

研究論文

온도예조건화 나비에스톡스 방정식의
계산오차 문제 완화 방법 연구

이상현*

An Approach to Alleviate Cancellation Problem of
Temperature Preconditioned Navier-Stokes Equations

Sang-Hyeon Lee*†

ABSTRACT

An approach to reduce cancellation errors of the temperature preconditioned Navier-Stokes equations is proposed. This approach is also applied to the conventional preconditioning methods. Adiabatic laminar viscous flows around a circular cylinder are calculated at different Mach numbers. It is shown that a redefinition of total enthalpy for reducing magnitude of the enthalpy remarkably alleviates cancellation problems of the temperature preconditioning.

초 록

온도예조건화 나비에스톡스 방정식의 계산오차를 줄이기 위한 방법을 제시하였다. 이 방법은 또한 기존 예조건화 방법론에도 적용하였다. 제시된 방법의 타당성을 검토하기 위하여 다양한 마하수의 원형 실린더 주위의 단열 층류 점성 유동을 계산하였다. 엔탈피의 재정의를 통해 총엔탈피의 크기 정도를 줄임으로써 계산오차에 의한 온도예조건화의 수렴성 문제가 해결됨을 보였다.

Key Words: Cancellation Error(계산오차), Temperature Preconditioned Navier-Stokes Equations(온도예조건화 나비에스톡스 방정식), Total Enthalpy(총엔탈피), Temperature preconditioning(온도예조건화)

1. 서 론

예조건화 방법론은 압축성 저속 유동장을 해석하기 위한 방법으로, 적절한 예조건행렬을 도

입하여 고유치의 크기를 조절함으로써 수렴성을 개선하는 수치 방법이다[1]. Choi and Merkle[2]은 안정적인 예조건화 방법을 제시하였으며, 이 방법은 다양한 문제에 적용되었다[3-6].

하지만, Lee[7]는 예조건화 오일러 방정식에 심각한 수렴문제가 존재하며 마하수가 감소할수록 수렴성이 더욱 악화된다는 사실을 보고하였

접수일 2009. 11. 26, 수정완료일 2010. 1. 24, 게재확정일 2010. 2. 3

* 정회원, 울산대학교 항공우주공학과

† 교신저자, E-mail: lsh@mail.ulsan.ac.kr

고, Lee[8]은 오차해석을 통해 에너지 방정식이 다른 방정식에 비해 계산 오차의 영향을 더 많이 받으며, 마하수 감소에 따라 수렴성이 점점 더 악화되는 현상을 이론적으로 해석한 바 있다.

이상현[9-10]은 Choi and Merkle 형태의 예조건화의 수렴성을 개선하기 위해 온도예조건화 방법론을 제안하였다. 하지만 온도예조건화를 적용하는 경우, 에너지 방정식의 계산오차가 연속 방정식으로 전파되는 문제가 있으며, 그 결과 압력장과 속도장을 구할 수 있는 마하수 한계가 존재함을 보고한 바 있다. Choi and Merkle 예조건화에서는 극저속에서 온도장은 구할 수 없지만 압력장과 속도장을 구하는 데 문제가 없는 점을 고려하면, 이러한 계산오차문제는 온도예조건화의 가장 큰 약점으로 판단된다.

본 연구에서는 이러한 계산오차문제를 해결하기 위한 방법을 모색하였다. Lee[8]는 에너지 방정식의 계산오차가 증폭되는 현상은 예조건행렬 내의 총엔탈피(h_o)와 예조건 매개변수 β 사이의 크기 비율(h_o/β)이 마하수 감소에 따라 증가하는 것이 그 원인임을 밝힌 바 있다. 이에 본 연구에서는 계산오차문제를 해결할 수 있는 방법으로, 총엔탈피와 예조건 매개변수의 크기 비율이 $O(1)$ 이 되도록 엔탈피를 재정의하는 방법을 제시하고자 한다. 그리고 이를 수치적으로 검증하기 위하여 2차원 실린더 주위의 단열 층류 점성 유동에 대해 계산을 수행하였다.

예조건화 방법을 간편하게 구별하기 위해 기호를 정의하여 사용하였다. 기호 CM은 Choi and Merkle 예조건화를 적용한 방법을 의미하는 것이고, 기호 TP는 온도예조건화를 적용한 방법을 의미한다.

2. 수치방법론

2.1 지배방정식

지배방정식은 예조건화 2차원 Navier-Stokes 방정식이다. 무차원화된 지배방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \quad (1a)$$

$$Q = [p, u, v, T]^T,$$

$$E = [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho h_o u]^T$$

$$F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho h_o v]^T$$

$$E_v = \frac{1}{\text{Re}_c} [0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u_j \tau_{xj} - q_x]^T$$

$$F_v = \frac{1}{\text{Re}_c} [0, \tau_{yx}, \tau_{yy}, u_j \tau_{yj} - q_y]^T \quad (1b)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

$$q_j = - \frac{\mu c_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1c)$$

$$\text{Re}_c = \frac{\rho_\infty c_\infty L}{\mu_\infty}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\kappa} \quad (1d)$$

지배방정식은 ρ_∞ (밀도), $\gamma_\infty p_\infty$ (압력), $\gamma_\infty T_\infty$ (온도), R_∞ (기체상수), c_∞ (음속), μ_∞ (점성계수), L (특성길이)로 무차원화하였다. 이때, 레이놀즈수를 Re_c 로 표현한 것은 속도에 대한 레이놀즈수 ($\text{Re} = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty$)와 혼동을 피하기 위해서이다.

본 연구에서는 Choi and Merkle 예조건화[2]와 온도예조건화[9-10]을 고려하였다. 예조건화행렬의 일반적인 형태는 다음과 같고, 예조건화행렬의 차이는 매개변수 φ 에 의해 결정된다.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 & \frac{\varphi}{\beta} \\ \frac{u}{\beta} & \rho & 0 & u \frac{\varphi}{\beta} \\ \frac{v}{\beta} & 0 & \rho & v \frac{\varphi}{\beta} \\ \frac{h_o}{\beta} - 1 & \rho u & \rho v & \rho c_p + h_o \frac{\varphi}{\beta} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$\varphi_{\text{CM}} = 0, \quad \varphi_{\text{TP}} = \frac{\beta}{\beta_T} \quad (2b)$$

고유치는 다음과 같다.

$$\lambda = u, \frac{u(1+f) \pm \sqrt{u^2(1-f)^2 + 4c^2f}}{2} \quad (3)$$

여기서 조절함수 f 는 가상음속(\tilde{c})과 음속(c)의 비를 나타내는 함수이다.

$$f \equiv \frac{\tilde{c}^2}{c^2} = \sigma \frac{\beta}{c^2} \quad (4a)$$

$$\sigma = \frac{\rho c_p}{\rho c_p + \varphi} \quad (4b)$$

가상마하수(\tilde{M})는 다음과 같이 정의된다.

$$\tilde{M}^2 = \frac{u^2}{\tilde{c}^2} = \frac{u^2/c^2}{\tilde{c}^2/c^2} = \frac{M_r^2}{f} \quad (5a)$$

$$M_r^2 = \max(M^2, 0.25M_\infty^2) \quad (5b)$$

여기서 마하수를 기준마하수(M_r)로 대체한 것은 Turkel[1]이 언급하였듯이 국부적으로 유속이 낮은 경계층이나 후류에서 계산오차의 급격하게 증가하는 현상을 제어하기 위한 것이다.

결과적으로 모든 예조건 매개변수는 가상마하수의 함수로 표현할 수 있다.

$$f = \frac{\tilde{c}^2}{c^2} = \frac{M_r^2}{\tilde{M}^2} \quad (6a)$$

$$\beta = \frac{c^2}{\sigma} \frac{M_r^2}{\tilde{M}^2}, \beta_T = \frac{T}{p} \beta = \frac{T}{p} \frac{c^2 M_r^2}{\sigma \tilde{M}^2} \quad (6b)$$

가상마하수는 임의로 정의할 수 있는데, 가상마하수가 지나치게 높거나 낮으면 수렴성에 문제가 발생할 수 있다. 본 연구에서는 가상마하수(\tilde{M})를 0.35로 정의하여 사용하였다.

Lee[8]는 지배방정식 (1)에 Γ^{-1} 을 곱하여 지배방정식을 변형하였을 때 수렴성이 개선됨을 보인 바 있다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같이 변형된 지배방정식을 적용하였다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \right) \quad (7a)$$

$$\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \beta - \zeta(\beta - h_0 + q^2) & \zeta u & \zeta v & -\zeta \\ \frac{u}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \psi(\beta - h_0 + q^2) & -\psi u & -\psi v & \psi \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$\psi = \frac{1}{\rho c_p + \varphi}, \zeta = \frac{\varphi}{\rho c_p + \varphi}, q^2 = u^2 + v^2 \quad (7c)$$

2.2 엔탈피 정의

순수 이상기체의 엔탈피는 상대적인 값만이 중요성을 가지므로 총엔탈피를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$h_o = h + \frac{u^2 + v^2}{2} = \int_{T_s}^T c_p dT + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (8)$$

이때, 기준온도 T_s 는 임의로 정할 수 있는 것이다. 보통 $0 K$ 또는 $298 K$ 를 기준치로 사용한다. $0 K$ 를 기준온도로 사용하는 경우 무차원화된 총엔탈피는 $O(1)$ 크기를 가진다. $298 K$ 는 일반적으로 화학분야에서 많이 사용되는 기준온도인데, 입구온도와 미소한 차이가 있는 경우의 결과와 비교하기 위해 고려하였다. $298 K$ 를 기준온도로 사용하는 경우 유입류의 온도가 $298 K$ 와 다르면 기준온도가 $0 K$ 인 경우와 마찬가지로 무차원화된 총엔탈피는 $O(1)$ 크기를 가진다. 총엔탈피의 크기가 $O(1)$ 인 경우, β 는 $O(M^2)$ 크기이므로 h_o/β 의 크기는 $O(M^{-2})$ 이 된다.

만약 기준온도 T_s 를 유입류의 온도로 설정하면, 단열 유동에서 무차원화된 온도 변화의 폭은 $O(M^2)$ 이므로 무차원화된 총엔탈피의 크기도 $O(M^2)$ 가 될 것이다. 그러면 마하수에 상관없이 h_o/β 의 크기는 $O(1)$ 으로 유지될 것이다. 따라서 계산오차가 증폭되는 문제의 해결 가능성이 있는 것으로 판단된다.

본 연구에서는 다음과 같이 무차원화된 기준온도에 대해 3가지 무차원화된 엔탈피 정의를

사용하여 그 결과를 비교하고자 한다. 기준온도는 0 K , 298 K , 유입류온도를 고려하였다. 유입류 온도(T_∞)는 300 K 이다.

$$\text{정의 HA} : h = \int_0^T c_p dT \quad (9a)$$

$$\text{정의 HB} : h = \int_{T_{298}}^T c_p dT \quad (9b)$$

$$\text{정의 HC} : h = \int_{T_{inf}}^T c_p dT \quad (9c)$$

T_{298} 와 T_∞ 는 무차원 온도로 $T_{298} = 298/\gamma_\infty T_\infty$ 이고, $T_{inf} = T_\infty/\gamma_\infty T_\infty = 1/\gamma_\infty$ 이다.

엔탈피 정의 HA와 HB에 따르면 총엔탈피 h_o 의 크기는 $O(1)$ 이 되고, 엔탈피 정의 HC에 따르면 총엔탈피 h_o 의 크기는 $O(M^2)$ 이 된다.

23 오차해석

수치 연산 과정에서 발생하는 오차를 표현하기 위한 연산자를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\langle a^* b \rangle = (a^* b)(1 + \epsilon) \quad (10)$$

이때, 연산자 “*”는 임의의 사칙연산을 나타내는 연산자이고, ϵ 은 반올림 오차로 $|\epsilon| \leq 5 \times 10^{-d}$ 의 크기를 가진다. 정수 d 는 연산장치가 제공하는 유효숫자의 크기에 의해 결정되는 정수를 의미한다. 간편한 해석을 위하여 외재적으로 표현된 차분 방정식만 다루기로 한다. 차분화된 지배 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta Q = \Gamma^{-1} RES \quad (11a)$$

$$RES = -\Delta t \left[\frac{\Delta E}{\Delta x} + \frac{\Delta F}{\Delta y} - \frac{\Delta E_v}{\Delta x} - \frac{\Delta F_v}{\Delta y} \right] \quad (11b)$$

먼저 Choi and Merkle 예조건화를 적용했을 때 계산오차를 살펴보자. 이때, 이상적인 혹은 계산오차가 없는 해를 Δp^* , Δu^* , ΔT^* 로 표현하

자. 그러면 계산 해와 이상적인 해의 차이는 다음과 같이 표현된다. 자세한 내용은 문헌[8]에서 찾을 수 있다.

$$\Delta p - \Delta p^* \sim \epsilon \quad (12a)$$

$$\Delta u - \Delta u^* \sim \epsilon \frac{\Delta p^*}{M} \quad (12b)$$

$$\Delta T - \Delta T^* \sim \epsilon \frac{\Delta p^*}{M^2} h_o \quad (12c)$$

따라서 엔탈피 정의 HA와 HB에 따르면, 총엔탈피 h_o 의 크기가 $O(1)$ 이 되어 온도장은 심각한 계산오차의 영향을 받는 것을 알 수 있다. 하지만, 엔탈피정의 HC에 따르면 총엔탈피의 크기는 $O(M^2)$ 이 되어 온도장의 계산오차는 마하수에 관계없이 일정하게 완화됨을 알 수 있다.

다음으로 온도예조건화를 사용했을 때 계산오차를 살펴보자. 같은 방법으로 오차 해석을 수행하면, 계산 해와 이상적인 해의 차이는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta p - \Delta p^* \sim \epsilon + \varphi_{TP} \epsilon \frac{\Delta p^*}{M^2} h_o \quad (13a)$$

$$\Delta u - \Delta u^* \sim \epsilon \frac{\Delta p^*}{M} \quad (13b)$$

$$\Delta T - \Delta T^* \sim \epsilon \frac{\Delta p^*}{M^2} h_o \quad (13c)$$

따라서 엔탈피 정의 HA와 HB에 따르면, 총엔탈피의 크기가 $O(1)$ 이 되어 온도장이 심각한 계산오차의 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 $\varphi_{TP} = \beta/\beta_T$ 의 크기가 $O(1)$ 이므로 압력장도 심각한 계산오차의 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 이러한 계산오차의 의한 압력장의 왜곡은 속도장의 왜곡을 초래하게 되어, 매우 낮은 마하수를 갖는 유동의 해를 구할 수 없게 된다. 하지만, 엔탈피 정의 HC에 따르면 총엔탈피의 크기는 $O(M^2)$ 이 되어 온도장 및 압력장의 계산오차는 마하수에 관계없이 일정하게 작은 값으로 유지됨을 알 수 있다.

24 수치기법

지배방정식은 유한체적법으로 차분화하였으며, 일반좌표계로 변환된 방정식을 사용하였다. 풍상 차분을 위한 플럭스 분할방법으로는 3차 정확도 예조건화 Roe's FDS 기법[9]을 사용하였다. 시간 적분을 위해서는 점성항 자코비언을 고려한 예 조건화 LU-SGS 기법[10]을 사용하였다. 계산오차를 줄이기 위해 모든 변수와 대류벡터를 상대 변수와 상대벡터로 취급하였으며[11-12].

본 연구에서는 정상 층류만을 고려하였으며, 레이놀즈수는 40인 경우를 고려하였다. 입구 및 출구 경계에 대해서는 특성 경계조건을, 벽면에 대해서는 단열조건을 사용하였다.

25 기하학적 형상 및 계산격자

Figure 1에는 본 연구에서 계산을 수행한 원형 실린더 주위의 계산격자가 도시되어 있다. 실린더의 직경은 레이놀즈수에 따라 결정된다. 원방 경계의 크기는 실린더 직경의 50배이다.

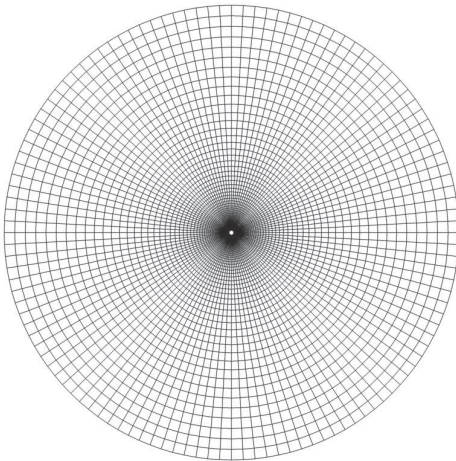


Fig. 1 Grid system: Circular Cylinder

3. 결과 및 분석

수렴성을 비교하기 위하여 참고문헌[7-10]에서 제안된 재규준화한 잔여항의 크기를 비교하였다.

$$RES(p) = \frac{\sum_{i,j} |\Delta p|}{N_G M_\infty^2}, \quad RES(u,v) = \frac{\sum_{i,j} \sum_{q=u,v} |\Delta q|}{N_G M_\infty^2},$$

$$RES(T) = \frac{\sum_{i,j} |\Delta T|}{N_G M_\infty^2} \quad (14)$$

Figure 2는 방법 CM을 적용한 경우, 엔탈피의 정의에 따른 수렴특성의 변화를 도시한 것이다. 가로 점선은 충분한 수렴에 대한 판단 보조선이다. 압력장 및 속도장의 수렴성은 엔탈피의 정의나 마하수 변화에 상관없이 거의 동일한 수렴성을 보이고 있다. 이는 방법 CM에서는 연속방정식이 에너지방정식과 분리되어 있기 때문에 연속방정식의 수렴성이 에너지방정식의 수렴성에 영향을 받지 않기 때문으로 판단된다.

온도장의 경우, 압력장의 경우와 달리, 엔탈피의 정의에 따라 상당히 다른 수렴성을 보인다. 마하수가 동일할 때, 엔탈피 정의의 HA보다는 엔탈피 정의의 HB의 수렴성이 약간 개선되는 것을 알 수 있다. 그리고 엔탈피 정의의 HA와 HB를 사용하는 경우 마하수가 감소함에 따라 수렴성이 악화되는 것을 알 수 있다. 하지만 엔탈피 정의의 HC를 적용하는 경우, 마하수에 상관없이 일정한 수렴성이 나타나는 것을 알 수 있다.

Figure 3은 방법 TP을 사용할 때, 엔탈피의 정의에 따른 수렴성을 비교하여 도시한 것이다. 엔탈피 정의의 HA와 HB를 사용하는 경우, 마하수가 10^{-14} 일 때 계산이 발산하여 해를 구할 수 없었다. 비교를 위하여 엔탈피 정의의 HA와 HB를 사용할 때 마하수가 10^{-8} 인 경우에도 충분히 수렴하지 못하는 것을 도시하였다. 방법 CM를 사용할 때와 달리 압력장 및 속도장의 수렴성도 온도장의 수렴성과 마찬가지로 엔탈피의 정의에 따라 상당히 다른 수렴성을 보인다.

$M=10^{-7}$ 인 저속유동에 대해 엔탈피 정의의 HA와 HB를 적용하였을 때, 마하수의 감소에 따라 모든 방정식의 수렴성이 동일한 방식으로 변화되는 것을 알 수 있다. 이는 방법 TP에서는 연속 방정식이 에너지 방정식과 결합되어 있어 연

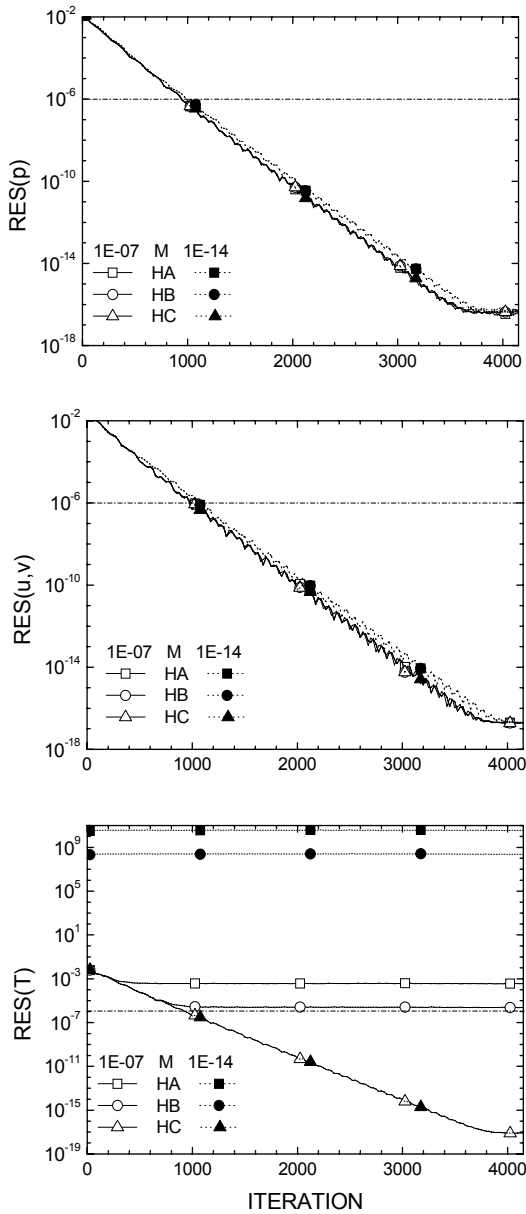


Fig. 2 Convergence histories of pressure, velocity and temperature at very low Mach numbers (CM)

속 방정식과 운동량 방정식의 수렴특성이 에너지 방정식의 수렴특성에 영향을 받기 때문으로 판단된다. 하지만 엔탈피 정의 HC를 적용하는 경우, 모든 방정식이 마하수에 상관없이 동일한 방식으로 충분히 수렴하는 것을 알 수 있다. 이

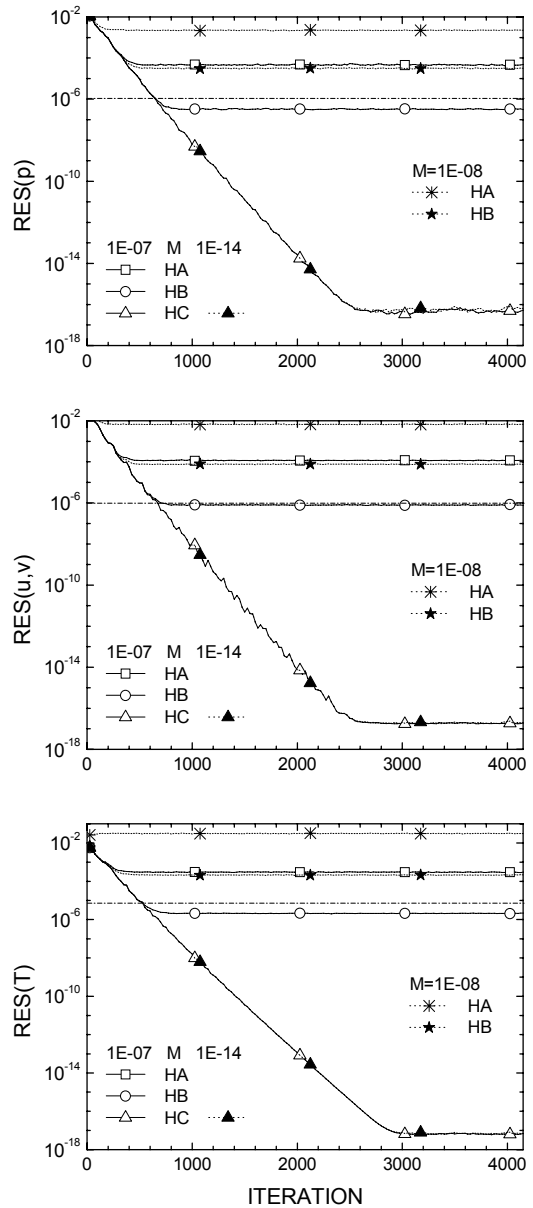


Fig. 3 histories of pressure, velocity and temperature at very low Mach numbers (TP)

는 에너지 방정식 계산오차 문제의 발생 원인을 해결함으로써 온도예조건화에서 예조건행렬을 통한 계산오차의 전파 문제가 해결되는 것을 입증한 것이다.

이러한 수렴성에 대한 분석 결과를 구체적으

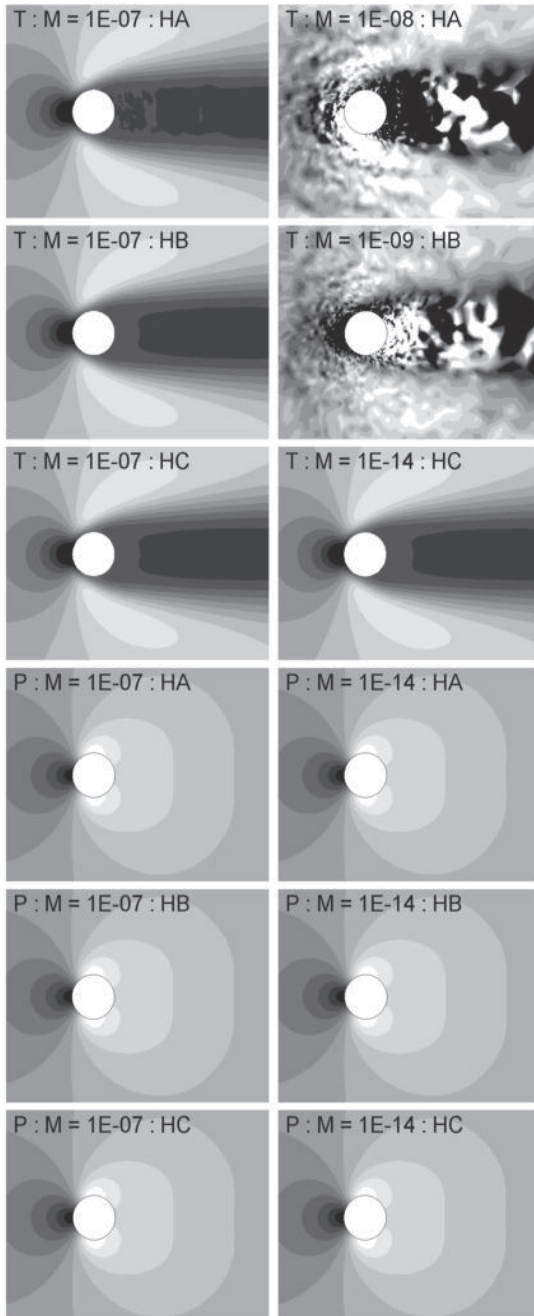


Fig. 4 Temperature and pressure fields around circular cylinder at very low Mach numbers (CM)

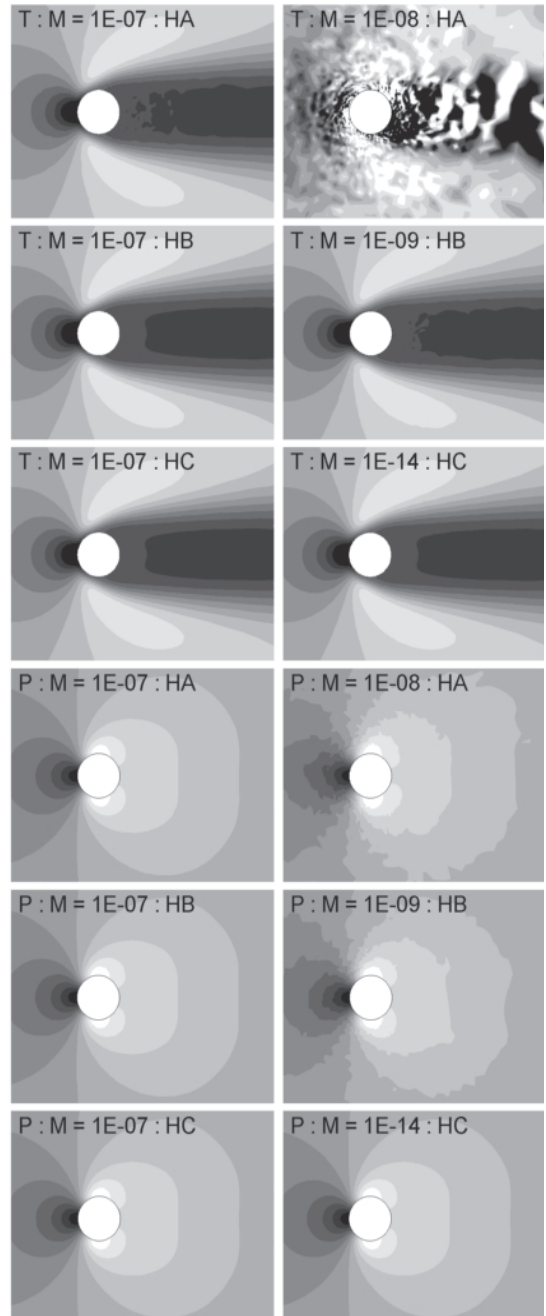


Fig. 5 Temperature and pressure fields around circular cylinder at very low Mach numbers (TP)

로 확인하기 위하여 압력장과 온도장을 Fig. 4와 5에 도시하였다. Fig. 4는 방법 CM을 적용한 결

과이고, Fig. 5는 방법 TP를 적용한 결과이다.

Figure 4와 5의 온도장 변화를 살펴보면, 방법

CM과 방법 TP에 대해 비슷한 양상을 보인다. 엔탈피 정의 HA를 적용하한 경우, $M=10^{-7}$ 일 때 후류 쪽에 온도장의 왜곡이 발생하는 것을 볼 수 있다. $M=10^{-7}$ 일 때 엔탈피 정의 HB를 적용하면, 수렴된 온도장을 구할 수 있지만, 마하수가 더 낮아지면 $M=10^{-8}$ 에서부터 심각한 왜곡이 발생하는 것을 볼 수 있다. 하지만 엔탈피 정의 HC를 적용하면 방법 CM이나 TP에 상관없이 수렴된 온도장을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

압력장을 살펴보면, 방법 CM을 적용한 경우에는 마하수에 상관없이 수렴된 압력장을 구할 수 있음을 알 수 있다. 이는 앞서 언급하였듯이, 연속 방정식이 에너지 방정식과 분리되기 때문인 것으로 보인다.

방법 TP를 적용한 경우 엔탈피 정의 HA에 대해 $M=10^{-8}$ 부터, 엔탈피 정의 HB에 대해 $M=10^{-9}$ 부터 심한 압력장의 왜곡이 나타나기 시작함을 알 수 있다. 이는 앞서 언급하였듯이 온도예조건화에서는 연속 방정식이 에너지 방정식과 밀접하게 연관되기 때문으로 판단된다. 하지만 엔탈피 정의 HC를 적용하면, 방법 TP를 적용한 경우에도 수렴된 압력장과 속도장을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

이러한 결과는 앞서 살펴본 수렴특성에 대한 분석과도 일치하는 것으로, 엔탈피의 재정의를 통해 엔탈피 크기를 조절하는 방법으로 계산오차문제가 해결됨을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 낮은 마하수에서 나타나는 온도예조건화 Navier-Stokes 방정식의 수렴성 문제를 해결하기 위한 방안을 제시하였으며, 단일 층류 점성유동에 적용하여 방법의 타당성을 확인하였다.

온도예조건화를 적용하는 경우, 온도장뿐만 아니라 압력장과 속도장에서도 심각한 계산오차문제가 발생한다. 이러한 계산오차문제를 해결하기

위해, 입구유동의 온도를 기준으로 엔탈피를 재정의함으로써 총엔탈피(h_o)와 예조건 매개변수 β 의 비(h_o/β)의 크기가 마하수에 상관없이 $O(1)$ 이 되도록 조절하는 방법을 제시하였다. 이 방법을 적용하면, 저속 유동장에 나타나는 온도장의 계산오차문제뿐만 아니라, 온도예조건화를 적용할 때 나타나는 압력장 및 속도장의 계산오차문제가 해결됨을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. Turkel, E., "Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics," Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 31, 1999, pp.385-416
2. Choi, Y. H., and Merkle, C. L., "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," Journal of Computational Physics. Vol. 105, 1993, pp.207-223
3. Shuen, J. S., Chen, K. H., and Choi, Y., "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-Equilibrium Flows at All Speeds," Journal of Computational Physics, Vol. 106, 1993, pp.306-318
4. Weiss, J. M., Smith, W. A., "Preconditioning applied to variable and constant density flows," AIAA Journal, Vol. 33, No.11, 1995, pp.2050-2057
5. Chen, K. H., and Shuen, J. S., "Three Dimensional Coupled Implicit Methods for Spray Combustion Flows at All Speeds," AIAA paper 94-3047, 1994
6. 이상현, "예조건화 방법론의 Navier-Stokes 방정식에의 적용," 한국추진공학회지, 제8권, 제1호, 2004, pp.16-26
7. Lee, S-H., "Convergence Characteristics of Preconditioned Euler Equations," Journal of Computational Physics. Vol. 208, 2005, pp. 266-288

8. Lee, S-H., "Cancellation Problem of Preconditioning Methods at low Mach Numbers," Journal of Computational Physics, No. 225, 2007, pp.1199-1210
9. 이상현, "저속 유동 계산의 수렴성 개선을 위한 온도 예조건화, I: 오일러 방정식," 항공우주학회지, 제35권, 제12호, 2007, pp. 1067-1074
10. 이상현, "저속 유동 계산의 수렴성 개선을 위한 온도 예조건화, II: 나비에스톡스 방정식," 항공우주학회지, 제35권, 제12호, 2007, pp.1075-1081
11. Sesterhenn, J., Muller, B., and Thomann, H., "On the Cancellation Problem in Calculating Compressible Low Mach Number Flows," Journal of Computational Physics, Vol. 151, 1999, pp.597-615
12. 이상현, "저속 압축성 유동장 해석을 위한 예조건화 방법론 연구 II - 온도장 계산 성능 개선," 한국항공우주학회지, 제29권, 제8호, 2001, pp.26-36