

응력함수에 기초한 복합 하중하의 복합재 적층판의 층간응력 해석 Stress Function-Based Interlaminar Stress Analysis of Composite Laminates under Complex Loading Conditions

김흥수 · 김정윤 · 김진곤
H. S. Kim, J. Y. Kim and J. G. Kim

(접수일 : 2009년 10월 9일, 수정일 : 2010년 2월 26일, 채택확정 : 2010년 3월 3일)

Key Words : Complex Loading(복합하중), Composite Laminates(복합재 적층판), Interlaminar Stress(층간응력), Interface Modeling(층간면 모델링), Stress Concentration(응력집중)

Abstract : Interlaminar stresses near the free edges of composite laminates have been analyzed considering wall effects. Interface modeling of bonding layer was introduced to explain the wall effect. Using Lekhnitskii stress functions and the principle of complementary virtual work, the interlaminar stresses were obtained, which satisfied the traction free boundary conditions not only at the free edges, but also at the top and bottom surfaces of laminates. The interface modeling provides not singular stresses but concentrated finite interlaminar stresses. The significant amount of reductions of stresses at the free edge are observed compared to the results without interface modeling. The real stress state can be predicted accurately and the results demonstrate the usefulness of the proposed interface modeling for the strength design of composite laminates.

1. 서 론

자유단이 존재하는 복합재 적층구조물은 자유단 부근에서 극심한 응력집중/특이 현상이 나타나게 되어 자유단 부근의 층간면에서 파괴가 발생하게 된다. 따라서 자유단 부근에서의 층간응력 해석은 중요한 설계인자이며, 지난 수십년동안 중요한 연구 과제로서 수행되어 왔다. 이러한 복합재 적층판의 층간응력에 대한 연구는 1970년 미공군연구소의 Pipes와 Pagano가 복합재 적층판의 층간 응력에 대해 유한차분법을 이용해 응력집중을 해석하면서 시작되었다¹⁾. 그 이후, 대부분의 연구자들은 각각의 층을 거시적으로 균질 이방성 재료로 가정하고 인접한 층간에는 완벽하게 접착되어 있다고 가정한 후, 선형탄성모델과 유한요소법이나 간단한 응력함수에 기초한 근사해들을 제안하면서 활발한 연구가 진행되어 왔다²⁻⁶⁾. 이러한 연구들을 통해 자유단 부근에서는 층간응력의 특이가 발생함을 알게 되었고,

이에 따라 파괴거동을 파악하기 위해 파괴역학과의 조합이 필요하게 되었다⁷⁾. 특이의 세기는 인접한 적층판의 물성치에 의존한다. 하지만 복합재 적층판은 Fig. 1에서와 같이 수치부분으로 된 수치층이 층간면에 존재한다. 따라서 층간응력 해석에서 응력특이가 나타나는 탄성모델은 적당하지 않다. 응력함수를 정상상태 함수로만 가정하면 자유단 부근에서 응력특이가 나타나지 않고 급격한 응력집중만 나타나게 된다. 그러나 이 집중응력 또한 층간응력에 의해 파괴가 야기되는 강도해석을 수행하기에는 실험치에 비해 너무나 크게 예측되었다. Whitney⁷⁾는 면내방향 응력을 한 층의 두께로 평균한 유효평균응력법을 제안했다. Whitney의 예측값들이 실험치와 잘 일치할 하지만 한 층의 두께를 이용하여 평균응력을 구하는 것은 일반적이지 못하다. 이에 저자들은 인장하중이 가해지는 복합재 적층판에 대해 층간면 모델링을 이용한 층간응력 해석 방법을 제안하였다⁸⁾. 층간면 모델링은 실제 복합재 적층판의 단면 SEM(Scanning Electron Microscope)사진을 분석한 결과, 각 적층판 사이의 접착층 두께가 적층판 두께의 10%정도의 값을 가지고, 급격한 강성의 변화를 막아주는 역할 (wall effect)을 하여, 응력집중

김흥수(교신저자) : 동국대학교 기계로봇에너지공학과
E-mail : heungsoo@dongguk.edu, Tel : 02-2260-8577
김정윤, 김진곤 : 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

을 감소시키는 효과를 보였다. 이러한 결과를 이용하면 적층판 한 층의 두께로 평균한 유효응력을 구하지 않고도 복합 적층판의 강도해석을 수행할 수 있게 된다. 본 연구에서는 기존의 연구를 확장하여, 인장 하중을 포함하여 적층판에 가해지는 대표적인 하중인 굽힘, 비틀림 하중 하에서의 층간응력 해석 방법을 제안하였다.

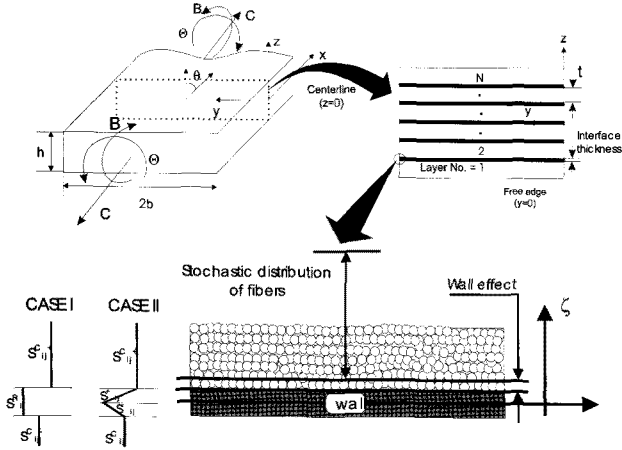


Fig. 1 Geometry of composite laminate with interface modeling

2. 정식화

복합재 적층판의 형상은 Fig. 1에 주어져 있고, 두께가 일정한 직교이방성재료로 구성되어 있다. 하중은 인장, 굽힘 그리고 비틀림 하중이 작용한다. 이 적층판은 평면 변형률⁹ 상태로 가정할 수 있고, 구성방정식을 이용하여 변형률들을 응력항으로 표현하면 식 (1)과 같다.

$$\epsilon_i = \hat{S}_{ij}\sigma_j + \frac{S_{i1}}{S_{11}}\epsilon_1 \quad (i, j = 2, 3, \dots, 6) \quad (1)$$

여기서

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} - S_{1i}S_{1j}/S_{11} \quad (2)$$

각각의 층들에서의 유연도는 균질 이방성재료로 가정하고, 경계면에서의 유연도는 Fig. 1에서와 같이 두 가지의 경우로 나누어서 가정하였다. CASE I 은 벽면효과(wall effect)의 영향을 무시하고 경계면에서의 유연도를 수지의 유연도로 대체하는 것이고, CASE II는 벽면효과를 고려하여 유연도가 선형으로 변하는 것으로 가정하는 것이다.

$$\begin{aligned} S_{ij}^+ &= (S_{ij}^{c+} - S_{ij}^r)\zeta + S_{ij}^r \quad (0 < \zeta < 1) \\ S_{ij}^- &= -(S_{ij}^{c-} - S_{ij}^r)\zeta + S_{ij}^r \quad (-1 < \zeta < 0) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ζ 는 경계면에서의 z방향으로의 국소좌표계이며, S_{ij}^{c+} 는 경계층 윗면의 유연도, S_{ij}^{c-} 는 경계층 아랫면의 유연도, S_{ij}^r 는 경계층의 유연도를 나타낸다. 강체운동모드를 제거한 평면변형률의 변위장은 식(4)와 같다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= (Ax - By + C)x + U(y, z) \\ v(x, y, z) &= -A\frac{x^2}{2} - \Theta xz + V(y, z) \\ w(x, y, z) &= B\frac{x^2}{2} + \Theta xy + W(y, z) \end{aligned} \quad (4)$$

정식화의 간략화를 위해 좌표축은 다음과 같이 무차원화 하였다.

$$\eta = z/h, \quad \xi = y/h \quad (5)$$

복합재 적층판의 임의의 점에서 항상 평형조건을 만족시키기 위해 Lekhnitskii 응력함수⁹를 도입한다. 응력함수는 굽힘 하중하에서는 인장하중이 가해지는 경우와 같은 형태로 가정할 수 있지만, 비틀림 하중이 가해지는 경우에는 지배방정식을 통한 유효해를 구할 수가 없게 된다. 따라서, 비틀림 하중하에서도 층간응력 해석을 위해 다음의 두 가지 경우로 나누어서 응력 함수를 정의한다.

CASE 1 : 인장, 굽힘하중

$$F = \sum_{i=1}^n f_i(\xi)g_i(\eta), \quad \Psi = \sum_{i=1}^n p_i(\xi)g_i'(\eta) \quad (6)$$

CASE 2 : 비틀림 하중

$$F = \sum_{i=1}^n f_i(\xi)g_i(\eta), \quad \Psi = \sum_{i=1}^n p_i(\xi)h_i(\eta) \quad (7)$$

응력함수는 면내방향 응력함수와 두께 방향 응력함수로 나누어져 있다. 초기에 하중 경계조건을 만족하는 두께 방향 응력함수를 가정하면, 최소보족일의 원리(complementary virtual work principle)에 의해 면내 방향 응력함수를 구할 수 있다. 따라서, 두께 방향 응력함수 $g_i(\eta)$ 와 $h_i(\eta)$ 는 적층판의 상하면에서 경계조건을 만족시키는 함수로 가정했다. $g_i(\eta)$ 는 양단고정된 보의 형상함수를 이용하였고, $h_i(\eta)$ 는 양단 단순지지된 보의 형상함수를 이용하

였다¹⁰.

주어진 응력함수와 최소보존일의 원리를 이용하면 면내방향응력함수를 구하기 위한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\int \int (\Delta u \delta \sigma_{xx} + \Delta v \delta \sigma_{yx} + \Delta w \delta \sigma_{zx}) dy dz = \int \int \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dy dz \quad (8)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Delta u &= C - Bz \\ \Delta v &= -\Theta z \\ \Delta w &= B/2 + \Theta y \end{aligned} \quad (9)$$

이제 응력함수에 관한 식을 식 (8)에 대입하고, 부분적분을 수행하면 다음과 같은 면내방향함수에 대한 4차미분과 2차미분으로 연성된 상미분 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} &\int [a_{ij}^{(4)} f_j^{IV} + a_{ij}^{(2)} f_j^{II} + a_{ij}^{(0)} f_j + b_{ij}^{(2)} p_j^{II} + b_{ij}^{(0)} p_j + r_i] \delta f_i d\xi \\ &+ \int [c_{ij}^{(2)} p_j^{II} + c_{ij}^{(0)} p_j + b_{ij}^{(2)} f_j^{II} b_{ij}^{(0)} f_j + s_i] \delta p_i d\xi = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

(i, j = 2, 3, ..., 6)

식(10)에서 지배방정식은 $f_i(\xi)$ 와 $p_i(\xi)$ 가 연성된 상미분방정식이다. 4차와 2차의 연성된 상미분 방정식의 해를 구하기 위해, 먼저 제차해를 지수함수로 정의하고 식(10)에 대입하여 정리하면 고유치 문제로 변환된다. 이 고유치 문제는 3n개의 고유치가 계산되므로, 제차해는 다음과 같이 3n개의 선형중첩으로 계산되어 진다.

$$\begin{aligned} f_i^{(H)} &= v_{ij}^f t_j e^{-\lambda \xi} \\ p_i^{(H)} &= v_{ij}^p t_j e^{-\lambda \xi} \end{aligned} \quad (11)$$

(i = 1, 2, ..., n), (j = 1, 2, ..., 3n)

여기서 t_j 는 경계조건에 의해서 결정되는 상수이다.

특이해는 r_i 와 s_i 가 상수이므로, $f_i(\xi)$ 와 $p_i(\xi)$ 를 상수로 가정함으로써 구할 수 있다. 따라서, 면내방향함수에 대한 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_i &= f_i^{(H)} + f_i^{(P)} \\ p_i &= p_i^{(H)} + p_i^{(P)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (12)$$

면내방향함수의 결정에 대한 마지막 단계는 t_j 에 대한 계산으로, 이 상수는 자유단 (y=0)에서 $\sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = 0$ 이 만족되어야 하는 하중자유경계

조건을 이용하면 구할 수 있다.

위의 과정들로부터 계산된 면내방향함수를 응력함수에 대입하면 자유단에서의 층간응력이 계산된다. 식(13)은 CASE 2일 경우의 층간응력이다.

CASE 1일 경우에는 h_i 를 g_i^I 로, h_i^{II} 를 g_i^{II} 로 바꾸면 층간응력들이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= v_{ij}^f t_j e^{-\lambda \xi} g_i^{II}(\eta) + f_i^{(P)} g_i^{II} \\ \sigma_3 &= \lambda_j^2 v_{ij}^f t_j e^{-\lambda \xi} g_i(\eta) \\ \sigma_4 &= \lambda_j v_{ij}^f t_j e^{-\lambda \xi} g_i^I(\eta) \\ \sigma_5 &= \lambda_j v_{ij}^p t_j e^{-\lambda \xi} g_i^I(\eta) \\ \sigma_5 &= \lambda_j v_{ij}^p t_j e^{-\lambda \xi} g_i^I(\eta) \end{aligned} \quad (13)$$

(i = 1, 2, ..., n), (j = 1, 2, ..., 3n)

3. 수치예

본 수치예에서 사용된 graphite/epoxy 복합적층판의 재질상수들은 다음과 같다.

적층판

$$E_1 = 20 \times 10^6 \text{ psi}, \quad E_2 = E_3 = 2.1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.85 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.21$$

에폭시

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.21$$

층간응력은 자유단에서 크게 나타나고, 면내방향으로 들어가면 급속하게 사라지기 때문에, 면내방향 길이(b)는 적층판 두께의 두 배로 가정하였다. 그리고 층간면의 두께는 적층판의 단면 SEM 사진을 분석하면⁸, 한 층의 10% 정도의 두께를 가지기 때문에, 적층판 한 층 두께의 1/10으로 가정하였다. 그리고, 본 연구에서는 복합재 적층판의 대표적인 적층구조인 정상겹침(cross-ply)와 각겹침(angle-ply)으로 배열된 복합적층판에 대한 해석을 통해 층간면 모델링의 효과를 살펴보았다.

3.1 인장하중이 가해지는 경우

Fig. 2는 단위인장하중이 가해지는 경우에 각겹침으로 적층된 [45/-45]_s 대칭적층판의 45/-45 경계면에서 면내방향으로의 층간응력 분포를 나타낸 것이다. 각겹침 적층판의 경우, 층간수직응력(σ_3)에 비해 층간전단응력(σ_5)이 크게 나타남을 알 수 있다. 또한, x-z평면에서 나타나는 층간전단응력인 σ_5 가

y-z평면에서 나타나는 층간전단응력인 σ_4 에 비해 크게 나타나는데, 이는 x축 방향으로 인장하중이 가해지기 때문이다. 층간응력은 각 층간의 물성치의 차이와 자유단의 기하학적 불연속 때문에 발생하기 때문에, 면내방향으로 들어가면서 급속하게 사라지며, 적층 두께의 두 배정도 되는 적층 내부에서는 완전히 사라지는 것을 확인 할 수 있다. 층간수직응력의 경우에는, 층간면 모델링이 있는 경우, 자유단에서 응력이 집중되지 않고, 벽면효과에 의해 응력이 줄어드는 것을 볼 수 있다. 또한, 층간전단응력(σ_5)의 경우에도, 층간면 효과를 고려한 CASE I의 경우, 자유단에서의 최대응력이 30% 줄어들고 CASE II인 경우에는 16% 가까이 줄어드는 것을 볼 수 있다. 이는 유효평균응력법을 사용하지 않고도 복합재적층판의 층간 강도해석을 수행할 수 있는 가능성을 제공한다.

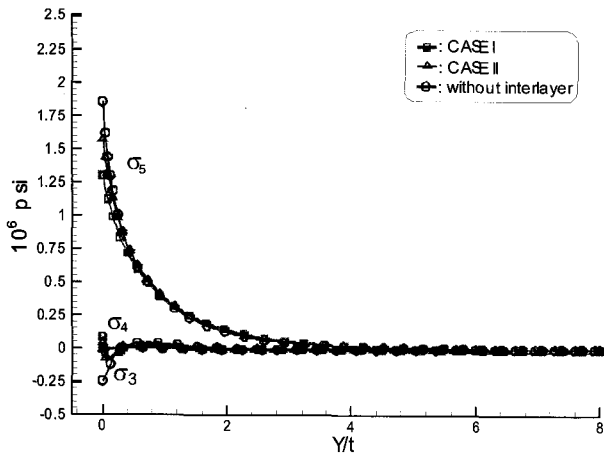


Fig. 2 Interlaminar stresses at the 45/-45 interface of [45/-45]s laminate under unit extension

3.2 굽힘하중이 가해지는 경우

Fig. 3은 단위굽힘하중이 가해지는 경우, 정상접침으로 적층된 [0/90]s 대칭적층판의 0/90경계면에서 면내방향으로의 층간응력의 분포를 나타낸 것이다. 정상접침 적층판의 경우, x-z평면에서 나타나는 층간전단응력 σ_5 는 아주 작아서, 그래프상에 나타내지 않았다. 층간수직응력과 y-z평면에서 나타나는 층간 전단응력인 σ_4 의 분포가 주어져 있으며, σ_4 의 경우 자유단에서 자유하중조건을 만족해야 하기 때문에 응력의 크기가 0이고 조금 안쪽으로 들어온 면내에서 크게 나타나는 것을 확인할 수 있다. 층간응력의 분포는 인장응력의 경우와 같은 형태로 나타나며, 유효차분법을 이용해 층간응력을 해석한

Yin⁴의 해석 결과와, 응력함수에 기초한 현재의 결과가 같은 형태의 층간 응력분포를 보여줌을 알 수 있다. 하지만, 벽면효과를 고려하여 층간수직응력의 크기를 비교하면, CASE I과 CASE II의 경우 공히 40% 이상 감소함을 알 수 있다.

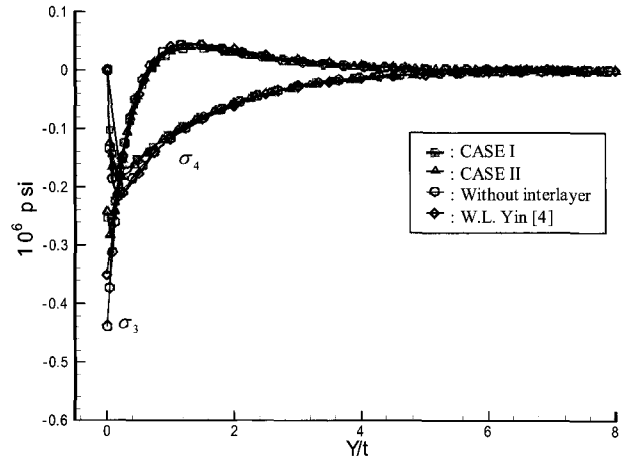


Fig. 3 Interlaminar stresses at the 0/90 interface of [0/90]s laminate under unit bending (B=1/h)

3.3 비틀림 하중이 가해지는 경우

Fig. 4는 단위비틀림하중이 가해지는 경우, 각접침으로 적층된 [45/-45]s 대칭적층판의 45/-45 경계면에서 면내방향으로의 층간응력 분포를 나타낸 것이다. 비틀림하중이 가해지는 경우는 인장하중이 가해지는 경우와는 다르게, y-z평면의 층간전단응력이 x-z평면상의 층간전단응력과 같은 오더의 크기를 가진다. 하지만, 면내방향으로의 층간응력 감소가 인장이나 굽힘하중에 비해 다소 느리게 나타나는 것을 알 수 있다. 이는 비틀림하중이 전단응력을 주로 발생시키기 때문이다. 비틀림하중이 가해지는 경우에도, 유효차분법을 이용한 해석결과⁴나 응력함수에 기초한 해석 결과가 같은 형태임을 알 수 있다. 층간응력은 각 층간의 물성치의 차이와 기하학적 특이가 존재하는 경우에 발생하기 때문에, 비틀림 하중이 작용하는 경우에도 인장이나 굽힘하중이 가해지는 경우와 마찬가지로 층간응력이 나타나는 것을 확인할 수 있다. 응력함수에 기초한 층간응력을 해석할 경우, 벽면효과를 고려할 경우에는 인장이나 굽힘의 경우와 마찬가지로 층간응력의 집중도가 떨어지는 것을 확인할 수 있다. 이는 벽면효과를 정확히 해석할 경우 복합하중이 가해지더라도, 유효평균응력법을 사용하지 않고 복합재 적층판의 강도해석을 수행할 수 있다는 것을 의미한다.

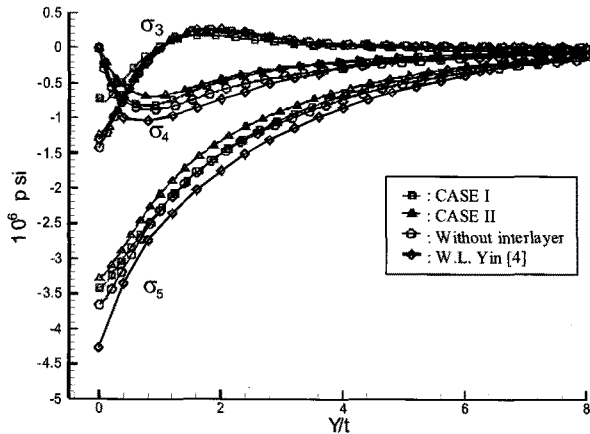


Fig. 4 Interlaminar stresses at the 45/-45 interface of [45/-45]s laminate under unit twisting ($\Theta=1/h$)

4. 결 론

실제 복합재 적층판 구조물은 경화과정을 통하여 층과 층 사이에 수지의 방출에 의한 수지경계층이 형성되게 된다. 이런 수지에 의해 형성되는 얇은 층은 층과 층 사이에서의 강성의 차이를 줄이고 자유단 효과에 의해 발생하는 급격한 응력구배를 감소시켜 주는 벽면효과를 유발한다. 그러므로 실제 층간응력은 거시적으로 균질 이방성으로 모델링한 결과와는 다른 결과를 제공하게 될 것이라는 것을 추론할 수 있다. 본 논문에서는 이러한 벽면효과를 알아보기 위해 적층판 사이에 형성된 얇은 수지층을 층간면으로 모델링을 하였고, 복합하중이 작용하는 경우 나타나는 층간응력을 응력함수를 이용하여 해석하였다. 층간면 모델링을 이용해서 층간응력을 해석할 경우에는 자유단에서 층간응력의 특이가 발생하지 않음을 알 수가 있었다. 그리고 응력집중도 층간면 모델링을 고려하지 않을 경우에 비해 감소함을 알 수가 있다. 층간면 모델링에서 유연도를 상수로 가정하는 것과 벽면효과를 좀 더 자세히 묘사하기 위해 선형으로 변하게 가정하는 것은 층간응력을 예측하는데 두드러진 차이를 나타내지 않았다. 앞으로 이런 층간면 모델링은 복합재 적층판 구조물에 대표적으로 가해지는 또 하나의 외력 형태인 열하중에 대해 적용을 함으로써, 적층판에 발생하는 층간응력을 모두 해석할 수 있어야 한다. 이렇게 정확하게 예측된 층간응력은 복합재 적층판의 강도설계를 하는데 유용하게 사용될 수 있다. 따라서, 현재의 결과를 기초로 적층판의 강도해석을 수행하고 실험결과와 비교하는 연구를 추후에 진행할 예정이다.

후 기

이 논문은 2009년 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (2009-0070883).

참고 문헌

1. Pipes R. B. and Pagano N. J., 1970, "Interlaminar Stresses in Composite Laminates Under Uniaxial Extension", *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 4, No. 4, pp. 538~548.
2. Spilker R. L. and Chou S. C., 1980, "Edge Effects in Symmetric Composite Laminates: Importance of Satisfying the Traction-Free-Edge Condition", *Journal of Composite Materials*, Vol. 14, pp. 2~20.
3. Kassapoglou C. and Lagace P. A., 1986, "An Efficient Method for the Calculation of Interlaminar Stresses in Composite Materials", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 744~750.
4. Yin W. L., 1994, "Free-Edge Effects in Anisotropic Laminates Under Extension, Bending and Twisting. Part 1 - A Stress Function Based Variational Approach", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 410~415.
5. Cho M. and Kim H. S., 2000, "Iterative Free-Edge Stress Analysis of Composite Laminates under Extension, Bending, Twisting and Thermal Loadings", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 3, pp. 435~459.
6. Kim H. S., Rhee S. Y. and Cho M., 2008, "Simple and Efficient Interlaminar Stress Analysis of Composite Laminates with Internal Ply-Drop", *Composite Structures*, Vol. 84, No. 1, pp. 73~86.
7. Whitney J. M. and Nuismer R. J., 1974, "Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentration", *Journal of Composite Materials*, Vol. 8, No. 3, pp. 253~265.

8. 김홍수, 김정윤, 김진곤, 2009, "응력함수와 층간면 모델링을 이용한 복합재 적층판의 3차원 응력해석", 한국동력기계공학회지, 제13권, 제4호, pp. 49~55.
9. Lekhnitskii S. G., 1963, Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Holden-Day, San Francisco.
10. Blevins R. D., 1979. "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Ltd, New York.