을 이용하여 기존의 모델들과는 다른 혼합형 갈라킨(Galerkin)⁽²⁾ 유한요소 모델을 구성하고 수치해석상의 개선점을 제시하고자 한다.

1.2 연구방법

먼저 전통적 판재 이론(the classical plate theory)⁽²⁾을 이용하여 기존의 변위형 유한요소모델이 가지고 있는 단점을 보완하기 위해 최소 가상 에너지 원리(the principal of minimum virtual energy)⁽³⁾와 라그랑지 승수(the Lagrange multiplier)⁽³⁾를 이용하여 오차 최소화 문제를 해결하고, 각 조건식에 맞는 가중함수를 결정하여 혼합형 공식(the mixed formulation)^(4,5)에 기초한 갈라킨 유한요소모델(the Galerkin finite element model)⁽³⁾을 구성한다.

또한 선형분석을 통해 현재 모델의 수치해결 수학적 특수해와 비교하여 정확성의 향상을 확인하고, 비선형분석에서는 기존 변위 모델의 비선형해와 현재 모델의 비선형해를 비교하여 비선형 응답이 원활하게 이루어지고 있는지 확인한다.

이를 통하여 기존 모델의 단점을 보완한 혼합형 갈라킨 유한요소 모델을 제시한다.

2. 본 론

2.1 관련이론

앞서 언급한 바와 같이 수학적 모델링에 사용된 전통적 판재 이론은 비교적 간단한 모델임에도 불구하고 얇은 판막의 거동과 같은 첨단 분야의 구조물 해석에도 사용된다. 또한 라그랑지 승수법은 최소 가상에너지원리와 함께 유한요소모델을 전개하는데 필요한 가중함수를 결정하는데 유용하게 사용될 수 있다. 이번 절에서는 전통적 판재이론과 최소 가상 에너지원리 및 라그랑지 승수법을 중심으로 관련 이론을 살펴보자.

2.1.1 전통적 판재 이론

전통적 판재 이론은 오일러 빔 이론을 2차원으로 확대한 것이다. 즉, 판재가 변형되기 전 단면이 변형 후에도 같은 단면을 유지하고, 면 자체

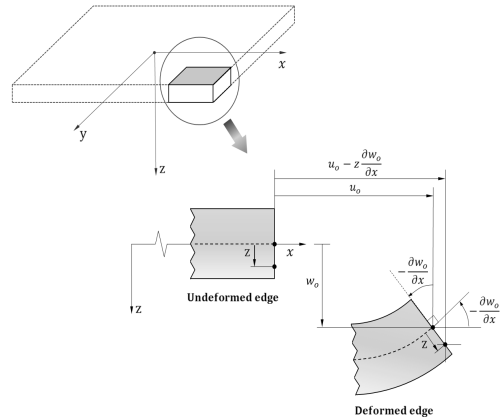


Fig. 1 deformation of the CPT plate element

의 변형이 없으며, 판재의 중심면에 대하여 수직을 유지한다는 가정에 기초한다.

이러한 전통적 판재 이론에서 변형에 따른 힘의 정도가 상당하다면(즉, $\partial w_0/\partial x$, $\partial w_0/\partial x \neq 0$), 본 카르만의 비선형성⁽⁴⁾을 가정하여 비선형 변형률을 얻을 수 있다.

x , y , z 방향의 변위를 각각 u_0 , v_0 그리고 w_0 로 정의하고, 복잡한 식의 단순화를 위해 힘 모멘트 벡터(\vec{M})와 평면 합성력 벡터(\vec{N}), 선형변형률 벡터($\vec{\epsilon}^l$), 비선형변형률 벡터($\vec{\epsilon}^n$) 그리고 임의의 비선형 벡터(\vec{NL})을 아래의 식 (1)과 같이 정의한다.

$$\vec{N} = (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})^T, \quad \vec{M} = (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})^T,$$

$$\vec{\epsilon}^n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right\}, \quad \vec{\epsilon}^l = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{array} \right\},$$

$$\vec{NL} = \left\{ \begin{array}{l} N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{array} \right\}. \tag{1}$$

또한 식과 계산과정의 단순화를 위해 그레이드 연산자 ∇ 와 1차 미분연산자 $\underline{\partial}_\epsilon$ 를 아래 식 (2)와 같이 정의한다.

$$\nabla = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\}, \quad \underline{\partial}_\epsilon = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{array} \right]. \tag{2}$$

위의 정의를 이용하면 유한요소 모델을 위해 사용될 평형방정식과 구성방정식은 간결한 형태의 비선형 편미분방정식으로 아래 식 (3)과 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon}^T \vec{N} &= 0, \\ \nabla \cdot (\partial_{\epsilon}^T \vec{M} + \vec{NL}) + q &= 0, \\ \vec{\epsilon}'' &= \hat{A}^{-1} \vec{N}, \\ \vec{\epsilon}' &= \hat{D}^{-1} \vec{M}. \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, q 는 분포하중이고, 구성방정식의 \hat{A} 와 \hat{D} 는 각각 변위와 합성력을 관련 짓는 물질 특성 값 행렬이며, 아래 식 (4)와 같이 정의된다.

$$\hat{A} = h \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12} E_2 & 0 \\ 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 0 \\ \nu_{21} E_2 & E_2 & 0 \\ 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 1 - \nu_{12} \nu_{21} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}, \quad \hat{D} = \frac{h^2}{12} \hat{A}. \quad (4)$$

위 식 (4)의 E_1, E_2 그리고 ν_{12}, ν_{21} 는 각각 x 와 y 방향의 탄성계수와 푸아송 비이고, h 는 판재의 두께, G_{12} 는 전단 탄성계수이다.

2.1.2 라그랑지 승수법

본 연구에서 고려하고 있는 유한요소 모델은 기존의 변위형 유한요소 모델이 변위만을 주요 변수로 취급하고 있는 것과 달리, 휨 모멘트와 평판 내부 합성력 역시 독립적인 변수로 포함하여 고려하고 있다. 이러한 모델을 혼합형 유한요소 모델이라고 하는데, 혼합형 유한요소 모델을 구성하기 위해서는 추가적인 변수에 대한 내용을 기술하는 편미분 형태의 구성방정식을 제한조건의 형태로 최소화 과정에 포함해야 한다. 이 과정에서 라그랑지 승수법을 이용하면 수학적으로 유한요소모델 전개에 사용되는 적절한 가중함수를 구할 수 있다.

예를 들어 아래 식 (5)와 같이 변수 u_1 과 u_2 그리고 이들의 미분계수로 정의되는 범함수 I 를 계산 영역(Ω_{ϵ}) 내에서 최소화 시키는 문제에서,

$$\begin{aligned} I(u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}) = \\ \int_{\Omega_{\epsilon}} F(x, y, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}) dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)가 아래 식 (6)에 주어진 제한조건 G 에 노출되어 있을 경우,

$$G(u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}) = 0 \quad (6)$$

I 를 최소화 시키는 문제는 라그랑지 승수 λ 를 이용하여 정의되는 라그랑지 함수 L 을 최소화 시키는 문제로 대체될 수 있다.

$$L(u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, \lambda) \equiv I + \int_{\Omega_{\epsilon}} \lambda G dx dy \quad (7)$$

이때 식 (7)에서 곱해진 라그랑지 승수의 변분량이 가중함수로 사용될 수 있음을 알 수 있다.

2.1.3 최소 가상에너지 원리

고체역학 분야와 관련된 문제에서 최소 가상에너지 원리는 변분법과 함께 지배 방정식 중 평형방정식을 유도하는데 유용하게 쓰인다. 이러한 최소 가상에너지의 원리는, “임의의 연속체에서 내부의 탄성에너지와 외부 경계에서 가해진 에너지의 총합은 최소화 된다”라고 요약된다.

전통적 판재이론에서는 오직 3개의 변형률만이 ‘0’이 아니므로 내부 탄성에너지 U 와 외부에서 가해진 에너지 V 는 아래 식 (8)과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\int_{\Omega_{\epsilon}} (\epsilon_{xx} \sigma_{xx} + \epsilon_{yy} \sigma_{yy} + \epsilon_{xy} \sigma_{xy}) dx dy \right] dz, \\ V &= \int_{\Omega_{\epsilon}} (q w_o) dx dy, \end{aligned}$$

여기서

$$[\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}]^T = \vec{\epsilon}'' + z \vec{\epsilon}' \quad (8)$$

최소 에너지 원리에 따라 최소화 시켜야 하는 범함수 I 는 아래 식 (9)로 정의된다.

$$I = U + V. \quad (9)$$

식 (9)의 U 는 구성방정식과 변형률의 관계를 이용하여 합성력의 식으로 나타내어지며, 모멘트와 평면 합성력들을 포함하기 위하여 이들에 관한 구성방정식은 다음과 같이 제한조건으로 포함되어 라그랑지 함수 L 을 이룬다.

$$\begin{aligned} L = \int_{\Omega_{\epsilon}} \left\{ \frac{1}{2} [\vec{N} \cdot (\hat{A}^{-1} \vec{N}) + \vec{M} \cdot (\hat{D}^{-1} \vec{M})] + q w_o \right\} dx dy \\ + \int_{\Omega_{\epsilon}} \overline{\lambda}_N \cdot (\vec{\epsilon}'' - \hat{A}^{-1} \vec{N}) dx dy + \int_{\Omega_{\epsilon}} \overline{\lambda}_M \cdot (\vec{\epsilon}' - \hat{D}^{-1} \vec{M}) dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)의 $\vec{\lambda}_N$ 과 $\vec{\lambda}_M$ 은 각각 3개의 라그랑지 승수를 벡터형태로 아래 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\vec{\lambda}_N = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{Bmatrix}, \vec{\lambda}_M = \begin{Bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

2.2 변분법을 통한 라그랑지 함수의 최소화

변분연산자를 사용하면 특정 지점의 함수 값의 오차를 수학적으로 정량화 시킬 수 있다. 따라서 앞서 얻어진 식 (10)의 L 을 쉽게 최소화 할 수 있는데, 그 조건은 다음 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} \delta L = & \delta(U + V) \\ & + \delta \int_{\Omega_e} \vec{\lambda}_N \cdot (\vec{\epsilon}^n - \hat{A}^{-1} \vec{N}) \, dx dy \\ & + \delta \int_{\Omega_e} \vec{\lambda}_M \cdot (\vec{\epsilon}^l - \hat{D}^{-1} \vec{M}) \, dx dy = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서, δ 는 변분연산자이다.

위 식 (12)를 만족하기 위해서는 전체 식을 각각의 변수들의 변분량에 대한 항등식으로 간주해야하고, 라그랑지 승수는 아래 식 (13)과 같은 조건으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta u_o: & \frac{\partial L}{\partial u_o} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial u_o / \partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial u_o / \partial y)} \right] = 0, \\ \delta v_o: & \frac{\partial L}{\partial v_o} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial v_o / \partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial v_o / \partial y)} \right] = 0, \\ \delta w_o: & \frac{\partial L}{\partial w_o} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial w_o / \partial x)} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial w_o / \partial y)} \right] , \\ & \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial^2 w_o / \partial y^2)} \right] + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial^2 w_o / \partial y^2)} \right] = 0 \\ \delta \vec{N}: & \frac{\partial L}{\partial N} = 0, \\ \delta \vec{M}: & \frac{\partial L}{\partial M} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

위 식 (13)의 결과를 정리하고, 앞에서 주어진 식 (3)과 비교하면 아래 식 (14)와 같은 라그랑지 승수와 조건식이 구해진다.

$$\vec{\lambda}_N = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \vec{\lambda}_M = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{14}$$

또한 갈라진 유한요소 모델에 필요한 가중함수 역시 이 과정을 통하여 아래 식(15)와 같이 쉽게 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} & \{ (\delta u_o, \delta v_o)^T \cdot (\partial_{\epsilon}^T \vec{N}) + \delta w_o [\nabla \cdot (\partial_{\epsilon}^T \vec{M} + \vec{N}L)] \\ & + (\delta N_{xx}, \delta N_{yy}, \delta N_{xy})^T \cdot (\vec{\epsilon}^n - \hat{A}^{-1} \vec{N}) \\ & + (\delta M_{xx}, \delta M_{yy}, \delta M_{xy})^T \cdot (\vec{\epsilon}^l - \hat{D}^{-1} \vec{M}) \} dx dy = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

2.3 유한요소 모델 전개

앞의 식 (15)는 간략한 형태로 유한요소모델을 전개하기에는 적합하지 않다. 그러므로 이를 전개하여 다시 표기하고, 부분적분을 이용하여 경계조건 항을 생성하면, 식 (16)과 같은 9개의 방정식을 얻는다. 여기서, Γ_e 는 임의 요소의 경계를 의미하고, A_{ij}^* 와 D_{ij}^* 는 A_{ij} 와 D_{ij} 의 역행렬이다. 현재의 유한요소 모델이 기존의 변위형 모델과 구분되는 점은 모든 식이 변수와 그 1차 미분항으로 구성된다는 것이다. 기존의 모델은 수직 변위인 w_o 에 대하여 그 미분계수를 포함하는 conforming 과 non-conforming⁽²⁾ 형태의 3차식의 형상함수를 사용해야만 한다. 그러나 현재의 모델은 모든 변수에 대하여 어떠한 1차 이상의 라그랑지 형상함수(변수의 미분계수를 포함하지 않는)도 사용할 수 있는 장점이 있음을 식 (16)을 통하여 알 수 있다.^(6,7)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} & \left(\frac{\partial \delta u_o}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \delta u_o}{\partial y} N_{xy} \right) dx dy \\ & - \oint_{\Gamma_e} \delta u_o \{ n_x N_{xx} + n_y N_{xy} \} ds = 0, \\ \int_{\Omega_e} & \left(\frac{\partial \delta v_o}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial \delta v_o}{\partial y} N_{yy} \right) dx dy \\ & - \oint_{\Gamma_e} \delta v_o \{ n_x N_{xy} + n_y N_{yy} \} ds = 0, \\ \int_{\Omega_e} & \left\{ \frac{\partial \delta w_o}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_{xx} \frac{\partial w_o}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) \right. \\ & + \frac{\partial \delta w_o}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w_o}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) + q \delta w_o \left. \right\} dx dy \\ & - \oint_{\Gamma_e} \delta w_o (n_x V_x + n_y V_y) ds = 0, \\ \int_{\Omega_e} & \delta N_{xx} \left\{ \left[\frac{\partial u_o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \right)^2 \right] - A_{11}^* N_{xx} - A_{12}^* N_{yy} \right\} dx dy = 0, \\ \int_{\Omega_e} & \delta N_{yy} \left\{ \left[\frac{\partial v_o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \right)^2 \right] - A_{21}^* N_{xx} - A_{22}^* N_{yy} \right\} dx dy = 0, \\ \int_{\Omega_e} & \delta N_{xy} \left[-A_{66}^* N_{xy} + \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0, \\ \int_{\Omega_e} & \left(\frac{\partial \delta M_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial x} - \delta M_{xx} D_{11}^* M_{xx} - \delta M_{xx} D_{12}^* M_{yy} \right) dx dy \\ & - \oint_{\Gamma_e} \delta M_{xx} \left\{ n_x \frac{\partial w_o}{\partial x} \right\} ds = 0, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \delta M_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w_o}{\partial y} - \delta M_{yy} D_{21}^* M_{xx} - \delta M_{yy} D_{22}^* M_{yy} \right) dx dy - \oint_{\Gamma_c} \delta M_{yy} \left\{ n_y \frac{\partial w_o}{\partial y} \right\} ds = 0,$$

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial \delta M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w_o}{\partial x} - \delta M_{xy} D_{66}^* M_{xy} \right) dx dy - \oint_{\Gamma_c} \delta M_{xy} \left\{ n_x \frac{\partial w_o}{\partial y} + n_y \frac{\partial w_o}{\partial x} \right\} ds = 0. \quad (16)$$

다음은 유한요소 모델을 얻기 위해서 (16)의 변수와 변수의 변분량을 다음 식 (17)과 같이 추정하여 대입한다.

$$\delta u_o \cong \sum_{i=1}^l \psi_i \delta U_i^1, \delta v_o \cong \sum_{i=1}^l \psi_i \delta U_i^2, \delta w_o \cong \sum_{i=1}^l \psi_i \delta U_i^3,$$

$$\delta N_{xx} \cong \sum_{i=1}^m \psi_i \delta U_i^4, \delta N_{yy} \cong \sum_{i=1}^m \psi_i \delta U_i^5, \delta N_{xy} \cong \sum_{i=1}^m \psi_i \delta U_i^6,$$

$$\delta M_{xx} \cong \sum_{i=1}^n \psi_i \delta U_i^7, \delta M_{yy} \cong \sum_{i=1}^n \psi_i \delta U_i^8, \delta M_{xy} \cong \sum_{i=1}^n \psi_i \delta U_i^9.$$

$$u_o \cong \sum_{j=1}^l \psi_j U_j^1, v_o \cong \sum_{j=1}^l \psi_j U_j^2, w_o \cong \sum_{j=1}^l \psi_j U_j^3,$$

$$N_{xx} \cong \sum_{j=1}^m \psi_j U_j^4, N_{yy} \cong \sum_{j=1}^m \psi_j U_j^5, N_{xy} \cong \sum_{j=1}^m \psi_j U_j^6,$$

$$M_{xx} \cong \sum_{j=1}^n \psi_j U_j^7, M_{yy} \cong \sum_{j=1}^n \psi_j U_j^8, M_{xy} \cong \sum_{j=1}^n \psi_j U_j^9. \quad (17)$$

여기서, U_i^N 은 N 번째 미지수에 대한 유한요소 모델의 결절 값이고, ψ_i 는 라그랑지 형상함수(the Lagrange interpolation function)들의 i -번째 함수 값이다. 식 (16)에서 볼 수 있는 바와 같이 현재의 모델은 혼합형 공식의 사용으로 인하여 기존의 변위형 모델이 conforming 또는 non-conforming 형태의 형상함수를 사용해야만 하는 것과 달리, 모든 변수에 대하여 라그랑지 형상함수를 사용할 수 있음을 알 수 있다.

최종적으로, 식을 정리하고 결절 값의 변분량 δU_i^α 에 대하여 항등식으로 간주하면, 비선형항 ($\partial w_o / \partial x, \partial w_o / \partial y$)을 포함하는 아래 식(18)에 주어진 행렬형 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_e(U_e)]\{U_e\} = \{F_e\}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} [K^{11}] & \dots & [K^{19}] \\ \vdots & & \vdots \\ [K^{91}] & \dots & [K^{99}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^1\} \\ \vdots \\ \{U^9\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \vdots \\ \{F^9\} \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

여기서 $[K_e]$ 는 요소의 계수행렬이고, $[K^{\alpha\beta}]$ 는 $[K_e]$ 의 α 행 β 열의 하위행렬, $[U_e]$ 와 $[F_e]$ 는 각각 결

절점에서의 미지수 벡터와 외력 벡터, 그리고 $\{U^\alpha\}$ 와 $\{F^\alpha\}$ 는 $[U_e]$ 와 $[F_e]$ 의 α 번째 하위벡터를 의미한다.

요소 단위별 계수행렬($[K_e]$)내부에 있는 각 하위행렬 $[K^{\alpha\beta}]$ 에 대한 구체적 값은 부록에 주어졌다. 식 (18)은 각각의 요소(element) 별로 적용되고, 최종적으로는 재배열 이후 조립과정을 거친 글로벌 행렬 $[GLK]$ 및 글로벌 미지수 벡터 $[GLU]$ 와 외력벡터 $[GLF]$ 에 경계조건을 입력한 후 역행렬 $[GLK]^{-1}$ 을 구하여 다음 식 (19)와 같이 미지수 벡터를 구하여 해를 찾는다.

$$[GLK(U)]\{GLU\} = \{GLF\}$$

$$\rightarrow \{GLU\} = [GLK(U)]^{-1}\{GLF\}. \quad (19)$$

2.4 비선형 방정식 풀이 과정

대부분의 구조 분야 수치해석에서는 비선형 방정식을 풀기 위해 뉴턴 반복법^(8,9)(Newton iterative method)을 사용한다. 이는 직접반복법을 사용할 경우 유한요소 모델이 특정 경계조건에 대해서 수렴해를 찾지 못하는 현상을 막을 수 있고, 직접 반복법보다 적은 반복 횟수로 수렴해를 찾을 수 있기 때문이다.

하지만 Fig. 2에 나타난 바와 같이 뉴턴 반복법은 계수행렬 이외에 접선행렬($[T_e]$)을 계산해야 하는 번거로움이 있다. 요소단위 별 접선행렬의 하위 행렬 $[T^{\alpha\beta}]$ 은 계수행렬의 하위 행렬($[K^{\alpha\beta}]$) 값을 이용하여 다음 식 (20)과 같이 구할 수 있다.

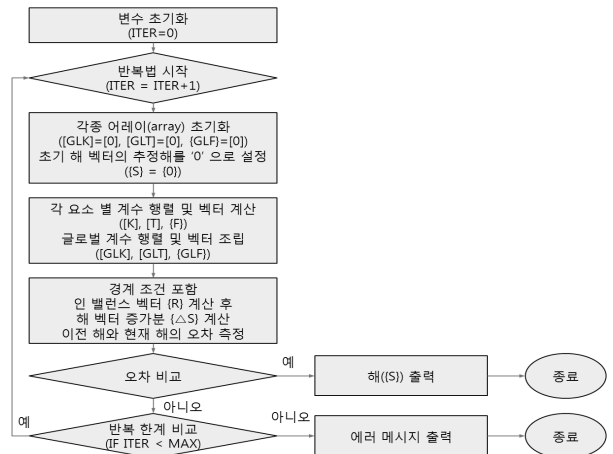


Fig. 2 A flow chart of the Newton iterative method

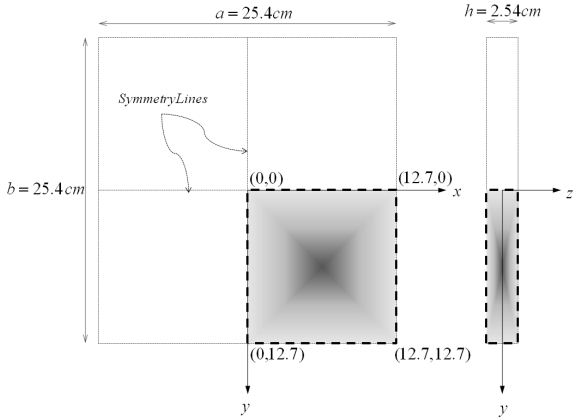


Fig. 3 A description of the geometry of a plate used for the numerical analysis

$$T_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial U_j^\beta} \left(\sum_{\gamma=1}^9 \sum_{k=1}^n K_{ik}^{\alpha\gamma} U_k^\gamma - F_i^\alpha \right) = \left(\sum_{\gamma=1}^9 \sum_{k=1}^n \frac{\partial K_{ik}^{\alpha\gamma}}{\partial U_j^\beta} U_k^\gamma + K_{ij}^{\alpha\beta} \right). \quad (20)$$

접선 행렬을 사용할 시의 장점은, 식 (19)와 같이 선형해를 구한 이후의 모든 반복법에서 오직 글로벌 접선 행렬([GLT])만을 역행렬로 취한다는 것인데, 접선행렬은 언제나 대칭행렬을 이기 때문에 계산 시 효율을 증가시킬 수 있다. 접선 행렬들의 구체적인 값은 계수 행렬들의 값과 함께 부록에 수록했다.

2.5 수치해석 및 결과 분석

균질한 판재에 대하여 아래 식 (21)과 같은 데이터로 수치 시뮬레이션을 실시하였다.⁽¹⁾

$$a = 25.4\text{cm}, \quad b = 25.4\text{cm}, \quad h = 2.54\text{cm} \\ E_1 = E_2 = 53770.92 \text{ MPa}, \\ \nu_{12} = \nu_{21} = 0.3 \text{ (또는 선형분석시 0.25)}. \quad (21)$$

시뮬레이션은 Fig. 3과 같이 상하·좌우가 모두 대칭인 판재를 사용하며, 모든 경계 조건이 대칭으로 주어진다 가정과, 대칭선 상에서의 조건을 이용하여 판재를 4등분 중 한 부분만을 사용하여 실시했다.

대칭선에서의 경계조건은 $x=0$ 에서 $v_o, \partial w_o / \partial y$ 가 '0'이고, $y=0$ 에서 $u_o, \partial w_o / \partial x$ 가 '0'이다 또한 SS 경계 조건은 Fig. 4와 같이 주어진다.

Fig. 3의 판재의 한 부분과 Fig. 5의 4x4 mesh 그리고 Fig. 3의 SS(simple support) 조건하에서 2차 형상함수를 사용하여 얻어진 비선형 수렴해의

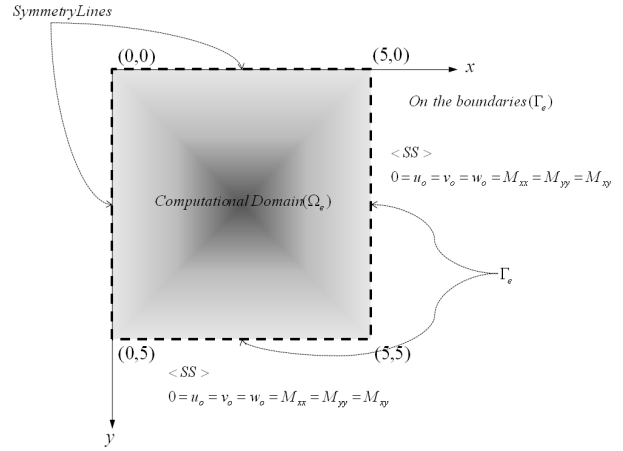


Fig. 4 A description of simple support boundary condition of a quadrature of the plate

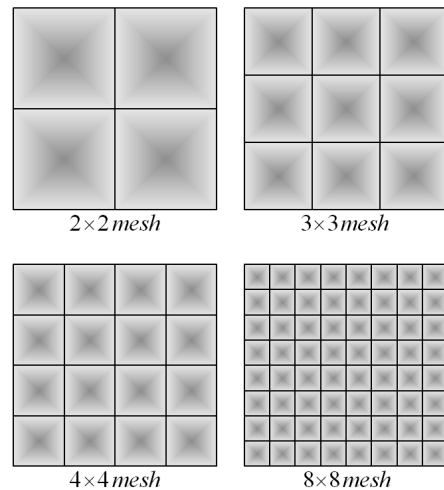
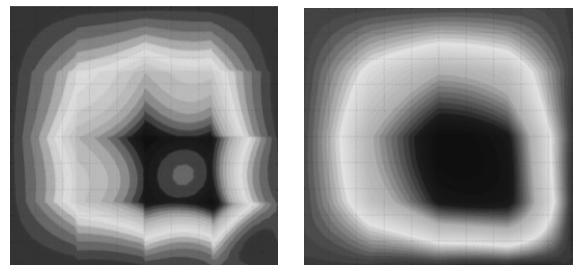


Fig. 5 Different types of Meshes used for the numerical analysis



(a) Displacement model (b) Current model

Fig. 6 Images of the N_{xy} of the nonlinear results

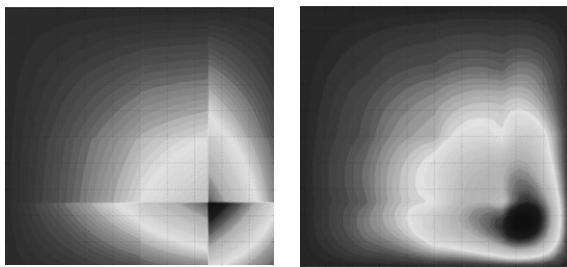
이미지를 비교해 보자. 기존의 변위형 모델은 각 요소의 경계에서 약간의 비연속성을 보이는 반면 현재의 모델은 양호한 연속성을 보임을 Fig. 6과 Fig. 7의 이미지를 통하여 알 수 있다. 기존 변위

Table 1 Comparison of the normalized linear solutions under SS boundary condition at the center of the plate with linear interpolations ($\overline{\sigma_{xy}}$: at the edge)

Models & variables		Type of mesh			exact solution ⁽³⁾
		2×2	4×4	8×8	
Current mixed model (linear)	\overline{w}	4.7801	4.6221	4.5831	4.5701
	$\overline{\sigma_{xx}}$	0.3035	0.2823	0.2864	0.2762
	$\overline{\sigma_{xy}}$	0.1987	0.2054	0.2078	0.2085
Traditional displacement model (Non-conforming)	\overline{w}	4.8571	4.6425	4.5883	4.5701
	$\overline{\sigma_{xx}}$	0.2405	0.2673	0.2740	0.2762
	$\overline{\sigma_{xy}}$	0.1713	0.1964	0.2050	0.2085

Table 2 Comparison of the normalized linear solutions under SS boundary condition at the center of the plate with Quadratic interpolations($\overline{\sigma_{xy}}$: at the edge)

Models & variables		Type of mesh			exact solution ⁽³⁾
		1×1	2×2	3×3	
Current mixed model (Quadratic)	\overline{w}	4.6753	4.5749	4.5704	4.5701
	$\overline{\sigma_{xx}}$	0.2835	0.2767	0.2762	0.2762
	$\overline{\sigma_{xy}}$	0.2498	0.2283	0.2160	0.2085
Traditional displacement model (conforming)	\overline{w}	4.7619	4.5952	4.5739	4.5701
	$\overline{\sigma_{xx}}$	0.2637	0.2637	0.2731	0.2762
	$\overline{\sigma_{xy}}$	0.1688	0.1935	0.2040	0.2085



(a) Displacement model (b) Current model

Fig. 7 Images of the M_{xy} of the nonlinear results

형 모델과 현재 모델의 합성력 이미지인 Fig. 5를 보면, N_{xy} 값이 두 모델의 차이를 뚜렷하게 보여준다. 모두 전통적 판재 이론을 사용하여 구성되었음에도 불구하고 N_{xy} 의 경우 현재의 혼합형 모델이 더 나은 연속성을 보여주고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7의 M_{xy} 역시 기존의 변위형 모델이 매우 심한 불연속성을 보여주고 있는 것과 달리 현재

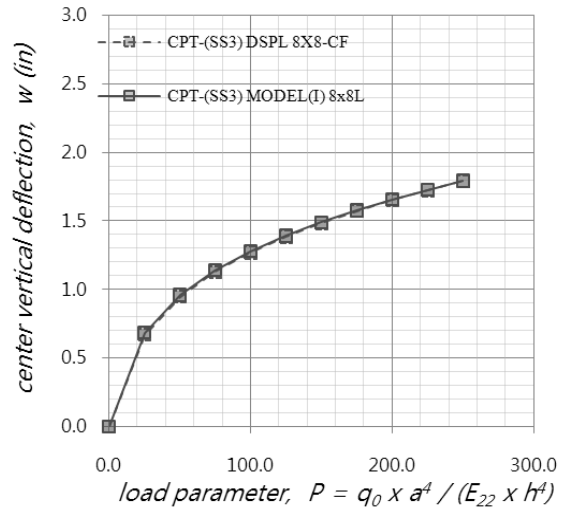


Fig. 8 Comparison of nonlinear respond of center deflection under SS3 boundary condition

의 모델은 양호한 연속성을 보여준다.

식 (19)에서 모든 비선형항을 '0'으로 간주하면 선형해를 얻을 수 있다. 선형분석의 경우 분석해와 비교하여, 1차 형상함수를 사용할 시에는 기존의 모델보다 약간 우월한 정확성을 보이지만, 2차 형상함수를 사용할 시 그 정확성이 현저하게 개선됨을 Table 1 과 Table 2를 통하여 알 수 있다. Table 1과 Table 2의 주어진 값들은 모두 무차원화 되었다. Table 2에 주어진 기존 모델의 결과는 conforming 형식의 형상함수를 이용해야만 얻을 수 있으며, 이 경우 혼합된 미분계수 $\partial^2 w_0 / \partial x \partial y$ 을 부수적인 결점 값으로 취급해야 하기 때문에 효율성을 저하시킨다.

마지막으로 SS 경계조건에 대한 판재의 중심 처짐 값 w 의 비선형 응답성은 Fig. 8에서와 같이 기존의 변위형 모델의 수렴해와 거의 일치하는 결과를 보여준다. 그림 Fig. 8에서 하중지수의 $P = q_0 \times a^4$ 는 큰 하중 값에 대한 비선형 해를 구하기 위하여 작은 값에서 큰 값으로 축차적으로 증가시켰다. 이를 통하여 제시된 모델은 비선형분석에 충분히 사용될 수 있음을 확인할 수 있다.

3. 결론

판재의 비선형 휨 분석을 위한 혼합형 갈라진 유한요소 모델을 구성하기 위하여 라그랑지 승수법과 최소에너지 원리를 사용하였다. 변분법을 통하여 얻어진 혼합형 갈라진 모델을 전개하고 유한요소해를 추정하여 행렬 형식의 비선형 대수

방정식을 구성하고, 간단한 수치 시뮬레이션을 통하여 다음 개선 사항을 확인하였다.

- ① 선형해의 정확성 향상
- ② 모든 변수에 라그랑지 형상함수 사용 가능
- ③ 요소경계에서 변위 이외의 해의 연속성 유지
- ④ 비선형해에 대한 수렴성은 동일

하지만 부가적인 변수들을 유한요소 모델에 포함시킴으로서 컴퓨터 메모리의 추가적인 할당이 필요하며, 이러한 현상은 혼합형 모델의 근본적인 단점이라고 할 수 있다. 그러므로 혼합형 모델을 좀 더 복잡한 문제들에 적용하기 위해서는 심도 깊은 연구가 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

- (1) Reddy, J. N., 2004, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, Oxford, pp. 141~172.
- (2) Reddy, J. N., 2006, *An Introduction to the Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, pp. 635~665.
- (3) Reddy, J. N., 2002, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, J. Wiley, New York, pp. 118~203.
- (4) Reddy, J. N., 2007, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, 2nd ed., CRC, Boca Raton, FL, pp. 95~121.
- (5) Moleiro, F., Mota Soares, C. M. and Mota Soares, C. A., 2008, "Mixed Least-squares Finite Element Model for the Static Analysis of Laminated Composite Plates," *Comput. Struct* 86, pp. 826~838.
- (6) Herrmann, L. R., 1975, "Mixed Finite Element Method for Bending of Plates," *Int. J. Numerical Method*, 9, pp. 3~5.
- (7) Allman, D. J., 1971, "Triangular Finite Element for Plate Bending with Constant and Linearly Varying Bending Moments," *High Speed Computing of Elastic Struct.* 1, pp. 106~136.
- (8) Riks, E., 1972, "The Application of Newton's Method to Problem of Elastic Stability," *J. Appl. Mech.* 39, pp. 1060~1066.
- (9) Cajori, F., 1911, "Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximations," *American Mathematical Monthly* 18, pp. 29~32.

부 록

<'0'이 아닌 하위 계수행렬 값>

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{14} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \psi_j \right) dx dy, & K_{ij}^{16} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \psi_j \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{26} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \psi_j \right) dx dy, & K_{ij}^{25} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \psi_j \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{37} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{34} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \partial \psi_j \right) dx dy, & K_{ij}^{36} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \partial \psi_j \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{38} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{35} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \partial \psi_j \right) dx dy, & K_{ij}^{37} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \partial \psi_j \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{39} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{41} &= \int_{\Omega_e} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, & K_{ij}^{43} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w_o}{\partial x} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{44} &= \int_{\Omega_e} (-A_{11}^* \psi_i \psi_j) dx dy, & K_{ij}^{45} &= \int_{\Omega_e} (-A_{12}^* \psi_i \psi_j) dx dy, \\
 K_{ij}^{52} &= \int_{\Omega_e} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, & K_{ij}^{53} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w_o}{\partial y} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{54} &= \int_{\Omega_e} (-A_{21}^* \psi_i \psi_j) dx dy, & K_{ij}^{55} &= \int_{\Omega_e} (-A_{22}^* \psi_i \psi_j) dx dy, \\
 K_{ij}^{66} &= \int_{\Omega_e} (-A_{66}^* \psi_i \psi_j) dx dy, & K_{ij}^{61} &= \int_{\Omega_e} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{62} &= \int_{\Omega_e} \left(\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{63} &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial y} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial w_o}{\partial x} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{73} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, & K_{ij}^{77} &= \int_{\Omega_e} (-D_{11}^* \psi_i \psi_j) dx dy, \\
 K_{ij}^{78} &= \int_{\Omega_e} (-D_{12}^* \psi_i \psi_j) dx dy, \\
 K_{ij}^{83} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, & K_{ij}^{87} &= \int_{\Omega_e} (-D_{21}^* \psi_i \psi_j) dx dy, \\
 K_{ij}^{88} &= \int_{\Omega_e} (-D_{22}^* \psi_i \psi_j) dx dy, \\
 K_{ij}^{93} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy, \\
 K_{ij}^{99} &= \int_{\Omega_e} (-D_{66}^* \psi_i \psi_j) dx dy, & F_i^1 &= \oint_{\Gamma_e} \psi_i \{n_x N_x + n_y N_{xy}\} ds, \\
 F_i^2 &= \oint_{\Gamma_e} \psi_i \{n_x N_{xy} + n_y N_{yy}\} ds, & F_i^7 &= \oint_{\Gamma_e} \psi_i \left\{ n_x \frac{\partial w_o}{\partial x} \right\} ds, \\
 F_i^3 &= \oint_{\Gamma_e} \psi_i \{n_x V_x + n_y V_y\} ds + \int_{\Omega_e} q_o \psi_i dx dy, \\
 F_i^8 &= \oint_{\Gamma_e} \psi_i \left\{ n_y \frac{\partial w_o}{\partial y} \right\} ds, & F_i^9 &= \oint_{\Gamma_e} \psi_i \left\{ n_x \frac{\partial w_o}{\partial y} + n_y \frac{\partial w_o}{\partial x} \right\} ds.
 \end{aligned}$$

<계수행렬과 다른 하위 접선행렬의 값>

$$T_{ij}^{33} = K_{ij}^{33} + \int_{\Omega_e} \left\{ N_{xx} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) + N_{yy} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right\} dx dy,$$

$$T_{ij}^{43} = K_{ij}^{43} + \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w_o}{\partial x} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy,$$

$$T_{ij}^{53} = K_{ij}^{53} + \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w_o}{\partial y} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy,$$

$$T_{ij}^{63} = K_{ij}^{63} + \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_o}{\partial x} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial w_o}{\partial y} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy.$$