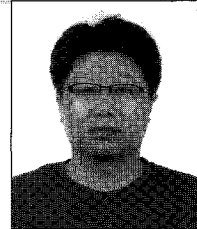


보 이론에서 경계조건의 영향

Edge Effects on Accuracy of Beam Theories



김 준 식*

* 금오공과대학교 기계공학부 교수

1. 머리말

복합재료의 성능향상 및 폭 넓은 상용화에 힘입어 그 사용이 꾸준히 증대 되어 왔으며, 현재에도 다양한 구조물에 적용되고 있다. 특히, 복합재료 구조물의 특성중 하나인 강성수치의 유연성 및 변형모드의 연성은 현대의 최신경향인 기능성 구조물의 개발에 크게 기여할 수 있다. 이러한 기능성 구조물을 설계하기 위해서는 이방성 복합재료 구조물의 정확한 해석이 요구된다. 최근 강력한 수학적 도구인 점근해석에 기초한 기법들이 개발되어 왔다. 이 기법들의 특징으로는 구조물의 기하학적 특성에 기반을 둔 가정 이외에는 어떠한 가정도 미리하지 않는다는 것이다. 이렇게 함으로써 매우 정확한 구조물 해석기법을 3차원 탄성론으로부터 직접 유도할 수 있다. 이러한 점근해석 기법들은 크게 두 가지의 형태로 구분할 수 있다. 하나는 3차원 평형방정식에 기초한 점근기법(Formal Asymptotic Method; FAM)이고 다른 하나는 3차원 변형에너지에 기반을 둔 점근기법(Variational Asymptotic Method; VAM)이다.

앞서 언급한 두 가지 점근해석 기법들은 전형적인 공학 구조물 해석에 있어 고전적 근사를 통하여 정확한 결과를 준다. 일반적으로 고전적 근사해석은 많은 공학문제에 있어서 정확한 예측을 제공하지만, 고주파 진동 문제나 샌드

위치 구조물의 해석에 있어서는 고정밀 해석이 요구된다. 점근해석기법에 기초한 고정밀 해석(즉, 고차 근사)시에 발생하는 문제로는 경계조건에 관한 문제가 있다. 이 경계조건 문제는 Gregory and Wang이 문제를 제기한 이후 몇몇의 연구가 이루어져 왔지만, 이방성 복합재료 구조물에 대한 연구는 아직 미흡한 수준이다.

비록 Gregory and Wang이 올바른 경계조건을 구하는 방법을 제시하였지만, 이 방법은 공학문제에 적용하기에는 너무 복잡하다는 단점이 있다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 Kim et al. 등은 FAM에 기초하여 가상일의 원리를 각 레벨의 방정식에 적용하여 수치적으로 이산화하고, 경계조건을 쇠퇴해석법(Decay analysis method)을 사용하지 않고 점근 변위벡터가 보의 기본 변위 벡터에 직교(orthogonal)하다는 조건을 적용함으로써 변위기술 경계조건을 성공적으로 유도하였다. 이들은 수치예제를 통해 전형적인 Rankine/Timoshenko형태의 보 이론들은 굽힘 변형과 전단 변형이 연성된 경우 보의 거동을 정량적으로 뿐만 아니라 정성적으로도 예측할 수 없음을 보였다. 비록 이들이 제안한 방법을 통해 일반적인 환경 하에서의 변위기술 경계조건을 유도할 수 있지만, 정성적으로 그 정확도를 판단할 수 없다는 것과 그 유도 과정이 FAM에 기반을 둬서 인하여 체계적이지 못한 한계점을 지니고 있다.

본 글에서는 이방성 보 문제에서의 점근적 경계조건을 변분원리를 통해 체계적으로 유도하고, 그 결과를 바탕으로 Rankine/Timoshenko 보 이론과 외팔보에 대한 Timoshenko가 제시한 탄성해의 정확도를 경계조건을 중심으로 평가하고자 한다.

2. 가상일의 원리

본 글에서는 단면의 모양이 일정한 이방성 보 구조물에 대하여 기술하고자 한다. 특별한 언급이 없다면 그리스 첨자들은 2 또는 3의 수치를 나타내고, 라틴 첨자들은 1, 2 또는 3의 수치를 나타낸다. 보의 기준 축은 x_1 에 의해서 그리고 보의 단면은 x_α 에 의해 기술되어 진다. 삼차원 선형 문제는 다음과 같이 일반적으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_{ij,j}^e + B_i^e = 0 \tag{1}$$

여기서 σ_{ij}^e 와 B_i^e 는 응력 텐서 그리고 바디 포스를 나타낸다. 하첨자 $0, i$ 는 x_i 좌표에 관한 미분을 표시한다. 식(1)에 대한 경계조건은 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_i^e = \bar{u}_i^e \text{ on } S_u^e, \text{ and } \sigma_{ij}^e n_j = \bar{p}_i^e \text{ on } S_\sigma^e \tag{2}$$

식 (1) 과 식 (2)를 고려했을 때 가상일의 원리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{x_1} \int_{S^e} (\sigma_{ij}^e \delta_{ij}^e - B_i^e \delta u_i^e) dS^e dx_1 - \int_{S^e} \bar{p}_i^e \delta u_i^e dS^e = 0, \tag{3}$$

이식은 변위 경계에서 변위가 기술되어야 한다는 조건을 포함하고 있지만, 어떻게 변위가 3차원적으로 기술되어야 하는지는 포함하고 있지 않다는 점에 주목하여야 한다. Reissner의 혼합변분 이론을 이용하면 3차원 변위 기술조건을 포함시킬 수 있지만 독립된 응력장을 고려해야만 한다. 이러한 어려움을 극복하기 위해 3차원 변위기술 경계조건을 Lagrange's multiplier를 도입하여 유도할 수 있다. 이렇게 함으로써 변위가 변위경계에서 어떻게 3차원적으로 기술되어야하는 지를 포함시킬 수 있다. 또한 Lagrange's multiplier는 점근법에 있어서 적절한 변위경계조건을 구하는데 매우 중요한 역할을 한다.

3. 점근해석 기법

점근법을 문제에 적용하기 위하여 먼저 매개변수(ϵ)를 정

의해야 한다. 이 매개변수는 보 구조물에 있어서는 보통 보 단면의 최대 길이(h)를 보의 특성 길이(l_c)로 나눈 값을 취한다. 이를 이용하여 좌표계를 다음과 같이 스케일 한다.

$$y_1 = x_1, y_\alpha = \frac{x_\alpha}{\epsilon}, \epsilon \equiv \frac{h}{l_c} \tag{5}$$

식 (5)를 변형률과 응력에 적용하면 매개변수(ϵ)의 항으로 표현할 수 있다. 편의상 바디포스를 무시하고, 점근법 적용을 위하여 외력(분포하중)과 기술된 변위는 다음과 같이 스케일 하였다.

$$\begin{aligned} p_i^e &= \epsilon p_1, \quad p_\alpha^e = \epsilon^2 p_\alpha, \\ u_1^e &= \epsilon u_1, \quad u_\alpha^e = u_\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

이제 변위 벡터를 매개변수의 항으로 전개하면 점근법을 식 (1) 과 식 (2)에 적용할 수 있다. 변위 벡터를 점근 전개하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u^\epsilon(x_i) = u^{(0)}(y_i) + \epsilon u^{(1)}(y_i) + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots \tag{7}$$

식 (5), 식 (6) 그리고 식 (7)을 식 (3)에 적용하고 정리하면 점근 전개된 가상일의 식을 얻을 수 있다. 가상일의 식을 매개변수(ϵ)의 항으로 정리하면 각 오더별로 가상일의 식을 얻을 수 있다. 가장 저차의 식은 0-오더의 식인데 이 식에서는 기본해(fundamental solution)를 얻을 수 있다. 응력과 변형률이 없다는 가정으로부터 (즉, $\sigma^{(0)} = \gamma^{(0)} = 0$) 이 기본해를 구하게 된다. 0-오더의 결과를 이용하면, 1-오더의 가상일의 결과를 얻을 수 있다. 1-오더의 가상일은 자동으로 만족되어지게 된다.

2-오더의 가상일의 식으로부터 처음으로 보 두께방향의 워핑(warping)함수를 얻을 수 있다. 이 함수를 얻기 위하여 2-오더 변위 벡터는 기본해($u^{(2)}$)와 섭동항($w^{(2)}$)으로 분리한다. 이때 얻어진 섭동항이 보의 워핑 함수가 된다. 이를 바탕으로 2-오더 변위 벡터는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u^{(2)}(y_i) = u^{(2)}(y_i) + w^{(2)}(y_i) \tag{8}$$

식 (16)을 식 (3)의 2-오더 항에 대입하고 정리하면 워핑 함수와 1차원 Euler-Bernoulli (이후 E-B) 보 방정식을 얻을 수 있다. 자세한 유도 방식은 참고문헌 [4]에 기술되어져 있다.

위에서 기술되어진 정식화에 따르면 최종적으로 각각의 오더에 대한 가상일의 회귀 방정식(recursive formulation)을

얻을 수 있다. 먼저 워핑함수를 구하기 위한 미세 방정식 (microscopic equation) 그리고 보 구조물의 1차원 정식화를 위한 거시 방정식(macroscopic equation)을 분리함으로써 3차원 탄성문제를 각각 2차원 단면문제와 1차원 보문제로 분리할 수 있다. 이렇게 함으로써 3차원 유한요소법을 이용하지 않고도 점근적으로 정확한 보의 해를 구할 수 있다. 미세 방정식으로부터 얻어진 워핑 함수는 거시 보 방정식의 등가 강성을 구하는데 이용된다. 또한 각 오터에서의 1차원 보 문제의 해로부터 각 단면에서의 3차원 응력 분포를 오더별로 구할 수 있게 된다.

4. 변위 경계조건

응력이 기술된 경계조건은 참고문헌에서 잘 예시되었듯이 일반적인 변분법을 통하여 얻어진 조건과 일치한다. 이는 St. Venant의 원리에서 잘 다루어진 것처럼 응력이 경계에서 기술된 경우, 경계에서 멀어짐에 따라 합응력으로써 보의 힘을 수학적으로 아무 문제없이 표현할 수 있음을 뜻한다. 하지만 변위가 기술된 경계조건에서는 이 원리를 그대로 적용할 수 없다(Dym and Shames). 이 절에서는 복잡한 쇠퇴 해석법(decay analysis method)의 적용 없이 공학적 관점에서 쉽게 이용할 수 있는 변위 기술 경계조건의 유도에 관하여 다룬다. 4장 이후부터는 식의 복잡성을 최소화하기 위하여 2차원 탄성문제로 국한하여 설명하고자 한다.

4.1 평균 변위 경계조건

잘 알려진 바와 같이 고정 단에서의 변위 기술 경계조건은 2차원 변위의 두께 방향으로의 변위적분 평균과 기울기의 평균이 0이라는 조건으로부터 구하여 진다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} u_1^e dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} u_3^e dx_3 = 0, \int_{-h/2}^{h/2} x_3 u_1^e dx_3 = 0 \quad (9)$$

위 식은 2장에서 소개한 Lagrange's multiplier항으로부터도 계산되어질 수 있다. 만약 점근해석의 기본 변위장(\tilde{u})을 Lagrange's multiplier로 취하게 되면, 식 (9)와 같은 식을 고정단(즉, $\bar{u}_i^e = 0$)에 대해서 얻을 수 있다. 이 표현식은 고정단 변위 경계조건에 운동학적 의미를 부여한다. 다시 말하면, 2차원 탄성 변형을 기술하는 변위장은 강제 모드(두개의 평행운동, 하나의 회전운동)에 직교(orthogonal)해야 한다는 것이다.

또한 식 (9)는 Rankine/Timoshenko (이후 R-T) 보 이론에서의 변위장을 정당화 시켜준다. 즉,

$$u_1(x_i) = u_1^o(x_1) + \theta(x_1)x_3, u_3(x_i) = u_3^o(x_1) \quad (10)$$

여기서

$$u_i^o(x_1) = \frac{1}{h} \int_h u_i(x_i) dx_3, \quad (11)$$

$$\theta(x_1) = \frac{12}{h^3} \int_h x_3 u_1(x_i) dx_3.$$

위의 식들은 R-T 보 이론이 2차원 변위장의 평균값을 가지는 변수들(1차원 변수들, 두개의 병진 및 하나의 회전)로 변위장을 기술하고 있음을 보여준다. 따라서 R-T 보 이론은 강제운동을 기술하고 있다고 볼 수 있다. 고정단에서의 강제 모드를 제거하기 1차원 변수들은 모두 영이 되어야 한다. 즉,

$$u_i^o = 0, \quad \theta = 0 \quad (12)$$

이식은 또한 2차원 변위 경계조건을 정확하게 만족한다. 하지만 내부 변위장(interior displacement)의 부정확성으로 인해 그 경계 조건의 정확도가 떨어짐을 수치 예제에서 보여줄 것이다. 반면에 점근해석에 기초한 변위장은 고정단에서의 경계조건이 2차원 변위 경계조건을 정확하게 만족하지 않지만 내부 변위는 2차원 유한 요소 해와 비교하여 R-T 보 이론보다 정확하다는 것을 알 수 있게 된다.

4.2 응력-변위 경계조건

한편 Lagrange's Multiplier의 값을 변분을 통해 변위조건을 구할 수 있다. 정리하면 결과적으로 다음과 같은 변위 기술 경계조건을 고정단의 경우에 대하여 얻을 수 있다.

$$\int_{S^e} (u_1^e \delta \sigma_{11}^e + u_3^e \delta \sigma_{13}^e) dS^e = 0 \quad (13)$$

이식에서 주의 할 점은 만약 면내응력과 전단응력이 각각 두께방향에 대하여 선형 함수와 상수로 주어진다면 식 (9)와 같은 결과를 주게 된다. 이 조건은 R-T 보 이론에서의 응력들의 분포와 정확하게 일치한다. 하지만 상대적으로 짧은 보에서는 실제 면내응력과 전단응력의 분포는 각각 두께방향으로 3차 및 2차 함수 형태이므로 오차를 내포하게 된다. 이러한 오차를 줄이기 위하여 R-T 보 이론에서는 잘 알려진 바와 같이 전단 수정 계수 (shear correction factor)를 도입한다. 그

러나 이 방법으로 횡방향 변위의 보정은 가능하나 면내 변위는 보정할 수 없다. 다만 이 전단 수정 계수는 면내 변위의 보정을 은연중에 내포하고 있다.

일반적으로 복합재 보에 대해서는 등방성을 가정할 수 없기 때문에 식 (9)의 오차는 더 증가하게 된다. 이 경우에 응력 분포는 더 이상 선형함수의 형태로 가정하기 힘들기 때문이다. 다만, 적절한 전단 수정 계수의 도입으로 횡방향 변위의 정확도 및 고유 진동수 등의 정확도는 향상 할 수 있다. 따라서 이에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. R-T 보 이론에서의 변위 경계조건은 식 (9)과 식 (13)의 적용에 관계없이 항상 식 (12)의 결과를 준다. 반면에 점근해석법은 다른 결과를 주게 되는데, 재료의 이방성 정도에 따라 그 정확도는 다르다. 또한 횡방향 변위 및 전단 응력의 정확도 보다는 면내 변위와 면내 응력의 정확도에 따라 해석 결과의 정확도가 좌우된다.

5. 수치 예제 및 고찰

앞서 언급된 변위 경계조건의 영향을 등방성 및 이방성 외팔보 문제를 수치예제로써 해석하고 그 결과를 고찰하고자 한다(그림 1). 이 예제들에서는 R-T 보이론, 점근해석 기법, 그리고 Timoshenko의 탄성해 등을 이용하여 그 정적 거동을 비교·검토한다.

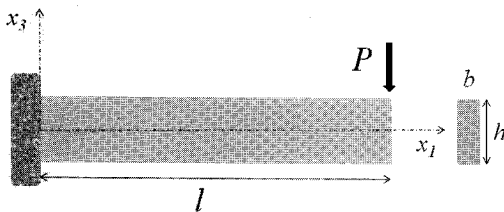


그림 1 자유단에서 집중하중이 가해지는 외팔보

5.1 보 이론들에 의한 해석해 비교

이 문제에 대한 Timoshenko의 탄성해는 참고문헌[6]에 잘 기술되어 있다. 여기에서 Timoshenko는 두 가지의 변위 경계조건을 제안하였고, 각각 E-B 보 이론의 해 그리고 전단변형을 고려한 해라고 설명하였다.

$$u_{3,1}^c(0,0) = 0 \rightarrow \text{Classical solution} \quad (14a)$$

$$u_{1,3}^c(0,0) = 0 \rightarrow \text{Shear deformation} \quad (14b)$$

식 (14a)에 의한 해는 정확하게 E-B 보 이론의 해와 일치

함으로 생략하고, 식 (14b)에 의한 해만 다루도록 한다. 식 (14b)에 의한 Timoshenko의 탄성해(이후 T-E)는 보의 중심선을 따라 다음과 같이 주어진다.

$$u_3^{TE}(x_1,0) = u_3^{EB}(x_1,0) + \frac{3}{2} \frac{px_1}{GA} \quad (15)$$

여기서 G는 전단 강성 계수이다. R-T 보 이론의 해는 다음과 같다.

$$u_3^{RT}(x_1,0) = u_3^{EB}(x_1,0) + \frac{1}{k_s} \frac{px_1}{GA} \quad (16)$$

여기서 k_s 는 전단 수정 계수이다.

한편 점근해석법에서는 변위 경계조건 식 (9)과 식 (13)에 의한 결과가 달라진다.

$$u_3^{PT1} = u_3^{EB} + \frac{6}{5} \frac{px_1}{GA} + \frac{\nu p(3x_1 - 5l)}{10EA} \quad (17a)$$

$$u_3^{PT2} = u_3^{EB} + \frac{6}{5} \frac{px_1}{GA} + \frac{3\nu p(x_1 - l)}{10EA} \quad (17b)$$

여기서 사용된 변위 경계조건은 각 오더 별로 다음과 같이 주어진다.

$$v_3^{(0)}|_{x_1=0} = v_{3,1}^{(0)}|_{x_1=0} = 0 \quad (18a)$$

$$v_3^{(1)}|_{x_1=0} = v_{3,1}^{(1)}|_{x_1=0} = 0 \quad (18b)$$

그리고

$$v_3^{(2)PT2}|_{x_1=0} = \frac{\nu pl}{5EA}, v_3^{(2)PT1}|_{x_1=0} = 0 \quad (19c)$$

$$v_{3,1}^{(2)PT1,PT2} = \frac{6}{5} \frac{p}{GA} - \frac{\nu p}{5EA} \quad (19d)$$

5.2 경계조건의 영향

잘 알려진 바와 같이 전단 수정 계수는 등방성 판의 경우 5/6이고, 얇은 직각 단면을 가지는 보의 경우(cowper, 1966)는 다음과 같이 주어진다.

$$k_s^C = \frac{20(1+\nu)}{24+20\nu} \quad (20)$$

특히 이 문제에서는 보의 기울기가 상수가 되므로 이를 바탕으로 전단 수정 계수를 구할 수 있다. 반면에 식 (17)을

이용하여 보의 기울기(slope)를 계산하면 전단 수정 계수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$k_s^{PT} = \frac{20(1+\nu)}{24+27\nu} \quad (21)$$

식 (20)과 식 (21)은 포아송(Poisson) 비가 영인 경우에 같은 값인 5/6을 준다. 반면에 T-E 해는 2/3을 줌을 식 (15)로부터 알 수 있다. 한편 점근해석 기법에 의한 전단 수정 계수는 주어진 문제에 대하여 수학적으로 정확한 해임을 참고문헌[3]의 변위 경계조건과 비교를 통해서 알 수 있다. 따라서 R-T 보 이론에서 전단 수정 계수를 1로 가정 했을 때 각 이론들의 정확도는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$PT2 \geq PT1 > RT > TE \geq EB \quad (22)$$


만약 TE에서 변위 경계조건을 식 (14b) 대신에 식 (9) 그리고 식 (13)을 사용하게 되면 각각 PT1과 PT2와 같은 변위 분포를 얻을 수 있다. 따라서 탄성해에서 변위만 기술되어 있는 경계조건(즉, 고정단)이 있는 경우 내부해의 정확도는 이 변위 경계조건의 정확도에 따라 다름을 알 수 있다. 이방성이 강한 샌드위치 보의 경우에는 PT1과 PT2의 결과도 달라지는데, 그 이유는 고정단에서의 응력 분포가 더 이상 선형이 아니고 두께방향으로 강한 비선형 분포를 보여주기 때문이다. 이 문제에 대해서는 지면관계상 생략하도록 한다.

6. 맺음말

본 글에서는 점근해석기법 적용시에 공학문제에 쉽게 적용할 수 있는 변위 기술 경계조건을 유도하였다. 이 경계조건들을 적용하여 이방성 외팔보 문제를 해석하고, 그 결과를 Timoshenko의 탄성해, R-T 보 이론의 해, 그리고 E-B 보 이론의 해와 비교·검토하였다. 수치예제를 통해서 보였듯이 Timoshenko의 탄성해는 경계조건부의 부정확성으로 인하여 오차가 발생함을 보였고, R-T해는 전단수정계수의 정확도에 비례함을 보였다. 또한 R-T 보 이론에서는 내부 변위장

의 한계성으로 인하여 경계조건부의 변화로 인한 정확도를 향상할 수 없었다. 포아송의 비가 영인 경우 등방성 보의 전단 수정 계수 5/6은 점근적으로 정확한 값을 보였다. 경계조건의 정확도는 응력 분포의 정확도 보다는 면내 변위장의 정확도에 일차적으로 영향을 받는다는 것을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. Duva, J. M. and Smmonds, J. G., 1991, "The usefulness of elementary theory for the linear vibrations of layered, orthotropic elastic beams and corrections due to two-dimensional end effects," ASME: Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, pp. 175~180.
2. Berdichevsky, V.L., 1981, "On the energy of an elastic rod," Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM), Vol. 45, No. 4, pp. 518~529.
3. Gregory, R.D. and Wan, F.Y.M., 1984, "Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory," Journal of Elasticity, Vol. 14, pp. 27~64.
4. Kim, J.-S., Cho, M., and Smith, E.C., 2008, "An asymptotic analysis of composite beams with kinematically corrected end effects," International Journal of Solids and Structures, Vol. 45, pp. 1954~1977.
5. Buannic, N. and Cartraud, P., 2001, "Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method," International Journal of Solids and Structures, Vol. 38, pp. 7139~7161.
6. Timoshenko, S. and Goodier, J.N., 1951, Theory of Elasticity, Second Ed. McGraw-Hill Book Company.
7. Dym, C.L. and Shames, I.H., 1973, Solid Mechanics: A Variational Approach, McGraw-Hill Book Company.
8. Cowper, G.R., 1966, "The shear coefficient in Timoshenko beam theory," ASME: Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335~340. 

[담당 : 김홍수, 편집위원]