韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 05. 제 49권, 제 2호, 223-246.
J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2010, Vol. 49, No. 2, 223-246

안내된 재발명을 포함한 탐구-중심 수업이 학생들의 수학적 활동에 미치는 영향에 관한 사례연구

김 익 표 (대구대학교)

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성

Goos(2004)는 학교수학에서 지도 방법의 중대한 변화를 요구하는 수학교육학자들의 주장과 함께 문제해결, 추론, 의사소통의 중요성을 역설한 NCTM(1989, 2000)의 교육과정 규준관련 문헌들을 소개했다. 또 그는 오스트레일리아에서도 의사소통과 문제해결 능력의 신장 및 수학적인 사실들이 발견 또는 창조되는 과정을 학생들이 경험할 수 있도록 하는 것이 수학교육 개혁주의자들의 목표임을 강조했다. 그리고 한국의 제7차 수학과 교육과정과 2007년 개정 수학과 교육과정에서도 문제해결과 추론뿐만 아니라 의사소통 능력의 신장을 강조하고 있다(교육인적자원부, 1997, 2007). 특히, 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 추론 능력을 촉진시키기 위하여 교수・학습에서 유의해야할 다음 사항들을 제시했다(교육인적자원부, 2007):

첫째, 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다. 둘째, 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

Polya(1954)도 연역적 추론과 함께 귀납과 유추에 바탕을 둔 개연적 추론이 수학적 지식의 발견에 중요한 역할을 한다고 주장하면서 학생들에게 개연적 추론을 할 수 있는 기회를 제공해야 한다고 강조했다.

Freudenthal(1991)은 이미 만들어져 있는 교과로서의 수학이 아니라 수학자가 수학적 사실들을 창조하기 위하여 논문을 읽는 것처럼 학생들에게도 안내된 재발명의 기회가 주어져야함을 주장했다. Elbers(2003)는 학생들이 지식을 구성하는데 직접 참여할 수 있도록 도울 수 있는 교사의 역할을 강조했다. 정의, 규칙, 알고리즘의 제시와 함께 학생들이 정해진 길을 따라 가도록 지도하는 전통적인 수업보다는 새로운 수학적 사실을 학생 스스로 발견 또는 창조하는 활동을 위한 수업을 통하여 수학교육이 추구하는 목표의 달성이 가능할 것이다(Freudenthal, 1991). 교사 위주의 수업보다는 학생 스스로 수학적 아이디어와 추측을 제시하고 방어하면서 다른 학생들의 수학적인 주장에 사려 깊게 반응하는 탐구-중심 수업(Goos, 2004)의 활성화는 수학교육과 관련 있는 대부분의 사람들이 그 필요성에 공감을 하고 있지만 학교 현장에서는 여러 가지 이유로 실행하기가 쉽지 않은 것이 현실이다.

2. 연구의 목적 및 연구문제

최근에 과학고등학교 학생들을 대상으로 소집단별로 문제를 설정하고 해결하면서 학생 스스로 탐구 활동을 할 수 있도록 안내하는 조력자로서의 교사의 역할을 탐색하기 위한 탐구-중심 수업 모델이 제시되었다(김익표, 2008). 본 연구의 목적은 탐구-중심 수업 모델을 바탕으로 Freudenthal(1991)의 안내된 재발명의 과정을 통하여 학생 스스로 수학적 사실들을 발견 또는 창조하는 수업을 구현하기 위한 탐구-중심 수업이 의사소통과 추론을

* 접수일(2010년 3월 6일), 수정일(1차 : 2010년 4월 19일, 2차 : 4월 26일), 게재확정일(2010년 5월 7일)
* ZDM 분류 : C54
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 개연적 추론, 안내된 재발명, 근접발달 영역, 탐구-중심 수업, 탐구-중심 수업 모델
* 이 논문은 2007학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음(과제번호 20070084).

포함한 학생들의 수학적 활동에 미치는 영향을 사례연구를 통하여 탐색하는 것이다. 먼저 Polya의 개연적 추론(1954), Freudenthal의 안내된 재발명(1991), Forman의 수업에 대한 사회문화적인 접근(2003), Vygotsky의 근접발달영역(1978) 이론이 통합된 탐구-중심 수업의 사례를 제시한다. 이를 바탕으로 연구자가 설정한 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

(1) 탐구-중심 수업과정에서 도출되는 수학적 발견 또는 발명이 의사소통과 추론을 포함한 학생들의 수학적 활동에 미치는 영향을 분석한다(연구 결과 3).

이와 같은 분석을 위하여 먼저 선행되어야 할 것이 학생들의 수학적 활동에 대한 인식 변화이다. 이를 위하여 문제 설정 또는 문제 변형 중심의 탐구-중심 수업을 통하여 학생들의 탐구 활동을 자극함으로써 학생들의 수학적 활동에 대한 인식 변화가 가능함을 확인한다(연구 결과 1). 그 다음 서로 다른 수학적 개념들 사이의 연결성이 탐구 활동에 미치는 영향을 분석한다(연구 결과 2, 3). 이 연결성은 개념들의 명확한 이해뿐만 아니라 새로운 해석 또한 가능하며 탐구 소재로 발전 가능함을 확인한다.

(2) 탐구-중심 수업의 결과를 통하여 새롭게 구성한 행렬(파스칼 행렬의 격자점 이동과 관련된 확장)의 LDU-decomposition에 대하여 고등학교 학생들도 접근 가능한 새로운 증명 방법을 제시한다(연구 결과 4).

(3) (2)의 결과로써 학생 스스로 의사소통과 수학적 추론을 포함한 수학적 활동을 통하여 발전적인 방향으로의 수학적 발견 또는 발명이 가능하기 위한 조건들을 탐색한다(연구 결과 4).

본 논문에서는 추론과 의사소통을 포함한 수학적 활동을 강조하지 않아도 자연스럽게 이와 같은 활동의 장으로 학생들을 유도하는 원동력이 기존의 수학적 사실과 연계성을 가진 새로운 수학적 사실에 대하여 안내된 재발명의 방법으로 학생 스스로 발견 또는 창조하는 것임을 확인한다. 이와 같은 연구 결과는 고등학교 수학 수업에서 입시 위주의 편향된 교수·학습이 가져오는 여러 가지 부작용을 개선하는데 그치지 않고, 수학적 힘의 구현이라는 수학교육의 목표(NCTM, 1989)를 달성할 수 있는 방법론의 제시가 될 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

현재까지 수학교육에서 탐구-중심 수업의 정의 및 운영에 관한 다양한 연구들이 소개되고 있다(Rowe, 1973; Lesh, 1981; Schoenfeld, 1985; Van den Brink, 1987; Streefland, 1987; Silver & Adams, 1990; Healy, 1993; Silver, 1994; National Research council, 1996; Wubbels et al., 1997). 본 논문에서는 학생들이 수업 중에 다루는 내용 또는 문제에서 조건이나 상황 등을 변형하거나 재정의 과정을 통하여 새로운 문제를 설정하고, 이미 알려진 사실들을 확인하기 위하여 책과 다른 출처의 정보를 검토, 연구의 계획, 실험의 증거로 알려진 것들의 재확인, 자료의 수집과 분석 및 해석을 위하여 도구를 사용, 해답과 설명 및 예상을 제안, 결과에 관한 의사소통 등을 포함하는 다양한 면을 가진 수업으로 수업에 관계되는 모든 활동의 주체가 교사와 학생이면서 특히, 교사의 조력자 또는 안내자로서의 역할과 학생활동을 강조하는 수업을 탐구-중심 수업의 정의로 채택한다(김익표, 2008). 이 장에서는 탐구-중심 수업의 이론적인 뼈대의 역할을 하는 Polya의 개연적 추론, Freudenthal의 안내된 재발명, Forman의 수업에 대한 사회문화적인 접근, Vygotsky의 근접발달영역 이론을 살펴보고자 한다.

1. Polya의 개연적 추론

Polya(1954)는 발견적 추론의 본성과 관계되며, 더 나아가 중요하지만 논증적인 것이 못되는 일종의 추론을 개연적 추론으로 정의했다. Polya(1957)는 수학적 추측의 생성과 증명에 중요한 역할을 하는 개연적 추론은 논증적 추론이 아닌 나머지 부류의 추론으로, 엄밀한 논증이 갖고 있는 확실성이 결여되어 있고, 본질적으로 새로운 지식을 획득하는데 유용하며 지식의 발견에 있어서 필수적인 것이라고 주장했다(이종희·김선희, 2002 재인용).

귀납적 추론과 유추를 통하여 개연적 추론이 주로 이루어진다고 본 Polya(1954)는 귀납적 추론과 유추에 대하여 다음과 같이 서술했다:

귀납적 추론은 특수한 경우에 대한 관찰과 결합에 의하여 일반적인 규칙을 발견하는 과정이다. 즉, 관찰을 바탕으로 규칙성과 일관성을 발견하려고 시도하는 과정이 귀납적 추론이다. 그것의 가장 확실한 도구는 일반화, 특수화, 유추이다. 임시적인 일반화는 관찰된 사실들을 이해하려는 노력으로부터 시작해서, 유추에 바탕을 두고, 그 이상의 특수한 경우에 대하여 테스트 된다. 많은 수학적인 정리들이 먼저 귀납적 추론에 의하여 발견되고 나중에 증명되었다. 엄밀하게 제시된 수학은 체계적인 연역적 과학이지만, 수학적인 발명은 실험적인 귀납적 과학이다. 유추란 닮음의 일종이다. 닮은 대상이란 어떤 점에서 서로 일치하는 것이고, 유사한 대상이란 서로 대응하는 부분에 대한 어떤 관계가 일치하는 것이다.

Polya가 강조하는 개연적 추론은 한국의 2007년 개정 수학과 교육과정에서 강조하는 사고과정으로 학생 스스로 수학적인 사실을 추측할 수 있는 능력이다. 또 이것은 NCTM의 교육과정 규준에서 강조하는 수학적 추론과 밀접한 관련성이 있다. 본 연구에서 정의한 탐구-중심 수업 또한 학생 스스로 발견 또는 발명하고, 분석하고, 해석하는 것을 이 수업의 가장 핵심적인 활동으로 규정했기 때문에 개연적 추론은 탐구-중심 수업의 이론적 근거로서의 역할 뿐만 아니라 학생들이 이 수업을 성공적으로 수행할 수 있도록 안내하는 역할을 할 것이다.

2. 학습에 있어서 Forman의 사회문화적인 접근

Forman(2003)은 학습에 있어서 사회문화적인 관점이 의사소통, 문제해결, 추론 능력의 신장을 추구하는 수학교육 개혁운동의 이론적인 근거와 수업과 학습 결과 사이에 근본적인 관련성을 이해하고, 사회적인 문맥에서 수학 학습이 의사소통을 어떻게 필요로 하는지를 보여주는데 있어서 진일보한 방법을 제공한다고 강조했다(Goos, 2004, 재인용). 이와 같은 관점에서, 수학의 교수학습은 교실 집단-여기에서 학생들은 더 넓은 수학 집단의 인식론적 가치와 의사소통 규정을 점점 더 인정하게 되는데-형태를 필요로 하는 사회적이고 의사소통적인 활동으로 간주되어진다(Lave & Wenger, 1991). Forman에 의하면 사회문화적인 이론들의 기원에 대하여 일반적으로 알려진 사실은 20세기 초 러시아 심리학자인 Vygotsky의 연구로부터 시작되었다는 것이다(Goos, 2004 재인용).

Vygotsky는 다음에 제시하는 세 가지 주제와 관련하여 내면화와 근접발달영역과의 연관된 개념들을 분석했다(Goos, 2004).

첫째, 정신적인 현상을 이해하기 위해서는 발달의 산물보다는 성장과 변화의 과정에 집중하는 것이 필요하고, 둘째, 고등정신 기능인 자발적인 관심, 기억, 개념, 추론은 사회적인 차원에서 사람들 사이에서 먼저 나타난 다음 심리적인 차원에서 개인에게서 나타난다, 셋째, 사고 과정은 언어, 쓰기, 수 체계, 대수적인 기호 체계, 도표 등과 같은 도구와 기호에 의하여 조정되고 중재된다.

Goos(2004)는 Vygotsky의 근접발달영역을 다음과 같이 소개하고 있다:

Vygotsky는 외부에서 먼저 수행되는 사회적인 현상이 심리적인 현상으로 변환되고, 그 다음 정신적으로 실행되는 과정을 내면화로 간주했다. 어른 또는 보다 더 능력 있는 동료들과의 상호작용이 아직 성숙되지 않았고, 그래서 실재적인 발달 수준과 잠재적인 발달 수준 사이에 놓여 있는 정신 기능들을 깨울 수 있기 때문에 그와 같은 내면화가 일어날 수 있는 곳이 바로 근접발달영역이다.

Vygotsky 이론의 적용을 위해 비계(scaffolding)라는 용어를 사용한 초기 수학교육학자들의 한계가 사회문화적인 이론의 새로운 개념을 제공하는 계기가 되었다.

Forman & McPhail(1993)은 사회적인 상호작용, 교수학습의 상호작용에서 대인관계의 중요성, 그리고 사고방식과 같은 사회문화적인 이론들이 사회적인 행동과 밀접하게 연결되어 있다는 것에 주목할 필요가 있다고 강조했다(Goos, 2004). Lave & Wenger에 의하면 현대적인 사회문화적 이론은 전문가와 초보자들로 이루어진 실행집단에서 점점 확대되는 참여를 포함하는 것이 학습이라고 주장했다(Goos, 2004). Van Oers(2001)는 학습자들은 교사의 행동과 기대에 의하여 구조화된 실행집단에서의 참여를 통하여 수학적인 태도를 인정하고, Lerman(2001)은 수학적인 말하기와 사고에서의 점진적인 참여가 학생

들을 근접발달영역으로 안내하는 역할을 한다고 말했다.

지금까지 소개한 사회문화적인 이론과 함께 이 이론의 뼈대를 이루는 Vygotsky의 근접발달영역 이론은 수학적인 탐구-집단(Goos, 2004)에서 의사소통을 통한 상호작용의 중요성을 강조한다. 본 연구에서도 교사 또는 동료들과의 상호작용이 탐구-중심 수업의 활성화에 기여하는 근본적인 역할을 할 것이다.

3. Freudenthal의 안내된 재발명

Freudenthal(1991)은 안내된 재발명의 방법으로 교수와 학습이 이루어져야 하는 이유를 다음과 같이 설명했다:

> 어떤 방향으로든 모든 사람이 도달할 수 있는 어떤 수준이 반드시 존재한다. 이와 같은 수준들의 범위가 수학교육에서 여러 해 동안 내가 그것의 자연스러운 확장과 가능한 한 그것을 확장할 기회와 가능성에 훨씬 더 많이 관심을 가져온 것들 중에 하나임을 고백한다. 사람들에게 그들이 배워야 할 수학을 선험적으로 규정하는 것과는 다른 관점이 있다. 학습자들은 그들 자신의 수준을 찾고 각각의 특별한 경우가 필요로 하는 만큼 안내에 따라 거기에 이르는 경로를 탐구하도록 허락되어져야 한다. 이와 같은 정책을 옹호하는 건전한 교육학적인 논의가 존재한다. 첫째, 지식과 능력은 다른 사람에 의하여 부과 되어졌을 때 보다 자신의 활동에 의하여 획득되어졌을 때, 더 잘 유지되고 유용하다. 둘째, 발견은 즐거운 것이 될 수 있어서 재발명에 의한 학습은 학습자에게 동기를 줄 수 있다. 셋째, 그것은 인간 활동으로서의 수학을 경험하는 태도를 촉진한다. 한편 수학자들이 수학적인 내용을 발명하기 위해 논문을 읽는 것처럼 어린 학습자들도 동일한 특권을 요구할 수 있다고 나는 믿는다.

Freudenthal(1991)의 안내된 재발명은 학습자가 인류의 학습 과정을 그대로 따라하는 것이 아니라 옛날 사람들이 우리가 지금 알고 있는 것에 대하여 조금 더 알았더라면 일어났을 그와 같은 과정을 반복하는 것이고, 그것의 목표는 수학화와 수학화의 다양한 측면이다.

탐구-중심 수업에서 학생들이 수학적인 사실을 스스로 발견 또는 창조할 수 있도록 돕는 과정을 안내된 재발명으로 시작하고자 한다. 안내된 재발명을 통하여 동기가 유발된 학생들이 수학적인 사실들을 발견 또는 발명할 수 있도록 안내하는 것이 탐구-중심 수업의 핵심이고, 이 수업에서 수학적인 의사소통과 추론은 자연스럽게 이루어지는 수학적 활동이 될 것이다.

4. 선행연구의 고찰

Silver(1993)는 탐구-중심 수업의 특징으로서 문제설정에 대하여 언급하면서 수학 수업에서 지식과 문제의 주요한 출처인 교과서로부터 학생과 교사를 자유롭게 만드는 수업을 탐구-중심 수업이라고 주장하면서 학생들이 교과서를 만들어 수업에 활용하는 몇 가지 사례를 제시했다(김익표 재인용, 2008):

Van den Brink(1987)는 네덜란드의 초등학교 1학년 학생들이 다음 해에 입학할 학생들을 위한 덧셈 문제를 만들도록 하는 수업의 사례에 대하여 제시했다.

Streefland(1987, 1991)는 네덜란드에서 현실적인 수학교육(realistic mathematics education) 수업의 일부분으로서 학생들이 작가적인 경험을 할 수 있도록 하는 수업방법을 채택했다. Healy(1993)는 미국의 중학교 학생들을 대상으로 하는 기하수업에서 학생들이 탐구를 통하여 스스로 발견한 중요한 사실들로 교과서를 구성하는 "Build a book"의 방법을 사용했다. Skinner(1991)는 오스트레일리아의 초등학교 수학 수업에서 학생들이 스스로 설정한 문제를 공유하고 이를 문제해결 활동의 소재로 사용하는 수업의 형태를 소개했다.

Silver(1993)는 문제설정과 관련된 수학교육학자들의 탐구-중심 수업의 형태에 대한 예들을 제시하면서 이들이 수업과 학생들의 활동을 제시했지만 문제설정과 탐구의 본질적인 연관성과, 이와 같은 수업의 경험이 학생들의 수학적 수행에 어떠한 영향을 미치는지에 대한 체계적인 분석이 없었다는 것을 지적했다(김익표 재인용, 2008).

Elbers(2003)는 네덜란드의 초등학생(11~13세)들을 대상으로 현실적인 수학교육의 맥락에서 수직적 수학화(vertical mathematization)의 과정을 경험할 수 있는 탐구 문제를 통하여 주어진 문제를 변형하고 끊임없이 새

로운 해결 방법을 제시하도록 하는 과정에 참여하는 교사의 역할에 대하여 소개했다. 이 과정에서 모든 학생들이 수학적인 의미를 구성하는데 있어서 참여할 수 있는 탐구 집단의 구성에 중요한 것이 협력하는 분위기와 학생들 사이의 상호작용임을 강조했다(김익표 재인용, 2008).

Goos(2004)는 교사가 현상을 제시하고 학생들이 이 현상을 수학적으로 조직하는 수평적 수학화(horizontal mathematization)를 통하여 조화 운동(harmonic motion)을 도입하는 오스트레일리아의 중등학교 12학년 수학 교실을 사례로 들면서, 수학적인 탐구 문화가 형성된 교실의 특징을 다음과 같이 묘사했다:

교실에서 학생들 스스로 토론을 통하여 추측을 제시하고 그 추측을 설명하는 활동들이 뚜렷하게 나타나고, 그들 자신과 다른 학생들 또는 교사에 의하여 만들어진 오류를 지적하고 수정하는 활동이 강조되고, 학생들 사이의 수학적인 토론에 의하여 수학적인 사고가 생산되고 검사되는 것이 수학적인 탐구 문화가 형성된 수학교실의 특징이다.

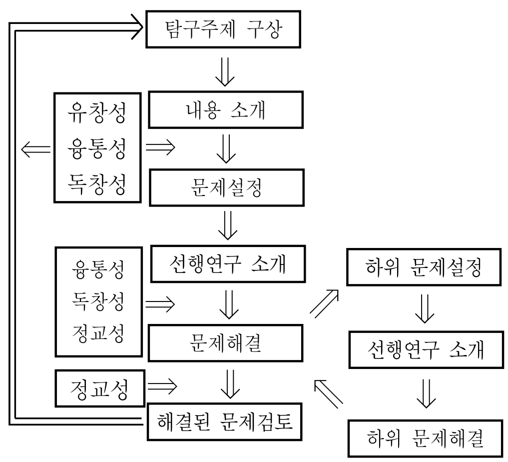
Goos(2004)는 위에서 소개한 교실 수업의 녹화와 교사와의 인터뷰 분석을 바탕으로 수학을 공부하는데 있어서 학생들의 주도적인 참여, 탐구 과정에 대한 교사의 설계, 서로의 생각을 의사소통하고 설명하는 것에 대한 중요성이 탐구 문화가 형성된 교실에서 나타난 특징임을 강조하면서 이와 같은 탐구 문화가 형성되도록 지도되는 같은 학교 11학년 교실을 소개했다:

교사는 학생들에게 행렬식이 1인 2×2 행렬의 역행렬을 연립방정식을 이용하여 구하는 문제를 제시하고, 그것을 바탕으로 임의의 행렬에 대한 역행렬을 학생들 스스로 추측하게 했다(탐구 문화 조성).

그 다음 그 추측을 검사하고 개선할 수 있는 문제로서 행렬식이 1이 아닌 행렬의 역행렬을 구하는 문제를 제시했다(비계설정으로서 근접발달영역). 원래의 추측을 개선하는 과정에서 수학적인 아이디어를 만들고 검사하는 수단으로서 다른 학생들과의 상호작용에 가치를 둘 수 있도록 상대방에게 설명하는 활동을 조성했다(동료들과의 협력으로서 근접발달영역).

Goos(2004)가 소개한 탐구 문화가 성숙된 교실에서의 수업은 교사가 지도할 내용을 선정하고, 지도 방법을 설계한 다음, 그 설계를 바탕으로 학생들 또는 교사와 학생들 사이의 상호작용을 통하여 추론, 의사소통, 문제해결력의 신장을 촉진시키는 형태이다. 본 연구는 학생들에게 소개할 수학적인 주제를 정하고, 그 주제와 관련된 알려진 사실들을 소개하는 방법은 Goos(2004)가 소개한 교실 수업과 유사하지만, 수업의 목표인 마지막 결론은 교사와 학생들 모두 알 수 없는, 즉 지금까지 알려지지 않은 내용[1]의 발명을 포함한다. 이와 같은 발명으로 이루어진 내용은 학생들의 동기 유발을 극대화시키는 역할을 함으로써 적극적인 의사소통과 추론 활동이 이루어지도록 하는 촉매제가 될 것이다.

김익표(2008)는 탐구-중심 수업의 활성화를 위한 항목들과 창의성의 요소가 발현되도록 조력자로서의 교사의 역할이 필요한 각 단계를 종합하여 설계한 탐구-중심 수업 모델을 소개했다(<그림 Ⅱ-1>).



<그림 Ⅱ-1> 탐구-중심 수업 모델

이 모델은 본 사례연구를 위한 탐구-중심 수업을 운영하는데 있어서 교사와 학생활동의 설계를 위한 근본적

1) 지금까지 알려지지 않은 내용이라는 것은 탐구-중심 수업에 참여하는 교사와 학생들 모두에게 알려지지 않은 새로운 내용으로 정의한다.

인 뼈대의 역할을 할 것이다.

Goos(2004)가 소개한 오스트레일리아의 중등학교 11학년과 12학년 교실에서의 수업은 수평적 수학화와 수직적 수학화를 이용한 Freudenthal의 안내된 재발명이 뼈대를 이루면서 각 과정에서 의사소통과 수학적 추론 활동이 주로 이루어지는 과정이다.

앞에서 소개한 대부분의 탐구-중심 수업의 형태(Van den Brink, 1987; Healy, 1993; Skinner, 1991; Elbers, 2003)는 주로 탐구-중심 수업 모델의 내용 소개에서 문제설정과 문제해결에 초점을 맞추어 이루어지는 활동에 해당된다. 본 연구는 기존의 탐구-중심 수업을 통합한 활동으로서 제시된 탐구-중심 수업 모델을 바탕으로 안내된 재발명을 도입하여 학생 스스로 교사와 학생 모두에게 새로운 수학적 사실들을 발견 또는 창조하는 활동을 경험할 수 있도록 조직하는데 주안점을 두고, 이와 같은 활동이 추론과 의사소통을 포함한 학생들의 수학적 활동에 미치는 영향을 분석한다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 2005년 3월부터 2006년 2월까지 연구자가 1년 동안 지도한 D과학고등학교 1학년 91명과 대부분의 학생들이 D과학고등학교 1학년 학생인 D광역시교육청중등영재교육원 고등학교 1학년 수학반 학생 10명을 대상으로 하였다. D과학고등학교는 창의적인 고급과학 두뇌를 양성하는 것을 목적으로 1988년에 개교한 학교이다. 2004년도에 개원한 D광역시교육청중등영재교육원은 D광역시소재 중, 고등학교 재학생 중 수학, 과학 분야에 재능이 뛰어난 학생들을 창의적인 문제해결력 검사를 통하여 선발한다. 두 기관 모두 교육에 있어서 핵심적인 키워드는 창의성이다. D과학고등학교에 재학하는 학생들은 60%이상이 2학년 말에 조기졸업을 해서 대학에 진학을 한다. 따라서 같은 학생들을 지속적으로 지도하면서 탐구-중심 수업에 대한 연구를 진행하는 것이 효과적이겠지만 학생들 입장에서는 2학년 초부터 본격적으로 대학입시를 준비해야 하므로 1학년 학생들을 대상으로 1년을 연구기간으로 설정하여 진행하였다. D과학고등학교 1학년은 4개 학급이고 학급당 인원은 22~23명이다. D광역시교육청중등영재교육원 고등학교 1학년 수학반은 10명이 정원이다. 김익표(2008)는 2005년 4월 초에 D과학고등학교 1학년 학생 91명을 대상으로 수학에 대한 정의적인 태도와 성향, 인지적 사고 기능에 대한 검사를 송상헌(1998)의 [수학적 행동특성 검사지(학생용)]을 이용하여 실시하였다. 이 검사 결과는 교사의 지속적이고 적극적인 노력과 효과적인 수업 방법의 도입이 탐구-중심 수업의 활성화라는 목표를 이루도록 하는 필수적인 요건이라는 것을 확인하는 계기가 되었다. 연구기간 동안 D과학고등학교 1학년 전체 학생들에 대해서는 탐구-중심 수학 수업에 관한 교사의 역할에 주안점을 두고 연구를 진행하였다. 주된 연구 결과는 '탐구-중심 수학 수업에서 교사의 역할에 관한 사례연구: 과학고등학교 학생들을 중심으로(김익표, 2008)'라는 논문에 소개되었다. 이와 함께 D광역시교육청중등영재교육원 고등학교 1학년 수학반 학생들에 대해서는 스스로 수학적인 사실들의 발견 또는 창조가 주된 활동인 탐구-중심 수업이 의사소통과 추론을 포함한 수학적 활동에 미치는 영향을 분석하는 것을 목적으로 연구를 진행하였다. 영재교육원 소속 학생들의 활동이 탐구-중심 수업과 밀접한 관련성이 있기 때문에 이 학생들의 활동을 집중적으로 분석하는 것이 탐구-중심 수업의 활성화의 방안을 찾을 수 있는 지름길이고, 동시에 이와 같은 수업의 활성화가 학생들의 수학적 의사소통과 추론 능력을 포함한 다양한 수학적 힘(NCTM, 1989, p.5)의 신장을 촉진시키는 근본적인 방법이라고 생각했다.

2. 연구 절차

D과학고등학교 1학년 학생들을 대상으로 조별 토론과 전체 토론을 병행하는 방법으로 정규 수업 시간에 탐구-중심 수업을 운영할 계획이었지만, 이 학생들 역시 대학입시에서 자유롭지 못하기 때문에 수행 과제 형태로 탐구-중심 수업을 진행했다. 탐구-중심 수업 모델(김익표, 2008)을 바탕으로 과제의 수행이 진행되도록 학생들을 유도했다. 2005년 5월부터 12월까지 탐구 주제로 정규 수업시간에 다루는 문제들 중에서 선택했다. 이것은 과학고등학교 학생들이지만 대학입시를 준비한다는 이유

로 문제 풀이 위주의 수업이 주로 이루어졌기 때문에 학생들의 수학적 활동에 대한 잘못된 인식을 개선하려는 의도도 있었다. 문제풀이로부터 탐구-중심 수업을 출발하는 것이 학생들의 참여와 동기를 유발시키는 가장 자연스러운 방법이라고 생각했다. 따라서 조별로 토론하면서 수업 중에 다루는 문제의 조건을 변형하거나 확장하여 새로운 문제를 설정하고 해결하는 활동에 주안점을 두고 학생활동을 조성했다. 각 반별로 4명~6명이 한 조가 되어 활동하도록 했고, 활발한 토론활동을 위하여 수학 성적 및 평소 수업에서의 활동 정도를 고려하여 각 조별 구성원을 선정하였다.

D광역시교육청중등영재교육원 고등학교 1학년 수학반 10명의 학생들을 대상으로는 1년 동안 3명~4명으로 구성된 조별로 새로운 수학적 산출물을 만들고 발표하는 과정을 교육과정에 추가하였다. 이 과정의 수행을 통하여 수학적인 사실의 발견 또는 발명을 포함하는 탐구-중심 수업이 의사소통과 수학적 추론을 포함한 수학적 활동에 미치는 영향을 분석하였다.

본 연구자는 이 영재교육원 소속 학생들에게 파스칼의 삼각형을 포함하여 조합적 행렬론과 관련된 여러 가지 주제를 토론 형식으로 소개하면서, 그 중에서 각 조별로 흥미 있는 주제를 선택하여 새로운 수학적 산출물을 만들도록 요구했다. 본 연구자는 파스칼의 삼각형에 관련된 내용을 탐구 주제로 선택한 조의 학생들을 주목했고, 이 학생들의 활동과 결과를 집중적으로 분석했다. 파스칼의 삼각형은 제7차 교육과정에서는 수학Ⅰ의 확률과 통계 단원에서, 2007년 개정교육과정에서는 적분과 통계의 순열과 조합 단원에서 제시된 내용으로 이항계수를 도입하는 과정에서 간단하게 소개하고 있다.

안내된 재발명의 방법으로 학생들이 격자점의 이동을 통하여 파스칼의 삼각형의 변형인 파스칼 행렬을 발명하도록 한 다음, 이 행렬과 관련된 지금까지 알려진 사실들을 소개했다. 지금까지 배웠던 내용들과의 다양한 연결고리를 가진 파스칼 행렬의 소개에 학생들은 의욕과 관심을 동시에 나타냈다. 그 다음 격자점에서의 이동 방법의 확장 또는 변형을 통하여 새로운 행렬을 학생들 스스로 구성해 보도록 했다. 이와 같은 새로운 행렬은 학생들 입장에서 파스칼 행렬과의 관련성에 대한 호기심을 자극했고, 이 호기심은 의사소통과 추론을 포함한 수학적 활동을 촉진시키면서 탐구 활동으로 이끄는 역할을 했다. 학생들 입장에서 기존에 알고 있는 지식을 이용하여 비교적 쉽게 수학적인 사실을 발명할 수 있도록 안내한다면, 이 사실은 탐구의 소재로 적합할 뿐만 아니라 탐구 과정에서 학생들의 의사소통이나 수학적 추론 활동을 활성화시키는 역할을 할 것이다.

3. 연구자료 수집 및 분석

본 연구에서 이용한 자료는 학생들과의 토론 및 개인 인터뷰, 수행평가 결과, 사진 촬영, 수업을 통한 학생들의 반응이고, 연구 방법은 이 자료들을 분석하고 문제점을 개선하는 질적 사례연구를 채택하였다(김익표, 2008). 본 연구자가 수업을 진행했기 때문에 필요한 경우에는 자료들에 대한 회상-자극(Leder, 1990) 기법을 분석에 활용했다.

D과학고등학교 1학년 전체 학생들을 대상으로는 주로 탐구-중심 수업의 운영 가능성 및 수학적 활동에 대한 학생들의 인식 변화에 초점을 맞추어 분석을 하였고, D광역시교육청중등영재교육원 소속 학생들을 대상으로는 안내된 재발명을 바탕으로 수학적인 사실의 발견 또는 발명이 핵심인 탐구-중심 수업이 의사소통과 추론을 포함하는 수학적 활동에 미치는 영향의 분석에 무게를 두었다.

Ⅳ. 연구 결과

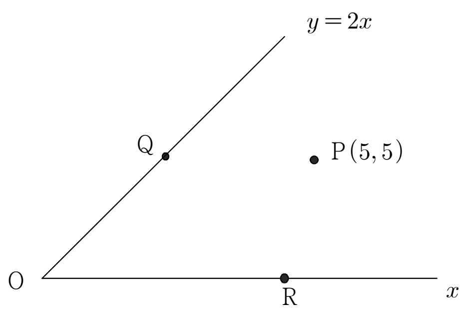
1. 문제설정 또는 변형 중심의 탐구-중심 수업

Freudenthal(1991)이 주장하는 안내된 재발명을 통한 수업, Polya(1954)의 개연적 추론을 통한 추측, 학생 중심의 탐구 활동들이 연구 대상 학교에서 거의 이루어지지 않았다. 학생들은 기본적인 내용들을 바탕으로 주어진 문제를 해결하는 문제해결 위주의 수업을 주로 하였다. 이와 같은 수업 방식의 개선을 위한 시도가 필요한 상황이었다. 먼저 학생들의 수학적 활동에 대한 인식과 교사의 역할에 대한 연구(김익표, 2008)를 수행했다. 그와 동시에 정규 수업 시간 중에 다루는 내용 또는 문제를 바탕으로 학생들의 탐구 활동을 유도함으로써 수학적

활동에 대한 학생들의 인식을 개선하는 것이 탐구-중심 수업의 활성화를 위한 가장 시급한 과제였다.

다음은 본 연구자가 2005년 5월 첫째 주 수업 시간 중에 학생들과 함께 해결한 문제와 1학기 수행평가 과제이다.

문제: 좌표평면 위에 점 $P(5,5)$가 있다. 직선 $y=2x$위의 점 Q와 x축 위의 점 R을 잡아 $PQ+QR+RP$가 최소가 되게 하려고 한다. 이 때, 최솟값 및 점 Q, R의 좌표를 구하여라.



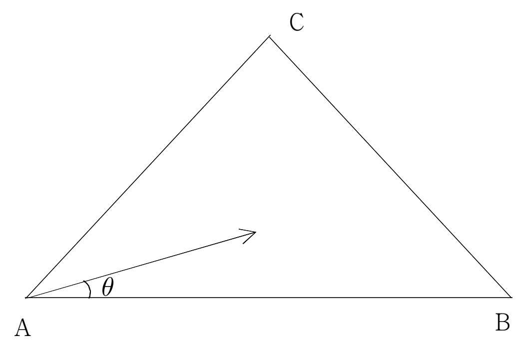
<그림 Ⅳ-1> 직선 $y=2x$와 점 P의 위치

과제: 위의 문제를 바탕으로 발전적이고 유의미한 문제를 만들고 풀어라.

이 과제의 수행과정에서 학생들의 수학적 활동에 대한 인식 변화와 추론과 의사소통을 포함한 수학적 활동을 통하여 수학적인 사실의 발견 또는 창조의 과정을 경험하도록 했다. 주어진 문제 풀이의 핵심이 대칭이동이라는 사실을 학생들은 알고 있었다. 여기에서는 2개조에서 제출한 수행평가 과제를 소개한다. 학생들의 수학적 활동에 대한 인식을 변화시키는 것이 핵심적인 사항이었기 때문에 과제를 수행하는 과정에 대한 분석은 생략했다. 모두 문제설정과 문제해결에 있어서 약간의 독창적인 내용으로 활동을 수행했다고 본 연구자는 판단했다. 학생들이 조별로 제시한 과제의 수행이 완전하게 독창적인 것을 기대하지는 않았다. 수행평가에서의 활동을 모든 구성원이 참여하도록 하였으나 학생들과의 인터뷰 결과 각 조별로 1명~2명이 주도적으로 활동하고 나머지는 도와주는 사례가 많았다. 그렇다고 모든 학생에게 서로 다른 수행 결과물을 제출하도록 할 경우 의사소통을 포함한 협력학습이 어려울 것이고, 결과물의 제출 또한 쉽지 않을 것으로 생각되었다. 이와 같은 문제점은 점차적으로 보완해야할 점이었다.

연구자는 학생들에게 이 과제를 수행하는 과정동안 궁금한 점이나 질문 사항이 있으면 언제라도 연구자를 찾아오도록 함으로써 의사소통이나 추론 활동을 통하여 탐구 활동이 이루어지도록 조력자로서의 역할을 수행했다.

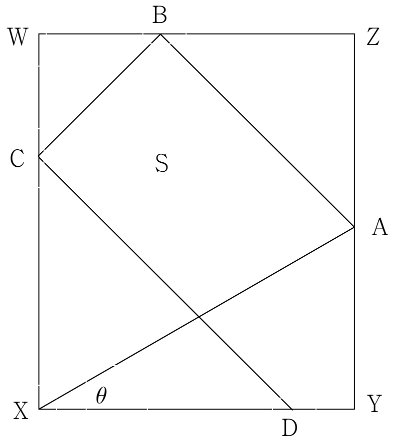
[수행 과제-문제설정 1] 모든 변이 거울로 이루어진 정삼각형 ABC의 한 꼭짓점에서 빛을 쏘았을 때 빛이 변에 반사되면서 다른 꼭짓점에 도달할 수 있는 θ의 조건을 구하여라. (단, $0<\theta<60°$)



<그림 Ⅳ-2> 정삼각형 ABC

이 문제설정은 6명으로 구성된 조에서 제출한 것이었다. 이 문제는 조원들 중 한 명(이 학생을 학생 J로 부르기로 한다.)이 주도적으로 설정한 문제로 학생 J는 수학 성적이 상위 2~3% 이내인 뛰어난 학생이다. 정규 수업 시간에 다루는 난이도 상에 해당되는 문제에 대해서도 쉽게 해결할 뿐만 아니라, 다른 풀이도 제시할 줄 아는 능력을 가진 학생이다. 그러나 새로운 문제를 설정하는 과정에서는 주어진 문제 상황을 벗어나지 못하는 한계를 드러냈다. 따라서 연구자와의 토론을 통하여 주어진 문제 상황(좌표평면, 직선 등)에서 벗어나도록 조언을 했다. 그 후 학생 J는 조원들과 함께 이 문제를 설정했고, 일단 문제가 설정된 후에는 창의적인 아이디어로 문제를 해결했다(부록 1 참조).

[수행 과제-문제설정 2] 그림 Ⅳ-3과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $XYZW$의 꼭짓점 X에서 빛을 입사시켰을 때, 그 빛이 $\overline{YZ}, \overline{ZW}, \overline{WX}$에 차례로 반사되어 만들어지는 자취에 의하여 생성되는 사각형의 넓이 S의 최댓값을 구하여라.



<그림 Ⅳ-3> 정사각형 $XYZW$

이 문제설정은 4명으로 구성된 조에서 제출한 것이다. 이 문제 역시 조원들 중 한 명(이 학생을 학생 L로 부르기로 한다.)이 주도적으로 설정한 문제로 학생 L은 학교수학 성적이 50% 정도인 학생이다. 정규 수업 시간에 다루는 난이도 중상에 해당되는 문제에 대해서 해결 능력과 과제 집착력을 가진 학생이다. 수학을 잘하고자 하는 의욕 또한 강한 학생이어서 정육면체의 한 꼭짓점에서 빛을 입사시켰을 때, 생성되는 사각형의 넓이에 관련된 문제를 설정해 놓고 해결하는데 어려움을 호소했었다. 따라서 입체도형이 어려우면 평면도형으로 상황을 좀 더 쉽게 만들어서 해결한 다음, 그것을 바탕으로 다시 입체도형으로 확장하는 방향으로 문제를 해결하도록 조언을 했다. 그 후 학생 L은 정사각형에서 문제를 설정했고, 일단 문제가 설정된 후에는 문제를 해결했으며(부록2 참조) 정육면체로 이 문제를 확장한 다음 해결하려고 시도하고 있었다. 정사각형에 관한 이와 같은 문제는 다소 흔한 것에 속하지만 입체도형으로 상황을 바꾼 문제에서 이것을 풀도록 하는데 의의를 두고, 탐구 활동을 계속하도록 했지만 진척이 없는 상태에서 2학년으로 진급을 했다.

문제설정 1과 2는 1학기말에 제출된 과제이다. 본 연구자는 2학기에도 한 학기 과제로 학생들에게 1학기에 제출한 과제를 바탕으로 새로운 문제를 설정하거나, 그것이 불가능하다면 나름대로 새로운 문제를 설정해서 해결하는 과제를 제출하도록 했다. 그 결과 학생 J가 포함된 조는 문제설정 1에서 각 꼭짓점으로 들어가는 빛의 반사 횟수를 구하는 문제(부록 3 참조)를 만들고 해결하는 성과를 제출했고, 학생 L이 포함된 조는 문제설정 2에서 정사각형을 직사각형으로 변형해서 문제를 설정했다. 특히, 학생 L은 자신이 주도적으로 문제를 설정하고 해결하는 활동에서 그 동안 배운 수학내용들의 다양한 부분들이 사용되는 사실에 대하여 고무되어 있었으며 입체도형에 대하여 자신이 생각하고 있는 문제를 해결하려는 강한의지를 보였다. 이와 같은 활동을 처음 시작할 때의 소극적인 모습과는 완전히 다른 태도였다. 비록 자신이 목표하는 바를 이루지는 못했지만 탐구-중심 수업이 학생들의 탐구 활동을 자극한다는 사실을 인지할 수 있는 대목이었다.

이상에서 정규 수업 시간 중에 다루는 문제를 변형 또는 확장해서 새로운 문제를 설정하는 활동은 기존의 수업에 비하여 학생들의 수학적 활동에 대한 인식을 변화시키는 것에 대해서는 긍정적이었다. 그러나 다양하고 확산적인 사고를 바탕으로 하는 학생들의 활동을 유도하기에는 다소 부족했다. 지금까지의 결과는 탐구-중심 수업의 활성화 위해서는 학생들의 수학적 활동에 대한 인식 변화가 필요하고, 이 인식 변화를 위해서는 조력자로서의 교사의 역할이 필요함을 확인하는 기회가 되었다.

2. 수학적 개념들의 연결성

학생들에게 구체적인 문제의 조건을 변형하거나 확장하는 방식의 탐구는 어느 정도 한계가 있음을 알 수 있었다. 그래서 여러 가지 개념들과 연관성을 가지고 있고 다양한 방향으로의 변형 또는 확장이 가능한 개념인 파스칼의 삼각형을 탐구 주제로 학생들에게 제시하기로 결정하였다. 2005년 D광역시교육청영재교육원 고등학교 1학년 수학반 10명을 대상으로 10시간정도 파스칼의 삼각형과 관련된 내용을 토론 형식으로 제시했다. 이 수업은

파스칼의 삼각형과 관련된 수학적인 사실의 발명이 학생들의 탐구 활동으로 연결되도록 하는 예비 활동이다. 학생들과의 토론 형식으로 전달한 내용 중 중요한 부분을 소개하면 다음과 같다.

1) 수업 1(약 15분)

파스칼의 삼각형(4.1)과 계차표[2](4.2)를 제시하고 둘 사이의 연관성을 발표하도록 했으나 어떤 학생도 반응을 보이지 않았다.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array} \quad (4.1)$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 5 & & 10 & & 17 & & 26 & & \cdots \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \cdots & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \cdots & & \\ & & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \end{array} \quad (4.2)$$

한국의 고등학교 교육과정에서는 두 개념을 서로 분리해서 제시하고 있다. 그러나 서로 다른 수학적인 개념이 가지고 있는 유사한 패턴을 발견하고, 이 패턴을 바탕으로 두 개념을 연결시키는 활동은 다양한 내용들 사이에서 가설을 제기하며 연역적으로 증명하는 능력을 촉진시키기 때문에(NCTM, 1989) 탐구 활동의 활성화에 있어서 매우 중요한 부분이다. 실제 수업에서 다음과 같은 질문을 하면서 학생들의 참여를 이끌어내고자 했다.

연구자: 파스칼의 삼각형과 계차표 사이에 어떤 유사한 패턴을 발견할 수 있을까요?
학생 Y: 파스칼 삼각형에서 어떤 수는 바로 위에 있는 두 수의 합이고, 계차표에서 어떤 수는 왼쪽에 있는 두 수의 합입니다.
연구자: 그렇군요. 그러면 학생 Y가 발견한 사실을 이용하여 둘 사이의 관계를 밝힐 수 있을까요?
학생들: ...(반응이 없음).

2) 주어진 수열의 계차수열을 제 1계 계차수열, 제 1계 계차수열의 계차수열을 제 2계 계차수열, …이라 하고, 계차수열들을 (4.2)와 같이 나타나낸 것을 계차표라고 한다(김익표・황석근, 2004).

이 수업의 목표는 수열의 일반항을 이항계수로 나타낼 수 있다는 것을 학생들이 인지하고 스스로 발견하도록 하는 것이다. 이를 통하여 서로 다른 수학적 개념들 사이의 연결성을 파악함으로써 새로운 방향으로의 문제 해결이나 해석이 가능함을 학생들이 경험할 수 있는 기회를 가질 수 있다고 판단했다.

파스칼 행렬의 행 번호와 열 번호를 $0, 1, 2, \cdots$로 하자. 이 행렬의 각 성분은 이항계수로 표현할 수 있기 때문에 계차표를 파스칼 행렬로 표현하도록 학생들에게 말했다.

파스칼의 삼각형을 행렬로 재구성한 파스칼 행렬(4.3)과 변형된 계차표(4.4)를 제시하였더니 둘 사이의 연관성에 대하여 언급하는 학생들이 나타났지만 정확하게 지적하는 학생은 없었다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & 0 & 2 & 1 & 1 \\ \cdots & 0 & 2 & 3 & 2 \\ \cdots & 0 & 2 & 5 & 5 \\ \cdots & 0 & 2 & 7 & 10 \\ \cdots & 0 & 2 & 9 & 17 \\ \cdots & 0 & 2 & 11 & 26 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} (4.4)$$

학생들에게 사고할 수 있는 시간적인 여유를 주기위하여 과제로 제시하고 수업을 마쳤다.

2) 수업 2(약 15분)

수업 1의 내용을 학생들에게 상기시키면서 과제로 제시한 내용을 발표하도록 했지만 학생들의 반응이 없어 다음과 같이 학생 활동을 유도했다.

연구자: 계차표의 일부분인 (4.5)를 파스칼 행렬을 이용하여 나타낼 수 없을까?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 10 \\ 2 & 9 & 17 \\ 2 & 11 & 26 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

학생들: ...(반응이 없음.)

연구자: (4.5)의 맨 왼쪽 열의 모든 성분이 2이고, 파스칼 행렬의 맨 왼쪽 열의 모든 성분이 1인 사실에 주목해 봅시다.

학생 Y: 선생님 (4.5)는 파스칼 행렬의 일부에 상수를 곱한 것들의 합으로 다음과 같이 표현됩니다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 10 \\ 2 & 9 & 17 \\ 2 & 11 & 26 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 10 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ & & \end{bmatrix}$$

학생 Y는 연구자의 첫 번째 힌트에 곧바로 해답을 구했지만 나머지 학생들은 연구자가 원하는 답을 구하지 못했다. 다음은 학생 Y를 제외한 학생들과의 수업 내용이다. 연구자의 마지막 힌트(4.6) 후에는 대부분의 학생들이 학생 Y와 같은 결론에 도달할 수 있었다.

연구자: (4.5)를 파스칼 행렬의 일부분들로 분리할 수 있을까요.

학생들: (4.5)안에 파스칼 행렬의 일부분이 있는 것 같은데 분리를 못하겠습니다.

연구자: 이제 (4.5)를 다음과 같이 나타내 보겠습니다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 10 \\ 2 & 9 & 17 \\ 2 & 11 & 26 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0+1 & 0+0+1 \\ 2 & 2+1 & 0+1+1 \\ 2 & 4+1 & 2+2+1 \\ 2 & 6+1 & 6+3+1 \\ 2 & 8+1 & 12+4+1 \\ 2 & 10+1 & 20+5+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

연구자: 잘 했습니다. 이제 수열

$1, 2, 5, 10, 17, 26, \cdots$

의 n번째 항을 이항계수로 표현할 수 있을까요? 각자가 생각해 보고 다음 시간에 발표하도록 합시다.

본 연구자는 학생들이 구체적인 사례를 바탕으로 일반적인 경우를 추측하는 귀납적 추론 활동을 통하여 주어진 수열의 일반항을 구하도록 하는 수업을 계획했다. 먼저 일반적인 경우에 대하여 질문하고, 학생들의 반응을 살핀 다음 구체적인 사례를 바탕으로 일반적인 경우를 추측하도록 조언하는 방법으로 수업의 진행을 계획했다. 그러나 다음 수업에서 한 학생이 아주 근접한 답을 제시했기 때문에 계획에서 조금 벗어난 수업 진행이 이루어졌다.

3) 수업 3(약 10분)

학생들에게 지난 시간에 한 내용을 상기시키면서 주어진 수열 $1, 2, 5, 10, 17, 26, \cdots$의 일반항을 이항계수로 나타내도록 요구했다. 다음은 학생들과의 수업 내용이다.

학생 K: 주어진 수열의 n번째 항은

$a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}$입니다.

연구자: K는 파스칼 행렬과 계차수열과의 연관성에 대하여 잘 이해한 것 같다. 그런데 파스칼 행렬에서는 행 번호가 $0, 1, 2, \cdots$이고 주어진 수열의 계차수열들을 나타낸 표에서는 행 번호가 $1, 2, 3, \cdots$인데 K가 구한 항은 $n+1$번째 항인 것 같다. 어떻게 생각하니?

학생 K: 선생님 말씀이 맞는 것 같습니다.

연구자: 어떻게 하면 되겠니?

학생 K: $a_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2}$입니다.

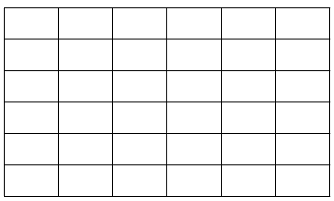
연구자: 잘했습니다.

이 수업에서 연구자는 위의 사실에 대하여 수학적 귀납법에 의한 증명 방법(김익표・황석근, 2004)을 학생들에게 소개했다. 위에서 실시한 3번의 수업이외에도 계차표를 이용하여 주어진 수열의 합을 구하는 방법을 소개했다. 이 수업들을 바탕으로 학생들이 제출한 결과물은

없었다. 서로 관련성이 없어 보이는 개념들 사이에 공통적인 패턴을 찾고, 그것을 바탕으로 두 개념을 연결시킴으로써, 수열의 일반항을 계차수열을 이용하여 구하는 기존의 방법보다 쉬운 방법을 생각할 수 있다는 사실을 학생들에게 보여준 것으로 만족해야 했다. 수학적인 개념들의 네트워크에 초점을 맞춘 수업은 학생들에게 수학적 힘과 아름다움을 음미하고, 이해하게 하고 탐구할 수 있게 할 것이다(NCTM, 1989).

3. 의사소통과 수학적 추론의 활성화를 위한 탐구-중심 수업

다음은 파스칼 행렬과 격자점의 이동과의 관련성에 대한 수업(약 10분) 내용이다.



<그림 Ⅳ-4> 격자점

연구자: 위 격자점(<그림 Ⅳ-4>)의 맨 왼쪽 위의 점에서 출발해서 아래쪽으로 한 칸, 오른쪽 대각선 아래쪽으로 한 칸씩 움직일 때, 각 점에 이르는 방법 수를 행렬로 표현해 봅시다.

학생들: 파스칼 행렬의 일부분(4.7)을 얻을 수 있습니다.

지금부터 행렬의 행 번호, 열 번호를 모두 $0, 1, 2, \cdots$와 같이 0부터 시작하기로 한다. 학생들은 행렬(4.7)을 쉽게 구했다. 이 행렬을 P_6으로 나타내기로 한다. 그 다음 연구자는 격자점의 이동과 관련된 내용을 변형해서 새로운 행렬을 구성해 보도록 했다. 대부분의 학생들이 격자점에서 가는 방법을 한 가지 추가(오른쪽으로 한 칸)하는 것을 생각했고, 그렇게 해서 구성한 행렬이 (4.8)이다. 이 행렬을 K_6으로 나타내고 7×7 Kite-행렬[3]이라고 부르기로 한다.

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$K_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 & 61 & 85 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 & 231 & 377 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 & 681 & 1289 \\ 1 & 11 & 61 & 231 & 681 & 1289 & 3259 \\ 1 & 13 & 85 & 377 & 1289 & 3259 & 7807 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

(4.8)과 같이 학생들 입장에서 처음 접하는 행렬의 구성은 의사소통과 수학적 추론 활동을 통하여 자신의 수학적인 세계를 건설할 수 있도록 하는 역할을 했다. 2005학년도 영재교육원 학생들 중 4명이 행렬 4.8을 탐구 소재로 결정했다.

행렬 4.8을 연구 소재로 선택한 조는 어떤 방향으로 탐구를 진행할 지를 결정하지는 못했다. 그래서 연구자는 파스칼 행렬과 관련하여 지금까지 토론한 사실과의 연관성에 대하여 탐구하도록 조언을 했다. 이 학생들은 새롭게 구성한 Kite-행렬의 성분들 사이에 규칙을 찾는 과정에서 서로의 의견을 교환하면서 새로운 수학적 사실들을 발견하고자 노력하는 모습을 보였다. 이 Kite-행렬은 파스칼 행렬과 관련된 확장이므로 파스칼 행렬에서 성립하는 많은 성질들이 이 행렬에서는 어떻게 변형 또는 확장되는지에 대하여 추론할 수 있는 적절한 소재로서의 역할을 했다. 학생들은 파스칼 행렬과의 연관성을 찾는 과정에서 추론과 의사소통을 포함한 활발한 수학적 활동을 하면서 여러 가지 사실들을 발견했다. 그 중 대표적인 것을 소개하면 다음과 같다.

이 학생들은 행렬 4.8을 변형해서 다음과 같은 행렬 4.9를 구성했고, 파스칼 행렬에서 얻은 피보나치수열을 확장한 수열

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \cdots$$

3) ㅁ자로 인접한 행렬의 성분들 사이의 점화식 관계가 연(kite) 모양을 이루므로 Kite-행렬로 부르기로 한다(4.12 참조).

을 얻었다. 그리고 이 행렬의 성분들 사이의 다른 관계를 탐구하기도 했다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 13 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 25 & 25 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 41 & 63 & 41 & 11 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

행렬 4.9에서 기울기가 45도인 직선 위에 있는 성분들의 합으로 이루어진 수열은

$$1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \cdots$$

이고, 이 수열의 특징은 앞에 있는 3개의 항을 더하면 바로 다음 항이 되는 것이다. 학생들이 행렬 4.9를 구성할 수 있었던 것은 파스칼 행렬을 격자점의 이동과 연결시켰기 때문이다. 그 다음 이동 방법의 변형 또는 확장을 통하여 행렬 4.9를 얻었다. 행렬 4.9는 학생들에게 의사소통과 수학적 추론의 장인 동시에 의사소통과 수학적 추론을 강조하지 않아도 자연스럽게 이와 같은 활동을 하도록 유도하는 소재로서의 역할을 했다.

서로 다른 두 개념의 연결이 학생들에게 새로운 행렬의 발명을 경험하도록 했고, 이 행렬을 파스칼 행렬과 연결시키는 탐구활동을 통하여 활발한 의사소통과 추론활동을 유발시킴으로써 수학적 힘의 신장을 촉진시키는 계기가 된 것이다.

4. Kite-행렬의 LDU-decomposition

행렬 4.8은 과학고등학교 학생들에게도 elementary row operation과 elementary matrix(Anton, H., 2005)에 대한 내용을 소개하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있도록 지도할 수 있을 것이다.

다음은 본 연구자가 행렬 4.8을 탐구 소재로 기존의 연구 결과를 확장해서 얻은 결과이다. 고등학교 학생들을 대상으로 하는 탐구 주제에 대학과정의 기본적인 몇 가지 사실들이 추가되면 대학과정의 학생들은 물론이고 고등학교 학생들을 대상으로 하는 탐구 활동을 진행시키는 것이 가능함을 본 연구자가 증명한 결과들을 통하여 주장하고자 한다. 고등학교 학생들을 대상으로 하는 탐구 소재가 기존의 지식을 추가함으로써 발전적인 탐구 소재로 확장되는 것은 학생 스스로 지식을 구성하도록 돕는 수학적 활동의 바람직한 사례가 될 것이다.

이를테면 elementary row operation과 elementary matrix 개념은 연립방정식의 풀이와 관련된 내용을 행렬을 도입하여 표현한 비교적 쉬운 개념이므로 고등학생을 대상으로 하는 수업에서 도입이 가능한 개념이다.

행렬

$$S_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

을 7×7 대칭 파스칼 행렬이라 부르고, $S_6 = P_6 P_6^T$이 성립한다. Edelman & Strang(2004)은 임의의 음이 아닌 정수 n에 대하여 $(n+1)\times(n+1)$ 소거 행렬(elimination matrix)

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

과 수학적 귀납법을 사용하여 $S_n = P_n P_n^T$가 성립함을 증명했다. 이것은 행렬 S_n의 LU-decomposition이다. 이는 학생들에게 행렬 4.8을 소거행렬을 이용하여 LU-decomposition하도록 유도하는 결과이다. 본 연구자는 임의의 음이 아닌 정수 n에 대하여, 행렬 K_n의 성분들 사이의 관계와 수학적 귀납법을 이용하여 $K_n = P_n D_n P_n^T$가 성립함을 증명할 수 있었다. (단, $D_n = [d_{ij}]$은 대각행렬로서 $d_{ii} = 2^i$, $i = 0, 1, 2, \cdots$이다.)

보조정리 4.1. $(n+1)\times(n+1)$ 행렬 $K_n = [k_{ij}]$, $(i, j = 0, 1, 2, \cdots, n)$에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 모든 $q = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$k_{i+1,q} - k_{iq} = 2\sum_{l=0}^{q-1} k_{il}$$

(b) 모든 $p=1,2,\cdots$에 대하여

$$k_{p,j+1}-k_{pj}=2\sum_{l=0}^{p-1}k_{lj}$$

(c) 모든 $p,q=1,2,\cdots$에 대하여

$$k_{pq}-k_{00}=2\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{p-1}k_{ml}$$

증명. $(n+1)\times(n+1)$ 행렬

$$K_n=[k_{ij}],\,(i,j=0,1,2,\cdots,n)$$

에서 ㅁ자로 인접한 성분들 사이에

$$k_{ij}+k_{i,j+1}+k_{i+1,j}=k_{i+1,j+1} \qquad (4.12)$$

이 성립한다. 이제 q에 관한 귀납법으로 (a)를 증명한다.

4.12에 의하여

$$2k_{i0}+k_{i1}=k_{i+1,0}+k_{i0}+k_{i1}=k_{i+1,1}$$

이므로 $q=1$에 대하여 (a)가 성립한다. $q\geq 2$라고 가정하고 $q-1$이하에 대하여 (a)가 성립한다고 가정하자. 귀납법 가정에 의하여

$$k_{i+1,q-1}-k_{i,q-1}=2\sum_{l=0}^{q-2}k_{il},$$

즉

$$2\sum_{l=0}^{q-2}k_{il}+k_{i,q-1}=k_{i+1,q-1}$$

이 성립하므로

$$\begin{aligned}2\sum_{l=0}^{q-1}k_{il}+k_{iq}&=2\sum_{l=0}^{q-2}k_{il}+k_{i,q-1}+k_{i,q-1}+k_{iq}\\&=k_{i+1,q-1}+k_{i,q-1}+k_{iq}\\&=k_{i+1,q}\end{aligned}$$

이 성립한다. 행렬 K_n이 대칭이므로 (b)는 명백하다.

p 또는 q에 관한 귀납법으로 (c)를 증명한다.

$$k_{00}+2\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{0}k_{ml}=k_{0q}+2\sum_{l=0}^{q-1}k_{0l}=k_{1q}$$

이고

$$k_{00}+2\sum_{l=0}^{0}\sum_{m=0}^{p-1}k_{ml}=k_{p0}+2\sum_{m=0}^{p-1}k_{m0}=k_{p1}$$

이므로 $p=1$ 또는 $q=1$에 대하여 (c)가 성립한다. $p\geq 2$이고 $q\geq 2$라고 가정하고 $p-1$이하 또는 $q-1$이하에 대하여 (c)가 성립한다고 가정하자. 귀납법 가정, (a), (b), 그리고 4.12에 의하여

$$\begin{aligned}&k_{00}+2\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{m=0}^{p-1}k_{ml}\\&=k_{00}+2\sum_{l=0}^{q-2}\sum_{m=0}^{p-2}k_{ml}+2k_{p-1,q-1}\\&+2\sum_{m=0}^{p-2}k_{m,q-1}+2\sum_{l=0}^{q-2}k_{p-1,l}\\&=k_{p-1,q-1}+2\sum_{m=0}^{p-2}k_{m,q-1}+k_{p-1,q-1}\\&+2\sum_{l=0}^{q-2}k_{p-1,l}+k_{p-1,q-1}\\&=k_{p-1,q-1}+k_{p-1,q}+k_{p,q-1}=k_{pq}\end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 (c)가 증명되었다.

보조정리 4.1에 의하여 다음 정리를 얻을 수 있다. 지금부터 행렬 A의 (i,j) 성분을 $(A)_{ij}$로 나타내기로 하자.

정리 4.2. $(n+1)\times(n+1)$ 행렬 $K_n=[k_{ij}]$, 파스칼 행렬 $P_n=[p_{ij}],(i,j=0,1,2,\cdots,n)$에 대하여 $K_n=P_nD_nP_n^T$가 성립한다. (단 n은 음이 아닌 정수이고 $D_n=\mathrm{diag}(1,2,2^2,\cdots,2^n)$이다.)

증명. n에 관한 귀납법으로 정리를 증명한다. $n=0$일 때, $K_0=[1],P_0=[1],P_0^T=[1],D_0=[1]$이고 $K_0=P_0D_0P_0^T$이므로 위의 사실이 성립한다. $n\geq 1$이라고 가정하고 $n-1$일 때, 위의 사실이 성립한다고 가정하자. $i\geq 1,\,j\geq 1$에 대하여

$$(E_nP_n)_{i0}=(E_nP_n)_{0j}=1$$

이고

$$(E_nP_n)_{ij}=-(P_n)_{i-1,j}+(P_n)_{ij}=(P_n)_{i-1,j-1}$$

이므로

$$\begin{aligned}&(E_nP_n)D_n(P_n^TE_n^T)\\&=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&P_{n-1}&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&2D_{n-1}&\\0&&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&P_{n-1}^T&\\0&&&\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&&&\\\vdots&&2P_{n-1}D_{n-1}P_{n-1}^T&\\0&&&\end{bmatrix}\end{aligned}$$

이 성립한다. 귀납법 가정에 의하여

$$P_{n-1}D_{n-1}P_{n-1}^T = K_{n-1}$$

이고

$$(E_nP_n)D_n(P_n^TE_n^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 2K_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

이다. 따라서

$$P_nD_nP_n^T = E_n^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 2K_{n-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}(E_n^{-1})^T$$

이 성립한다. $i=0,1,2,\cdots,n$에 대해서는 명백하게 $(K_n)_{0i}=(K_n)_{i0}=1$이 성립한다.

모든 $i,j=1,2,\cdots,n$에 대하여

$$(E_n^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1, & i \ge j, \\ 0, & i < j \end{cases}$$

이므로 보조정리 4.1에 의하여

$$\begin{aligned}(P_nD_nP_n^T)_{ij} &= (K_n)_{00} + 2\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{m=0}^{i-1}(K_n)_{ml} \\ &= (K_n)_{ij}\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 정리 4.2가 증명되었다.

정리 4.2로부터 2개의 따름정리를 얻을 수 있다.

따름정리 4.3. $(n+1)\times(n+1)$ 행렬 $K_n=[k_{ij}]$, 파스칼 행렬 $P_n=[p_{ij}],(i,j=0,1,2,\cdots,n)$에 대하여

$$K_n^{-1} = F_nP_n^TD_n^{-1}P_nF_n$$

이 성립한다. (단 n은 음이 아닌 정수이고

$$D_n = \mathrm{diag}(1,2,2^2,\cdots,2^n),$$

$$F_n = \mathrm{diag}((-1)^0,(-1)^1,\cdots,(-1)^n)$$

이다.)

증명. $P_n^{-1}=F_nP_nF_n$이므로 정리 4.2에 의하여

$$K_n^{-1} = F_nP_n^TD_n^{-1}P_nF_n$$

이 성립한다.

$n=n_1+n_2+\cdots+n_t$에 대하여 $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots\,n_t!}$를 $\dbinom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}$로 나타내고 다항계수라고 부른다(황석근 외, 2001).

$(n+1)\times(n+1)$ 행렬

$$K_n=[k_{ij}],(i,j=0,1,2,\cdots,n)$$

에 대하여

$$k_{ij} = \sum_{r=0}^{\min i,j}\binom{i+j-r}{i-r,\,j-r,\,r}$$

은 잘 알려진 사실이다(Brualdi, 2004). 이 사실과 정리 4.2로부터 다음 따름정리가 증명된다.

따름정리 4.4. $(n+1)\times(n+1)$ 행렬

$$K_n=[k_{ij}],(i,j=0,1,2,\cdots,n)$$

에 대하여

$$k_{ij} = \sum_{r=0}^{\min i,j}\binom{i+j-r}{i-r,\,j-r,\,r} = \sum_{r=0}^{\min i,j}2^r\binom{i}{r}\binom{j}{r}$$

이 성립한다.

증명. 정리 4.2와 행렬의 곱셈에 의하여 명백하다.

본 연구자가 보조정리 4.1에서부터 따름정리 4.4까지의 결과를 얻을 수 있었던 것은 Kite-행렬 K_n의 발명이 있었기 때문에 가능했다. 물론 K_n은 잘 알려진 행렬의 형태이고 K_n의 LDU-decomposition 또한 알려진 사실이다. 그러나 K_n의 LDU-decomposition에 대한 기존의 증명 방법은 미분방정식의 해와 관련된 방법(Cheon & El-Mikkawy, 2004)으로 고등학교 학생들에게 지도하기에는 어려운 내용이다. 본 논문에서는 격자점의 이동과 파스칼 행렬을 연결시킨 다음, 격자점에서의 이동 방법을 확장 또는 변형함으로써 행렬 K_n을 발명했다. 그리고 Edelman & Strang(2004)의 소거행렬 E_n, 행렬 K_n의 성분들 사이의 기본적인 관계, 그리고 수학적 귀납법에 의하여 K_n의 LDU-decomposition을 증명함으로써 소거행렬 E_n에 대한 안내를 추가하면 충분히 고등학교 학생들이 K_n에 대하여 계속적인 탐구가 가능함을 확인할 수 있었다. 파스칼 행렬에서 성립하는 성질들과 Kite-행렬에서 성립하는 성질들 사이에 연관성은 쉽게 추론할 수 있는 부분이다. 이것은 연계를 바탕으로 하는 수학적 발견 또는 발명이 의사소통이나 수학적 추론 활동을 활성화 시키는 것은 물론이고 의사소통이나 수학적 추론을 강조하지 않아도 자연스럽게 이와 같은 수학적 활동을 학생들이 할 수 있도록 유도하는 결과이다. 즉,

기존의 수학적 사실들과 연계된 새로운 수학적 사실들의 발견 또는 발명은 학생들 입장에서도 쉽게 탐구 소재를 찾을 수 있도록 도와주는 적절한 사례가 된다고 생각한다.

Ⅳ. 결 론

탐구-중심 수업 모델을 바탕으로 정규 수업 시간 중에 다루는 문제를 주제로 하여 탐구 활동을 하면서 자주 접하는 문제도 탐구 주제가 될 수 있다는 인식을 심어줌으로써 학생들의 수학적인 탐구 활동을 자극하였다. 또 안내된 재발명의 방법으로 서로 관련성이 없어 보이는 두 개념을 연결시킴으로써 새로운 수학적인 개념의 발견 또는 발명을 포함하는 탐구-중심 수업이 의사소통과 추론을 포함한 수학적 활동을 촉진시킴을 확인할 수 있었다. 이 수학적 활동은 수학적 힘의 신장을 촉진시킴으로써 더욱 발전적인 탐구로 학생들을 이끄는 견인차의 역할을 할 것이라고 확신할 수 있었다.

학생 스스로 문제를 설정하고 해결하거나 새로운 탐구 소재의 발견 또는 발명을 통하여 추론과 의사소통을 포함하는 수학적 활동을 유도하는 탐구-중심 수업의 연구에서 다음과 같은 결론에 도달할 수 있었다.

첫째, 관찰; 문제설정; 이미 알려진 사실들을 확인하기 위하여 책과 다른 출처의 정보 검토; 연구 계획; 실험의 증거로 알려진 것을 재확인; 자료의 수집, 분석, 해석을 위해 도구 사용; 해답, 설명, 예상을 제안; 결과에 관한 의사교환을 포함하는 다양한 면을 가지고 있는 탐구 활동에 적절한 안내가 필요함을 확인할 수 있었다. 즉, 탐구 활동에 대한 경험이 없는 학생들을 대상으로 문제설정과 문제해결 과정을 포함한 탐구 활동에 대한 자세한 지도가 필수적임을 인식할 수 있었다.

둘째, 안내된 재발명의 방법으로 기존의 개념을 발명하게 한 다음, 연결성을 바탕으로 그 개념을 확장시킴으로써 학생 스스로 새로운 수학적 개념을 발명할 수 있도록 유도한다면 강조하지 않아도 자연스럽게 수학적인 의사소통이나 추론 등을 포함하는 수학적 활동을 위한 동기가 유발됨을 확인할 수 있었다.

셋째, 학생들이 자주 접한 익숙한 주제로 시작하여 발전적인 내용으로 탐구 주제를 선택해서, 학생들이 흥미를 가지고 탐구 활동을 할 수 있도록 이끌어 준다면 의미 있고 새로운 수학적인 사실의 발견 또는 발명이 가능함을 확인할 수 있었다.

넷째, 탐구 활동을 통하여 새로운 수학적 사실의 발견 또는 창조를 경험한 학생들에게 점차 발전적인 방향으로 탐구 활동을 할 수 있도록 하는 적절한 안내가 필요하며, 이와 같은 안내가 제공된다면 의미 있는 수학적 발견 또는 발명이 가능한 것은 물론이고 수학 교실을 탐구가 충만한 공간으로 바꿀 수 있음을 확인할 수 있었다.

다섯째, 탐구-중심 수업 모델을 바탕으로 탐구를 위한 학생활동을 유도하기 위해서는 충분한 시간과 탐구 활동을 위한 제반 여건들이 갖추어져야 함을 알 수 있었다.

이제 탐구-중심 수업 모델을 바탕으로 하는 탐구-중심 수업이 의사소통과 추론을 포함한 수학적 활동에 미치는 영향을 분석하는 본 연구의 후속 연구에 대한 제안을 하고자한다.

첫째, 이 연구는 과학고등학교 학생들을 대상으로 하는 탐구-중심 수업에 대한 연구이다. 일반 고등학교에 적용하기에는 무리가 있다. 따라서 일반 고등학교 학생들을 위한 체계적인 연구가 필요하다.

둘째, 탐구-중심 수업의 근본적인 목적은 학생들이 자연스럽게 참여하는 추론과 의사소통 활동을 통하여 새로운 수학적인 사실의 발견 또는 발명을 경험하도록 하는 것이다. 다양한 탐구 주제의 개발과 이 주제를 바탕으로 안내된 재발명의 방법으로 학생들로 하여금 발명할 수 있도록 도와주는 방법의 연구가 필요하다.

셋째, 고등학교에서 적용된 탐구-중심 수업이 단절 없이 대학과정 수학에서의 탐구 활동으로 이어질 수 있도록 광범위한 연구가 진행된다면 학생들의 동기를 유발시키는 효과를 기대할 수 있을 것이다.

이 사례연구를 통하여 학생 스스로 서로 다른 수학적인 개념들 사이에 연결 고리를 찾고, 기존의 개념을 변형 또는 확장하여 새로운 개념을 발견 또는 발명하고, 이 새로운 개념을 기존의 다른 개념으로 해석하는 활동이 행해지는 교실 문화가 형성된다면 모든 학생들이 자유롭게 자신과 다른 학생들의 아이디어에 대하여 토론하는 개방적인 수학교실이 만들어질 것이다. 이와 같은 수

학교실은 창의적인 사고 활동이 이루어지는 탐구 문화가 충만한 공간이 될 것이고, 경쟁보다는 협력이 중요시되는 학교수학의 공간으로 거듭나게 될 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (1997). 제7차 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서.

교육인적자원부 (2007) (http:/www.moe.go.kr). 개정 수학과 교육과정.

김익표 (2008). 탐구-중심 수학 수업에서 교사의 역할에 관한 사례연구: 과학고등학교 학생들을 중심으로, 한국학교수학회논문집 11(2), pp.177-199.

김익표・황석근 (2004). 파스칼의 삼각형, 계차수열 및 행렬의 연계와 표현, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 43(4), pp.391-398.

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이종희・김선희 (2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사-수학적 추론 유형 중심으로-, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 41(3), pp.273-289.

황석근・이재돈・김익표 (2001). ENV 이산수학. 서울: 블랙박스.

Anton, H. (2005). *Elementary Linear Algebra 9th ed.* New Jersey: John Wiley & Sons.

Brualdi, R. A. (2004). *Introductory Combinatorics 4th ed.* New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Cheon, G.-S., & El-Mikkawy, M. (2004). Extended symmetric Pascal matrices via hypergeometric functions, *Appl. Math. Comput.* 158, pp.159-168.

Edelman, A., & Strang, G. (2004). Pascal Matrices, *American Mathematical Monthly* 111(3), pp.189-197.

Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: Learning and Teaching Mathematics in a Community of Inquiry, *Educational Studies in Mathematics* 54, pp.77-99.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education.* Kluwer: Dordrecht.

Forman, E. A. (2003). *A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics*(pp.332-352). Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics.

Forman, E. A., & McPhail, J. (1993). *Vygotskian perspective on children's collaborative problem-solving activities. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone(Eds.), Context for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (pp.213-229). New York: Oxford University Press.

Goos, M. (2004). Learning Mathematics in a Classroom Community of Inquiry, *Journal for Research in Mathematics Education* 35(4), pp.258-291.

Healy, C. C. (1993). Creating miracles: *A story of student discovery.* Berkeley, CA: Key Curriculum Press.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate peripheral participation.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Leder, G. (1990). Talking about mathematics, *Australian Educational Researcher* 17(2), pp.17-27.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics* 46, pp.87-113.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving, *Educational Studies in mathematics* 12(2), pp.235-264.

National Research Council (1996). *National science education standards.* Washington, DC: National Academy Press.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards For School Mathematics.* Reston, VA: Author.

NCTM (2000). *Principles and Standards For School*

Mathematics. Reston, VA: Author.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rowe, M. B. (1973). *Teaching Science as Continuous Inquiry*. New York: McGraw-Hill.

Schoenfeld, A. H. (1985). M*athematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Silver, E. A. (1993). On mathematical problem posing. In I. Hirabayashi; N. Nohda; K. Shigematsu; F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th PME Conference* Vol. I (pp.66-85). University of Tsukuba, Tsukuba.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing, *For the learning of mathematics*, 14(1), pp19-28.

Silver, E. A., & Adams, V. M. (1990). Using open-ended problems, *Arithmetic Teachers* 34(9), pp.34-35.

Skinner, P. (1991). *What's your problem? Posing and solving mathematical problems, K-2*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Streefland, L. (1987). Free production of fraction monographs-In: J. C. Bergeron; N. Herscovics; C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume I (pp.405-410). Montreal: Canada.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Van den Brink, J. F. (1987). Children as arithmetic book authors, *For the learning of mathematics* 7(2), pp.44-48.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture, *Educational Studies in Mathematics* 46, pp.59-85.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* 32(1), pp.1-28.

A case study of the impact of inquiry-oriented instruction with guided reinvention on students' mathematical activities

Kim, Ik-Pyo
Department of Mathematics Education, Daegu University, Kyeongsan, Korea
E-mail : kimikpyo@daegu.ac.kr

Goos(2004) introduced educational researchers' demand for change on the way that mathematics is taught in schools and the series of curriculum documents produced by the National council of Teachers of Mathematics. The documents have placed emphasis on the processes of problem solving, reasoning, and communication.

In Korea, the national curriculum documents have also placed increased emphasis on mathematical activities such as reasoning and communication(1997, 2007).

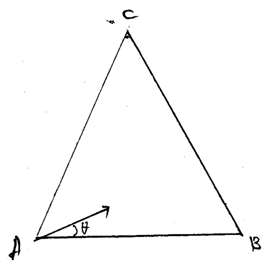
The purpose of this study is to analyze the impact of inquiry-oriented instruction with guided reinvention on students' mathematical activities containing communication and reasoning for science high school students.

In this paper, we introduce an inquiry-oriented instruction containing Polya's plausible reasoning, Freudenthal's guided reinvention, Forman's sociocultural approach of learning, and Vygotsky's zone of proximal development. We analyze the impact of mathematical findings from inquiry-oriented instruction on students' mathematical activities containing communication and reasoning

* ZDM Classification : C54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Plausible reasoning, Guided reinvention, Zone of proximal development, Inquiry-oriented instruction, Inquiry-oriented instruction model

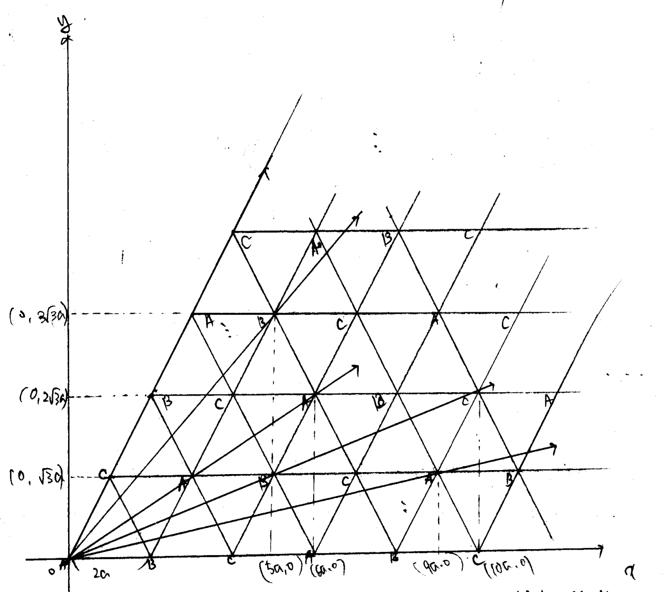
<부록 1>

삼각형과 빛



정 △ ABC 에서 한 꼭지점에서 빛 쏘고, 모든 변은 거울로 되어있을 때,

빛이 다른 꼭지점에 들어갈 수 없는 θ의 조건은? ($0° < θ < 60°$)



한 변의 길이가 2a인 정 △을 xy평면에 대칭시켜 무한히 전개한다.

위에서 빨간 점선이 꼭지점에서 출발해 어떤 꼭지점에 들어가는 빛이므로

기울기 $\tan\theta = \dfrac{m\sqrt{3}a}{na} = \dfrac{m}{n}\sqrt{3}$ 이다.

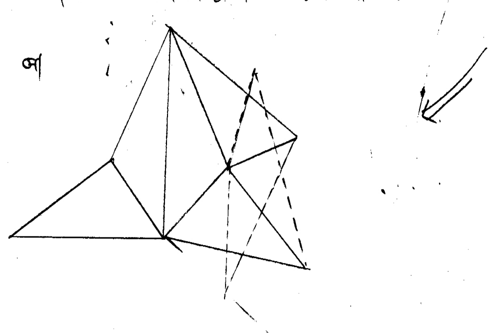
(단 m, n은 $m \ge 0$ $n \ge 1$ $n \ge m$인 정수)

$\therefore$ θ가 $\tan^{-1} \frac{m}{n}\sqrt{3}$을 만족시키면 변에 반사해서 어떤 꼭지점에 도달할 수 있다.

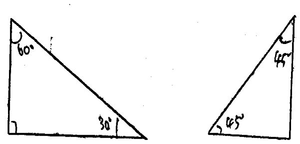
※ 임의의 삼각형에 적용하기 힘든 이유

① x y 평면에 전개 시킬 때 규칙성이 없다. ② 전개시키다보면 겹친다.

예

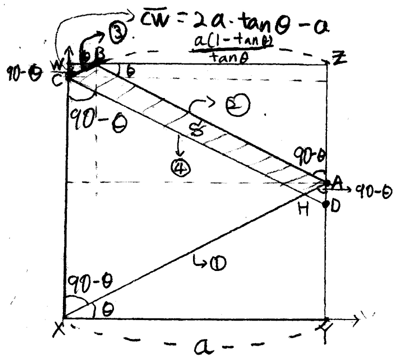


하지만.



와 같은 삼각형은 θ를 정할 수 있다.

<부록 2>



문제 착안 : 당구대에서 당구공의 자취를 생각하다가 이를 빛에 접목시켜 생각하게 됨.

문제 : 정사각형 XYZW의 꼭지점 X에서 빛을 입사시켰을 때, 그 빛이 $\overline{YZ}$, $\overline{ZW}$, $\overline{WX}$에 차례로 반사되어 만들어지는 자취에 의한 넓이 S의 최대값.

한 변의 길이 $= a$

$\frac{1}{2} < \tan\theta < 1$

$\overline{YZ}$, $\overline{ZW}$, $\overline{WX}$를 순서대로 지나야 함.

sol) $\triangle AXY$에서 $\tan\theta = \frac{\overline{AY}}{a}$ $\therefore \overline{AY} = a\cdot\tan\theta$.

$A(a,\ a\tan\theta)$

또 $\triangle AXY \backsim \triangle ABZ$이므로

$\overline{AY} : \overline{AZ} = \overline{XY} : \overline{BZ} \Rightarrow a\cdot\tan\theta : a - a\tan\theta = a : x$

$\therefore x = \frac{a(1-\tan\theta)}{\tan\theta}$

점 B의 좌표는 $\left(a - \frac{a(1-\tan\theta)}{\tan\theta},\ a\right)$

$B\left(\frac{2a\tan\theta - a}{\tan\theta},\ a\right)$

또 $\triangle AZB \backsim \triangle CWB$

$\overline{BZ} : \overline{BW} = \overline{AZ} : \overline{CW} \Rightarrow \frac{a(1-\tan\theta)}{\tan\theta} : \frac{a(2\tan\theta - 1)}{\tan\theta} = a(1-\tan\theta) : x$

$\therefore x = 2a\cdot\tan\theta - a.$

점 C의 좌표는 $(0,\ a-(2a\tan\theta - a))$ $C(0,\ 2a - 2a\tan\theta)$

④식에서 $\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{CD}$가 평행이므로

$\overleftrightarrow{CD} : y = -\tan\theta\cdot x + 2a - 2a\tan\theta$

점 H는 $\overleftrightarrow{AX}$와 $\overleftrightarrow{CD}$의 교점이므로

$\tan\theta\cdot x = -\tan\theta\cdot x + 2a - 2a\tan\theta$에서

$x = \frac{a}{\tan\theta} - a$ $y = a - a\tan\theta$ $\therefore H\left(\frac{a}{\tan\theta} - a,\ a - a\tan\theta\right)$

앞의 계산으로부터 $\triangle AXY$, $\triangle ABZ$, $\triangle CBW$, $\triangle CHX$의 넓이를 구할 수 있다.

$\triangle AXY = \frac{1}{2} \times a \times a\tan\theta = \frac{1}{2}a^2\tan\theta$

$\triangle ABZ = \frac{1}{2} \times (a - a\tan\theta)\left(\frac{a(1-\tan\theta)}{\tan\theta}\right) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta} - 1 + \tan\theta\right)$

$\triangle BCW = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2a\tan\theta - a}{\tan\theta}\right)(2a\tan\theta - a) = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{2\tan\theta - 1}{\tan\theta}\right)(2\tan\theta - 1)$

$\triangle CXH = \frac{1}{2} \times (2a - 2a\tan\theta) \times \left(\frac{a}{\tan\theta} - a\right) = a^2(1-\tan\theta)\left(\frac{1}{\tan\theta} - 1\right)$

$\triangle AXY + \triangle ABZ + \triangle BCW + \triangle CXH = 4a^2\tan\theta + \frac{2a^2}{\tan\theta} - 6a^2$

S가 최대가 되려면 이 값이 최소가 되어야 한다.

a는 고정된 상수값이라 생각할 수 있으므로 $2a^2\left(2\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right) - 6a^2$ 에서 $2\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$이 최소가 될 때, 이 값이 최소가 된다.

$2\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geq 2\sqrt{2\tan\theta \times \frac{1}{\tan\theta}} = 2\sqrt{2}$ 이고, 이 때의 $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} < \tan\theta < 1$인 범위에 들어가기 때문에 성립.

$2a^2\left(2\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right) - 6a^2 \geq (4\sqrt{2} - 6)a^2$

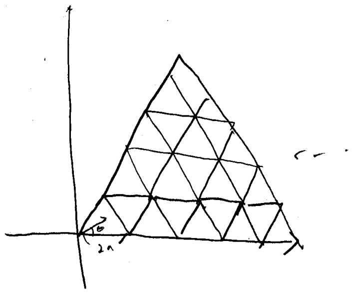
$S = a^2 - (4\sqrt{2} - 6)a^2 = (6 - 4\sqrt{2})a^2$ 이고 이 때의 $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

이 때 $\theta = 35.2643^\circ$

$\therefore$ 결론: $\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $S = (6 - 4\sqrt{2})a^2$로 최대.

<부록 3>

문제) 그렇다면 $\theta\ (0^\circ<\theta<60^\circ)$로 빛을 입사했을 때 꼭지점으로 들어가는 경우에 반사 횟수는 몇 번인가?



위의 그림에서 θ로 입사했을 때 삼각형의 꼭지점과 최초로 만나는 점을 $(ma, n\sqrt{3}a)$라 하면 반사 횟수는 원점과 이 점을 연결한 선분과 삼각형의 변들과의 교점의 개수와 같다. 그 개수는 (기울기가 $\sqrt{3}$인 직선들과의 교점 개수) + (기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선들과의 교점 개수) + (기울기가 0인 직선들과의 교점 개수) 이다.

기울기가 $\sqrt{3}$인 직선들과의 교점개수는 $(ma, n\sqrt{3}a)$를 지나면서 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 x절편이 t라 하면 교점개수는 $\frac{t-2a}{2a}$

같은 방법으로 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선들과의 교점 개수는 $(ma, n\sqrt{3}a)$를 지나면서 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선의 x절편을 s라 하면 교점개수는 $\frac{s-2a}{2a}$이다.

(기울기가 0인 직선과의 교점은 $(ma, n\sqrt{3}a)$에서 $n-1$개

$\therefore$ 반사 횟수는 $\frac{t-2a}{2a}+\frac{s-2a}{2a}+n-1=\frac{t+s}{2a}+n-3$

예) $\tan\theta=\frac{3}{7}\sqrt{3}$인 θ로 입사하면 최초로 만나는 점의 좌표는 $(14a, 6\sqrt{3}a)$이다. 이 점을 지나면서 기울기가 $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$인 직선은 각각 $y=\sqrt{3}x-8\sqrt{3}a$, $y=-\sqrt{3}x+20\sqrt{3}a$, x절편이 각각 $8a$, $20a$이다. 따라서 교점의 개수는 $\left(\frac{8a}{2a}-1\right)+\left(\frac{20}{2a}a-1\right)+(6-1)$

$=17$개

$\therefore$ 반사 횟수는 17번