韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 05. 제 49권, 제 2호, 161-174.
J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2010, Vol. 49, No. 2, 161-174.

행렬의 명제 문제에 대한 오류 분석 및 교정 지도 방안에 관한 연구

김 혜 진 (둔촌고등학교)
김 원 경 (한국교원대학교)†

Ⅰ. 서 론

행렬은 복잡한 식을 간결하게 표현하여 실생활의 여러 가지 문제를 쉽게 해결하여 주고, 수학적 개념을 내적으로 연결시켜 주기 때문에 자연과학 및 사회과학에서 많이 응용되고 있다(신경희, 2004).

학생들은 고등학교 2학년 수학 I의 1단원에서 처음으로 행렬을 배운다. 그러나 학생들은 실수 체계와는 다른 행렬의 대수적 성질 때문에 행렬에 관한 명제 증명에서 많은 오류를 범한다. 예를 들어, 행렬 대수에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않고, 두 행렬이 모두 영행렬이 아니어도 그 곱이 영행렬이 되는 경우가 있는데 이와 같이 실수와 다른 연산 체계를 가진 행렬의 성질을 학생들이 새로운 기호를 사용해서 증명하는 것은 결코 쉬운 일은 아니다.

수학은 증명과 반례로 이루어진다(우정호, 2000). 수학을 배우는 주요 목적 중의 하나는 발견의 논리인 귀납과 유추에 의한 개연적 추론 능력과 함께 정당화의 논리인 연역적 추론 능력, 엄밀한 논리적 사고 능력을 함양하는 것으로 이것은 증명과 반례를 통하여 이루어 질 수 있다. 그러나 행렬 단원의 학교 수업에서는 단지 행렬 계산 문제 풀기에만 치중하고, 수학의 생명이라고 할 수 있는 성질이나 정리의 증명에 대해서는 그 결과만 간단하게 다루고 있다(김한나, 2005). 이에 따라 학생들은 그다지 복잡하지 않은 참・거짓 증명 문제라 할지라도 또, 조금만 생각해보면 쉽게 찾아낼 수 있는 반례의 경우에도 직관적으로 사고하려는 경향 때문에 많은 오류를 범한다(조미정, 2003).

학생들이 지식을 습득하는 과정에서 불가피하게 발생하는 오류나 오개념은 학생들이 지식을 어떻게 이해하고 구성하는지에 대한 가치 있는 정보를 제공해 준다(이종희・김부미, 2006). Clayton(1990)은 유능하고 성공적인 수학 교사가 되기 위해서는 학생들의 특성과 가르쳐야 할 수학의 구조를 알아야 할 뿐만 아니라 학생들의 오류에 대한 지식을 갖추어야 한다고 말하고 있다. 따라서 교사들은 학생들이 어떤 오개념과 오류를 갖고 있으며 그 인지적 원인과 사고 과정은 무엇이며 교정은 어떻게 해야 하는지를 파악하여 교수계획을 수립하고 학생들에게 적절한 피드백을 할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 고등학교 수학Ⅰ의 행렬 단원에서 참・거짓 증명 문제의 해결 과정에서 나타나는 오류를 분석하고 그 교정 방안을 탐색하기 위하여 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

(1) 행렬 단원에서 참・거짓 증명 문제의 해결 과정에서 나타나는 오류의 유형과 특징은 무엇인가?

(2) 오류를 교정할 수 있는 지도 방안은 무엇인가?

Ⅱ. 연구 배경

1. 수학적 오류

오류의 사전적 정의는 '사고 내용과 대상이 일치하지 않는 사유(思惟) 판단' 이다. 인간의 일반적 성향 중의 하나가 자신의 이론적 신념에 잘 맞는 사례나 증거는 잘 받아들이고 위배될 때는 이를 무시하며, 두 가지가 동시에 제시될 때는 자신의 이론적 신념에 맞는 것만을 선택하기 때문에 오류가 발생한다고 한다. 또한 변칙 사례를

* 접수일(2010년 1월 8일), 수정일(2010년 4월 8일), 게재확정일 (2010년 5월 7일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 행렬, 오류분석, 교정방안
† 교신저자

이론에 갈등이 되는 증거로 생각하기보다는 특별한 경우 또는 예외적 현상으로 생각하여 자신의 이론으로 해석하기 때문에 자신이 가지고 있는 오류에 대하여 모순을 느끼지 않고 고수하려고 한다(Hashweh, 1988).

수학 학습에서 오류는 오개념, 선입관, 판단력 및 사고력 부족, 집중력 부족, 계산력 부족 등으로 발생하는데 이 중에서도 오개념은 학생들이 새로운 지식을 받아들이거나 기존 개념을 확장하여 적용할 때 장애가 되기 때문에 매우 중요하게 다루어져야 한다(이종희 · 김부미, 2006). 오개념의 형성 원인은 크게 인식론적 원인과 교수학적 원인으로 나눌 수 있고, 인식론적 원인은 다시 지각적 특성과 논리적 추론 특성에 의한 원인으로 나눌 수 있다(최지선, 2003).

먼저 지각적 특성에 의한 수학적 오개념의 형성 원인을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 수학적인 사고보다 지각 우위적인 사고를 하면 오개념이 형성된다. 학생들이 삼각형, 원 등의 정의를 잘못 이해하는 것은 그 개념에 대한 지각이 있기 때문이다(Fischbein, 1999).

(2) 실제적 경험에 의한 직관적 사고가 오개념을 형성한다. 학생들이 무한 개념과 극한 개념을 이해하기 어려운 것은 실세계에서의 경험이 무한이 아니라 유한이기 때문이다(박선화, 1998).

(3) 수학적 대상의 존재에 대한 인식 부족이 오개념을 형성한다. 수학적 실체의 존재와 성질은 형식적으로 부과된 것이기 때문에 수학적 대상에 대한 존재 관념이 바뀌지 않으면 개념을 이해하기 어렵다(Fischbein, 1999).

(4) 수학적 용어를 일상용어의 의미로 해석하면 오개념이 형성된다. 유리수와 무리수에서 유(有)와 무(無)의 의미가 개념 형성에 많은 영향을 준다(김효영, 2007).

다음으로 논리 추론적 특성에 의한 수학적 오개념의 형성 원인을 살펴보면 다음과 같다.

(1) 논리적 조작 능력의 미숙이 오개념을 형성한다. Piaget의 인지발달 이론에 의하면 일반적으로 수학적 개념은 형식적 조작 단계에 이르러야 이해가 가능한데 이 단계에 이르지 못하면 오개념이 형성될 수 있다.

(2) 인과적 사고가 오개념을 형성한다. 학생들은 모든 사건을 원인과 결과의 관점에서 추론하는 경향을 갖고 있는데 이와 같은 사고는 오개념을 형성할 수 있다(Dubinsky & Harel, 1992).

(3) 일반화 과정이 오개념을 형성한다. 수학에서의 많은 오류는 한 체계에서 성립하는 법칙을 보다 넓은 체계에서도 확대 적용하는 시도에서 발생한다(Hibert & Carpenter, 1992).

(4) 유추적 사고가 오개념을 형성한다. 두 체계 사이에 수학적 구조를 대응시키는 과정에서 유추는 오개념을 형성할 수 있다(이종희 · 김윤영 · 김선희 · 김부미 · 김기연, 2002).

(5) 근접 원리에 의한 개념 형성이 오개념을 형성한다. 학생들은 개념을 형성할 때, 근접원리에 따라 관념간에 연관을 지우려는 경향이 있는데 이 과정에서 오개념이 형성된다.

한편, 교수학적 원인에 의한 수학적 오개념의 형성 원인을 살펴보면 다음과 같다(최지선, 2003).

(1) 교사의 오개념이 학생들의 오개념을 야기시킨다. 교사가 학생들에게 수학적 개념을 명확하게 가르치지 않으면 학생들은 스스로의 인지능력 범위 내에서 이해하기 때문에 오개념이 형성된다.

(2) 제한된 학습 경험은 더 넓은 문맥에서 오개념을 초래한다. 학습한 내용 보다 더 심화된 내용을 다룰 때 오개념은 형성된다.

(3) 교과과정에 제시된 학습 순서가 지식의 구획화를 초래하여 오개념을 형성시킨다.

오개념은 학생들이 어느 한 개념의 이해에서 성공적이었던 오래된 지식, 앎의 방식과 관련되어 있다 또, 오개념은 학생들이 새로운 수학적 개념을 학습하기 이전에 나름의 일상적 경험이나 학습 경험에 체계적으로 결합되어 있고, 조직적으로 잘 정돈되어 있어 일단 형성되면 새로운 상황에서 부적절해지더라도 쉽게 바뀌지 않고 그대로 존속되는 경향이 있다(Radatz, 1979). 그러므로 오개념을 제거한다는 것은 쉬운 일이 아니며 학습은 오개념을 제거하는 과정이라기 보다는 이미 형성되어 있는 개념을 새로운 상황에 적합하도록 변환시키는 과정이라고 보는 것이 타당하다(Brousseau, 1997). 따라서 교사들

은 오개념을 새로운 수학적 지식의 구성에 걸림돌이 아니라 더 확장된 개념을 이해하기 위한 과정으로 보고 적절한 안내에 따라 학생 스스로가 자기 반성적 사고를 통해 오류를 개선 할 수 있도록 도움을 주어야 할 것이다.

2. 오류의 유형

학생들이 학습과정에서 범하는 오류 및 오개념의 유형은 학습 내용과 수준에 따라 다르게 나타난다.

Babbit(1990)은 초등학교 5~6학년을 대상으로 문장제 문제 해결 과정에서 나타난 오류 유형을 다음과 같은 4가지로 분류하였다.

(1) 계산오류 : 문제 해결과정에서 가장 빈번하게 나타나는 오류로써 5~6학년 학생들은 세 자리 빼셈, 세 자릿수 곱하기 두 자릿수, 네 자릿수 나누기 두 자릿수 계산에서 많은 오류를 범한다.

(2) 연산 오류 : 문제 해결과정에서 두 번째로 많이 나타나는 오류로써 5~6학년학생들은 역 연산, 단순 연산, 임의 선택, 그리고 미숙련된 전략 사용의 오류를 범한다. 특히, 학생들은 곱셈과 나눗셈 문장제 문장에서 연산의 부정확한 선택 때문에 많은 오류를 범한다.

(3) 잡다한 오류 : 정보의 사용, 언어 이해의 잘못 등 여러 가지 잡다한 오류를 포함한다.

(4) 풀이를 시도하지 않은 오류 : 문제 풀이 자체를 시도하지 않은 오류로써 이것은 문제를 읽는 학생의 능력, 복잡한 계산이나 연산의 불확실성으로 인한 회피, 문제를 푸는 시간의 부족 때문이다.

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar(1987)는 고등학교 학생들이 수학 졸업시험에서 반복적으로 보인 오류를 다음과 같은 6가지 유형으로 분류하였다.

(1) 문제의 조건 및 자료를 오용하는 오류 : 문제에 주어진 조건 및 자료와 학생들이 실제 사용한 조건 및 자료가 서로 일치하지 않아서 일어나는 오류를 말한다.

(2) 문제 내용을 잘못 1이해하는 오류 : 문제에서 의도 한 대로 해석하지 않고 잘못 이해하여 발생하는 오류를 말한다.

(3) 논리적으로 부적절한 추론에 의한 오류 : 풀이 중간 과정에서 잘못된 추론을 하거나 논리의 비약이 있거나 더 이상 진전을 못하는 오류를 말한다.

(4) 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류 : 수학적 원리, 규칙, 정리, 정의를 왜곡하거나 잘못 사용한 오류를 말한다.

(5) 논증되지 않은 해답 : 이 오류는 풀이의 각 수행 단계는 옳지만 제시된 최종 결과가 요구하는 해가 아닌 오류를 말한다.

(6) 기술적인 오류 : 계산 오류, 기본적인 대수 부호의 조작에서의 오류, 숙달되지 못한 알고리즘의 실행 등의 오류를 말한다.

이와 같은 연구에 터하여 국내에서도 많은 오류 분석 연구가 학교 급별 및 내용 영역별로 이루어졌다. 이를테면 고등학교 학생을 대상으로 한 연구로는 고등학교 수학 문제 해결 과정에서 발생하는 오류 분류(김옥경, 1990), 이차방정식과 부등식의 문제 해결 과정에서 나타난 오류 분석 및 교정(우현철, 2000), 조합수학에 대한 오류 분석(김중환, 2003), 명제 단원 문제 해결 과정에서 발생하는 오류 분석 및 교정(임지혜, 2008) 등이 있고, 중학생을 대상으로 한 연구로는 기하증명 과정에서 나타나는 오류 분석(류성림, 1993), 함수 영역에서 나타나는 오류 분석 및 교정(오정현, 1996), 일차 방정식의 문장제 문제 해결 과정에서 나타나는 오류 분석 및 교정(이정은・김원경, 1999), 무리수의 개념과 성질 및 계산과정에서 나타나는 오류 분석(김효영, 2007) 등이 있다. 특히, 김옥경(1990)은 고등학교 수학의 전 영역(확률과 통계 영역 제외)에서 발생하는 오류를 분석하여 Movshovitz-Hadar, et. al.(1987)의 오류 유형에 풀이과정의 생략 오류와 애매모호한 오류를 추가하고, 가장 많이 발생하는 오류가 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류, 오용 오류, 문제 이해의 오류 순으로 나타난다고 하였다. 오정현(1995)은 중학교 함수 영역에서 발생하는 오류를 분석하여 정리나 정의를 부적절하게 사용하는 오류 대신에 필수적인 사실・개념의 부족한 숙련 오류를 넣고, 가장 많이 발생하는 오류가 필수적인 사실・개념의 부족한 숙련과 기술적인 미숙에서 오는 오류이므로 교사는 함수 단원을 지도할 때 구체적 상황으로 학습 동기를 유발시켜 개념의 이해를 돕고, 그래프나 식과 함께 언어나 기호를 사용한 형식적 정의를 함으로써 기술적 오류를 최소화해야 한다고 하였다. 이정은・김원경(1999)

은 중학생들의 일차방정식 문장제 문제 해결 과정에서의 오류를 분석하여 가장 많이 발생하는 오류가 적절하지 않은 식 세우기 오류임을 보이고, 다이어그램, 예상과 확인 등의 전략과 다양한 스키마 구성을 이용한 학습지도 방안이 문장제 문제 해결력을 향상시킬 수 있는 교수 학습 방안임을 밝혔다.

그러나 지금까지 많은 오류 분석에 관한 연구에도 불구하고 행렬의 명제 문제에 대하여는 그 연구가 미흡하여 본 연구에서는 행렬의 명제 문제 증명 과정에서 학생들이 범하는 오류의 유형과 특징을 분석하고, 오류를 교정할 수 있는 지도 방안을 탐색해 보고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 오류 검사지

본 연구에서는 먼저 연구문제 1 (행렬의 참 · 거짓 증명 문제에 대하여 학생들이 범하는 오류의 유형과 특징 분석)을 해결하기 위하여 교과서 및 참고 도서를 활용하여 행렬의 증명 문제를 현장교사와 전문가의 협의를 거쳐 제작하였다. 제작된 검사지의 난이도, 문항수와 시간의 적절성, 응답률, 오류의 유형 등에 대한 타당도와 난이도를 검증하기 위하여 학력 수준이 서울시의 중위권인 B고등학교 2학년 자연계 1개 반 35명을 대상으로 예비검사를 실시하였다. 예비 검사의 결과, 문항 수를 12개에서 10개로 줄이고 응답률이 30% 미만인 문항 2개의 난이도를 수학교사의 협의 하에 조정하였다.

예비 검사를 통해 수정 · 보완된 오류 검사지는 총 10개의 문항으로 구성되었으며 그 내용은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 문항 1~6번은 실수 체계와 다른 행렬의 대수적 성질을 제대로 이해하고 사용하고 있는지 행렬의 연산에 대한 간단한 대수적 증명을 제대로 수행할 수 있는지를 알아보기 위한 것이다. 문항 7~10번은 역행렬의 존재 유무에 관한 증명 문제로서 실수와는 달리 행렬에서는 역행렬이 항상 존재하는 것이 아님을 이해하고 존재 조건을 잘 이용할 수 있는지를 알아보기 위한 것이다.

<표 Ⅲ-1> 오류 검사지의 문항 내용

구분	번호	내용
행렬의 성질과 연산	1	행렬의 곱셈에 대한 교환법칙의 성립 유무 증명하기
	2	행렬의 대수적 연산 성질 증명하기
	3	거듭제곱에 관하여 거짓인 명제에 대한 반례 찾기
	4	주어진 조건에서 거듭제곱의 대수 연산 증명하기
	5	주어진 조건에서 교환법칙의 성립 유무 증명하기
	6	주어진 조건에서 행렬의 곱셈법칙 증명하기
역행렬의 성질과 연산	7	두 행렬의 역행렬이 각각 존재할 때, 그 합의 역행렬도 존재하는지 증명하기
	8	두 행렬의 곱의 역행렬이 존재할 때, 각각의 역행렬도 존재하는지 증명하기
	9	두 행렬의 곱이 영행렬일 때, 어떤 행렬의 제곱의 역행렬이 존재할 때 그 행렬의 역행렬도 존재하는지 증명하기
	10	주어진 조건을 만족하는 역행렬의 존재 유무 증명하기

2. 연구의 대상

본 연구의 대상은 서울시에서 학력 수준이 중위권인 D 인문계고등학교 2학년 자연 반 2개 학급 총 87명으로 선정하였다. 이 학생들의 대부분은 행렬 단원을 처음으로 학습하였으며 사회 · 경제적으로 중위권의 가정에 속한다고 할 수 있다. 이 학생들에게 방과 후 학교 수업시간에 오류 검사지를 투입하였다.

3. 오류 교정을 위한 실험 수업

본 연구에서는 연구문제 2 (오류를 교정하기 위한 지도 방안 탐색)를 해결하기 위해서 연구 대상 학생 중 5명을 선정하여 3차시의 교정 수업을 하였다.

교정 수업 대상자는 학습 수준이 중하위인 학생들의 오류는 대부분 사전 지식의 부족이나 학습량의 부족으로 판단됨에 따라 오류검사 결과 학습 수준이 중상위 30%의 학생들 중에서 오류를 많이 보이고 수업에 참여하기를 희망하는 학생 5명으로 선정하였다. 교정 수업 대상 학생 5명의 특성은 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 교정 수업 대상 학생의 주요 오류 내용

학생	주요 오류 내용	문항
갑	역행렬의 존재 조건이 없는데도 역행렬이 존재하는 것으로 생각	4, 5
을	행렬의 기본 성질에 대한 이해 부족, 실수체계에서 성립하는 곱셈공식을 행렬에서도 그대로 적용	1, 6, 9
병	행렬의 기본 성질에 대한 이해 부족, 역행렬의 존재 유무를 잘 못 판단	2, 3, 9
정	논리적 추론 부족	3, 4, 5
무	논리적 추론 부족, 기존 정리의 역을 잘 못 사용	7, 8, 10

교정 수업에서는 학생들이 증명 과정에서 나타난 오류의 사고 과정을 되짚고, 논리 추론 과정을 파악하여 교사의 안내에 따른 학생들의 반성적 사고와 인지적 사고 활동을 유도하였다. 특히, 자신이 범한 오류를 스스로 인지하도록 하였고, 그로부터 다른 오류도 가급적 스스로 교정하도록 하였다. 또, 논리적 추론 이 잘 안 되는 경우에는 힌트를 줘서 사고할 수 있도록 하였다. 교정 수업은 집단 방식으로 이루어졌고, 외부의 간섭을 배제하기 위해 빈 교실을 사용하였으며 모든 내용은 녹취되어 전사되었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 오류의 유형 설정

학생들이 문제를 해결하는 데 있어서 보이는 오류의 유형은 학습자가 가지고 있는 수학적 오개념, 문제해결 전략의 부족, 미숙련 등의 방증이기 때문에 문제의 특성마다 다르게 나타난다.

본 연구에서는 행렬의 참·거짓 증명 문제에 대한 오류 검사지를 분석한 결과, Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, and Inbar(1987)의 오류 분류 모형과 김옥경(1991)의 오류 분류 모형을 바탕으로 하여 <표 Ⅳ-1>과 같은 5가지 유형으로 분류하였다.

<표 Ⅳ-1> 오류 유형 분류

구분	유형	내용
A	조건 이용의 오류	문제에서 주어진 조건을 사용하지 않거나 없는 조건을 사용한 경우 또는 조건의 일부만을 사용하여 발생하는 오류
B	개념·성질의 이해 부족의 오류	행렬의 개념, 성질, 법칙 등의 이해와 숙련이 부족하여 발생하는 오류
C	부적절한 논리 추론의 오류	논리적으로 부적절한 추론, 논리의 비약으로 생기는 오류 또는 거짓 명제인 경우 적합한 반례를 찾지 못해 발생하는 오류
D	기술적인 오류	문제를 푸는 과정에서 연산을 잘 못 사용하거나 계산 과정에서 발생하는 오류
E	애매모호한 오류	학생들이 제시한 답의 의도를 정확히 알 수 없는 경우, 문제와 전혀 동떨어지게 풀이한 경우

2. 오류의 유형 분석

본 연구에서는 연구대상 학생 87명의 오류 검사지에서 나타난 오류를 모두 분석하여 위의 5가지 유형으로 분류하였다. 이 때, 행렬의 명제 문제를 정확하게 증명한 경우, 무응답한 경우, 답만을 제시한 경우는 오류 분석의 대상에서 제외하였다. 또 같은 문제의 풀이 과정에서 연속하여 오류가 발생한 경우에는 단순성을 위하여 첫 번째 오류만 분석하였고, 선행 오류에 기인하는 다음 단계의 오류는 고려하지 않았다. 오류의 유형 분석 결과는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

이 표에서 알 수 있듯이 가장 많이 나타난 오류의 유형은 차례로 행렬의 개념·성질의 이해 부족으로 인한 오류(35.3%), 부적절한 논리 추론의 오류(27.4%), 조건 이용의 오류(18.7%) 순이었다. 이것은 많은 학생들이 행렬이라는 새로운 개념과 성질에 대한 이해가 부족하고, 증명과정에서 논리적으로 추론하는 능력이 부족함을 시

사하는 것이다.

<표 Ⅳ-2> 유형별 오류 빈도표

오류 유형	빈도	백분율(%)
A	45	18.7
B	85	35.3
C	66	27.4
D	21	8.7
E	24	9.9
총계	241	100

한편, 학생들이 보인 오류를 각 문항별로 오류의 개수, 오류의 유형, 오류의 내용을 분석한 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3>에서 알 수 있듯이 학생들은 그동안 익숙하게 사용했던 실수 체계에서의 성질을 행렬 체계에서도 그대로 적용하여 오류를 범하는 경우가 가장 많았다. 특히, 실수에서 성립하는 곱셈 공식의 적용, 영행렬에 대한 오개념, 행렬에 루트를 사용하는 오류, 행렬과 실수는 덧셈, 뺄셈이 불가능함에도 '$A-1$' 등의 표현을 하는 기술적인 오류를 범한 학생들도 상당 수 있었다. 또한, 많은 학생들이 증명에 대한 기초 학습 능력이 부족함을 알 수 있었다. 예를 들어, 참인 명제를 증명하는 과정에서 참이 되는 특수한 예를 들어 참이라고 증명하는 경우, 거짓임을 증명하는 과정에서 반례를 찾지 못해 엉뚱한 결론을 내리는 경우, 논리 전개가 미흡하여 증명과정에서 더 이상 진전하지 못하는 경우, 케일리-해밀턴 정리의 역은 성립하지 않음에도 불구하고 그 역이 당연히 성립하는 것으로 생각하여 증명을 하는 경우 등이 있었다.

3. 오류의 교정 과정

본 연구의 교정 수업에서는 학생들이 보인 각 오류의 사고 과정과 논리 추론 과정을 살펴보고, 그에 대하여 적절하다고 생각되는 지도 방법을 교사의 안내를 통하여 반성적 사고와 인지적 활동을 유도하여 오류를 교정하였다.

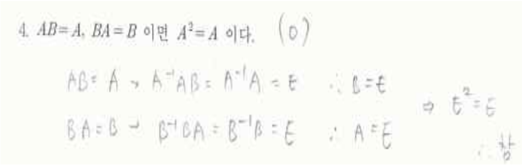
다음 <발췌문 1>은 학생 갑이 문항 4번에서 범한 오류를 교정하는 과정이다.

<발췌문 1> 학생 갑의 오류 교정 과정

교사 : (학생 갑의 문항 4번 증명을 보여주면서.) 네가 푼 것을 잘 보렴. 뭐가 문제일까? 주어진 조건이 무엇이지?

<표 Ⅳ-3> 문항별 오류

문항 번호	오류 개수	주요 오류 유형 (%)	주요 오류 내용
6	41	A(53.1), B(34.4)	주어진 조건을 이용하지 않고 실수 체계에서 성립하는 곱셈공식을 행렬에 그대로 적용
4	40	A(50), B(35), C(7.5)	역행렬의 존재 유무를 확인하지 않은 채 당연히 역행렬이 존재한다고 생각하고 양변에 역행렬을 곱함, 증명과정에서 더 이상 진전시키지 못함
5	32	A(7.5), B(77.5)	역행렬의 존재 유무를 확인하지 않은 채 양변에 역행렬을 곱함. 실수 체계에서 성립하는 곱셈공식을 행렬에 그대로 적용
1	24	C(54.2), B(12.5)	주어진 조건을 이용하지 않고 실수체계에서 성립하는 곱셈 공식을 행렬에 그대로 적용
2	22	B(36.4), E(27.4)	$x^2=1$, $x^3=1$의 방정식을 푸는 것과 같이 실수 체계에서와 같이 생각하여 해결
3	18	C(38.9), B(22.2)	$-E$ 라고 하는 쉬운 반례를 찾지 못하고 어렵게 증명, 실수 체계처럼 생각해서 해결
7	17	C(52.9), D(35.3)	$A+B$의 역행렬 $(A+B)^{-1}$을 $A^{-1}+B^{-1}$으로 생각.
8	16	C(68.7), B(12.5)	단순히 예를 들어 참임을 증명.
9	16	B(68.8), C(18.7)	실수 체계에서 성립하는 곱셈공식을 행렬에 그대로 적용
10	15	C(66.7), D(33.3)	케일리-해밀턴 정리의 역이 성립한다고 생각하고 증명.


4. $AB=A$, $BA=B$ 이면 $A^2=A$ 이다. (O)

$AB=A \rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}A=E$ ∴ $B=E$

$BA=B \rightarrow B^{-1}BA=B^{-1}B=E$ ∴ $A=E$

$\Rightarrow E^2=E$ ∴ 참

(조건 이용의 오류)

학생 갑 : $AB=A$, $BA=B$ 요.

교사 : 주어진 조건에서 $A^2=A$을 증명할 때, 어떻게 했지?

학생 갑 : 양변에 A와 B의 역행렬을 곱해서 증명했는데요..

교사 : 그래도 될까? 아무 상관없나? 모든 행렬은 역행렬이 존재하니?

학생 갑 : 아니요..

교사 : 역행렬이 존재한다는 가정이 없으면 역행렬이 존재하지 않을 수도 있으니까 함부로 역행렬을 곱하면 안 되. **(교사의 안내)**

학생 갑 : 그럼 5번 문항도 잘못 풀었어요. **(오류 인지)**

교사 : 그래 4번, 5번 모두 잘못된 방법으로 풀이한 거야. 그럼 어떻게 증명해야 할까? 역행렬을 이용할 수는 없을 것 같은데..

학생 갑 : 음.... 조건 $AB=A$와 $BA=B$를 모두 이용하면 될 것 같은데.. **(자기 반성적 사고)**

교사 : 그래.. 그러니까 $A^2=AA$의 우변에 위의 조건을 이용해서 결론을 이끌어야 하겠지? **(교사의 안내)**

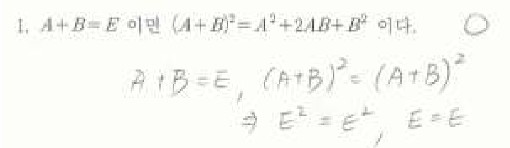
학생 갑 : (A 대신에 AB를 대입한 후 다시 BA 대신에 B를 대입하여 결론을 유도한다.) 네. 나왔어요.. 이게 맞는 거 같아요. **(오류 교정)**

학생 갑은 4번 문항과 5번 문항에서 역행렬이 존재한다는 조건이 없는데도 무심코 역행렬이 존재한다고 생각하고 해결하였다. 즉 없는 조건을 사용하여 증명을 하였는데 이것은 증명의 기본을 생각하지 못하고 즉흥적으로 판단했기 때문인 것으로 풀이된다. 이와 같은 경우에 연구자는 직관적 사고를 배제하고 주어진 조건과 행렬의 기본 성질 및 연산만으로 결론을 유도하도록 안내를 하였더니 학생 스스로 결론을 이끌어 낼 수 있었다. 따라서 행렬 명제의 증명 문제에서는 주어진 모든 조건만을 이용하여 행렬의 기본 성질과 연산 법칙으로 결론을 유도하는 것을 강조하여 지도하는 것이 필요하다.

다음 <발췌문 2>는 학생 을이 문항 1, 6번에서 범한 오류를 교정하는 과정이다.

<발췌문 2> 학생 을의 오류 교정 과정

교사 : (학생 을의 문항 1번의 증명을 보여주면서..) 주어진 조건은 무엇이지?


1. $A+B=E$ 이면 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 이다. ○

$A+B=E$, $(A+B)^2=(A+B)^2$

$\Rightarrow E^2=E^2$, $E=E$

(행렬의 기본 성질・개념의 부족으로 인한 오류)

학생 을 : $A+B=E$.

교사 : 주어진 조건을 잘 사용했니?

학생 을 : 네.. 주어진 조건을 사용했더니 양변이 모두 단위행렬이 되어서 참이라고 결론지었는데요

교사 : $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 이 행렬에서 항상 성립하니?

학생 을 : 음... 아닌가요? **(오류 인지)**

교사 : 그래. 행렬에서는 항상 성립하는 곱셈공식이 아냐.

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)$$
$$=A^2+AB+BA+B^2$$

은 성립하니?

학생 을 : 성립해요

교사 : 그럼 이 공식에서 어떤 조건을 만족하면 위의 공식이 성립할까? **(교사의 안내)**

학생 을 : $AB=BA$요. **(자기 반성적 사고)**

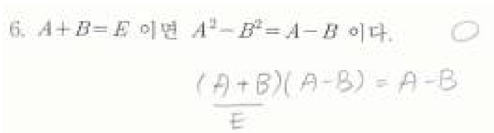
교사 : 그래. 그것만 보이면 돼. 어떻게 보이지?

학생 을 : 음... $B=E-A$을 대입해서 전개해 볼께요. **(인지적 사고 활동)**

교사 : 그래 해보렴..

학생 을 : (AB에서 B 대신에 $E-A$를 대입하여 전개하고, BA에서 B대신에 $E-A$를 대입하여 전개한다.) 네. $AB=BA$가 나와요.. **(오류 교정)**

교사 : 그럼 다른 문제는 어떠니? 이런 오류를 또 범한 건 없니? (6번 풀이를 보여주면서..)


6. $A+B=E$ 이면 $A^2-B^2=A-B$ 이다. ○

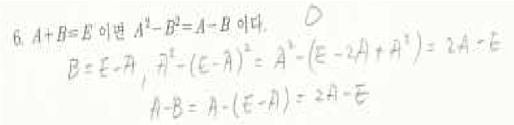
$\underbrace{(A+B)}_{E}(A-B)=A-B$

(행렬의 기본 성질・개념의 부족으로 인한 오류)

학생 을 : 6번도 잘못된 듯... 단순한 문제가 아닌 것 같아요. 이것도 $B=E-A$라고 해야 될 것 같아요. **(오류 인지 및 자기 반성적 사고)**

교사 : 그래. 해보렴~

학생 을 :



(오류 교정)

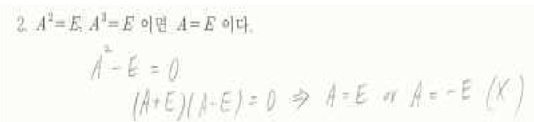
학생 을은 문항 1번과 6번에서 실수체계에서 성립하는 곱셈공식을 행렬에서도 그대로 성립하는 것으로 생각하여 오류를 범하였다. 이것은 실수의 곱셈공식에 대한 지각 우위적 사고가 작용하기 때문인 것으로 해석된다. 이와 같은 경우에 연구자는 이 학생에게 증명 과정에서 결론적으로 무엇을 보여야 할지를 생각하게 하고 어떻게 하면 그 결론에 도달할 수 있을까를 생각한 후 증명을 하는 분석법을 이용한 결과, 결론에 도달하기 위해 성립해야 할 조건($AB=BA$)을 찾을 수 있었고, 학생 스스로가 두 문항 모두 교정할 수 있었다.

분석법은 명제 문제의 증명과정에서 매우 유용한 해결 방법이므로 교사는 행렬의 증명 문제에서도 분석법을 강조하여 지도하는 것이 필요하다.

다음 <발췌문 3>은 학생 병이 문항 2, 3번에서 범한 오류를 교정하는 과정이다.

<발췌문 3> 학생 병의 오류 교정 과정

교사: (학생 병의 문항 2의 증명을 보여주면서) 증명 과정에서 두 부분이 틀렸는데 어디 부분이라구 생각하니?



(조건 이용의 오류)

학생 병 : 글쎄요.. 잘 모르겠어요..

교사: 먼저 가정이 무엇이지?

학생 병 : $A^2=E, A^3=E$ 이요.

교사 : 그런데 두 조건을 모두 사용했니?

학생 병 : $A^2=E$ 만 사용했어요..아하.. $A^3=E$을 이용하지 않아서 틀린거군요.. **(오류 인지)**

교사 : 그래.. 또 다른 부분은?

학생 병 : ......(대답이 없음)

교사 : 행렬에서 $AB=0$이면 $A=0$, $B=0$ 이 성립하니?

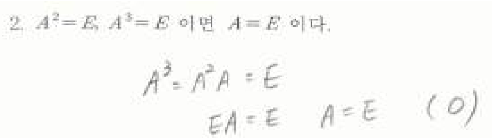
학생 병 : 아닌가요?

교사 : 행렬에서는 성립하지 않아. $A=B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 일 때, $AB=0$ 이야. 그렇지만 $A=B\neq 0$ 이지.. **(교사의 안내)**

학생 병 : 그러면 $(A+E)(A-E)=0 \Rightarrow$ $A=E, A=-E$ 이 틀린건가요? **(오류의 인지)**

교사 : 그래 이제 뭐가 틀렸는지 알았네.. 그럼 바르게 증명해보자. 어떻게 하면 될까?

학생 병 : 지난 번 처럼 두 조건만 이용해서.. $A^3=A^2A$이니까 $A^2=E$ 을 대입해서.. **(반성적 사고 및 인지적 사고 활동)**

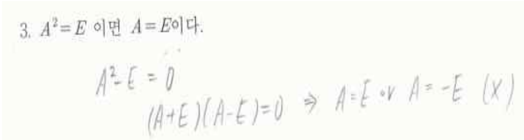


(오류 교정)

교사 : 어때? 어렵니?

학생 병 : 해보니까 어렵지는 않은데 처음에 생각이 안 떠올라서...

교사 : (문항 3번의 증명과정을 보여주면서) 문항 3번은 어때?



(행렬의 기본 성질 · 개념의 부족으로 인한 오류)

학생 병 : 네.. 여기도 틀렸어요. **(오류의 인지)**

교사 : 그럼 다시 증명할 수 있겠니?

학생 병 : 네.. 해 볼게요.. (잠시 후에) 잘 안되요. '$A^2=0$이면 $A=0$이다'가 거짓인 것은 알겠는데.. 이건 좀.. 이것도 거짓 같아요. **(인지적 사고 활동)**

교사 : 거짓이라고 생각되면 반례를 들어주면 되.. 반례는 성립하지 않는 예를 찾아야 하는데 $E, -E$, 또는 -1, 0, 1로 이루어진 간단한 행렬에서 찾을 수 있어.. **(교사의 안내)**

학생 병 : $A=E$이면 성립하니까 $A=-E$ 를 대입해 볼게요. **(자기 반성적 사고)**

3. $A^2=E$ 이면 $A=E$ 이다.

$A^2 = -E \times -E = E$ (X)

학생 병 : 거짓이예요. **(오류 교정)**
교사 : 그래 잘했어.. 어떠니 ? 반례 들기가 어렵니?
학생 병 : E, $-E$ 같은 반례는 쉬운데... 다른 거는 어떨지 모르겠어요....

학생 병은 증명 과정에서 주어진 조건의 일부만 사용하고 실수체계에서 성립하는 곱셈공식을 그대로 적용하는 오류를 보였고 또, 행렬의 기본 성질·개념의 부족으로 인한 오류를 다시 증명하는 과정에서 반례를 찾지 못하였다. 이것은 지각 우위적 사고와 논리적 추론 능력 부족 때문에 발생한 오류로 해석할 수 있다. 많은 학생들이 거짓인 명제에 대하여 반례를 들어 증명하는 방법을 잘 모른다. 이와 같은 경우에 연구자는 E, $-E$, 또는 -1, 0, 1로 이루어진 간단한 행렬에서 반례를 찾도록 안내함으로써 학생 스스로가 증명을 완성할 수 있도록 하였다. 따라서 교사는 거짓인 명제에 대해서는 반례를 찾는 것이 증명 방법임을 이해시키고, 반례는 가급적 간단한 행렬에서 찾을 수 있도록 강조하여 지도하는 것이 필요하다.

다음 <발췌문 4>는 학생 무가 문항 7, 8번에서 범한 오류를 교정하는 과정이다.

<발췌문 4> 학생 무의 오류 교정 과정
교사 : (학생 무의 문항 7의 증명을 보여주면서..) 어떻게 증명한 거니?

7. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

$(A+B)(A+B)^{-1} = (A+B)(A^{-1}+B^{-1})$
$E \neq 2E + BA^{-1} + AB^{-1}$ 거짓

(논리적 추론 능력 부족으로 인한 오류)
학생 무 : 원래 행렬과 그 역행렬을 곱해서 단위행렬이 나와야 하잖아요. 그래서 곱한건데요.
교사 : 곱했더니 $2E+AB^{-1}+BA^{-1}$이 단위행렬이 아니라는 거지?
학생 무 : 네.. **(논리 추론의 미숙)**
교사 : 그런데 $AB^{-1}+BA^{-1}$이 $-E$ 가 안 되는 것을 어떻게 알지?
학생 무 : 이때도 반례를 들어야 하겠네요. 그런데 반례를 찾기가 어려운거 같은데.. **(자기 반성적 사고)**
교사 : 지난 시간에 반례는 먼저 E, $-E$ 등 간단한 행렬에서 찾을 수 있다구 했지?.**(교사의 안내)**
학생 무 : 그럼 $A=-E$, $B=-E$ 를 대입해 볼까요? **(인지적 사고 활동)**
교사 : 그래 해봐..
학생 무 :

7. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

$A=-E \quad B=-E \Rightarrow (-E-E)^{-1} = (-2E)^{-1} = -\frac{1}{2}E$
$A^{-1}+B^{-1} = (-E)^{-1}+(-E)^{-1} = -E-E = -2E$
거짓

(오류 교정)
교사 : 그래 잘했어.. 어떤 생각이 드니?
학생 무 : 네.. 이 경우에는 반례 찾는 것이 쉽네요. 그럼.. 거짓인 명제는 처음부터 반례를 들어야 해요? **(자기 반성적 사고)**
교사 : 그렇지... (학생 무의 문항 8번 증명을 보여주면서..) 이 문제는 어디가 틀린거 같애?

8. AB 의 역행렬이 존재하면 A 와 B 의 역행렬이 모두 존재한다.

$AB(AB)^{-1} = A\underbrace{BB^{-1}}_{E}A^{-1} = \underbrace{AEA^{-1}}_{E} = E \Rightarrow$ O

(논리적 추론 능력 부족으로 인한 오류)
학생 무 : ....틀렸나요?.
교사 : AB의 역행렬을 $(AB)^{-1}$으로 생각한거야?
학생 무 : 네.. 그래서 AB와 곱하니까 E가 나와서요
교사 : 그런데 어떤 행렬에 그 역행렬을 곱하면 항상 E가 나오지 않나?.
학생 무 : 네..
교사 : 그러니까 넌 그 당연한 결과를 보인거지.
학생 무 : 생각해 보니까 그런거 같애요.. 그럼 어떻게 증명해요? (오류 인지)
교사 : 어떤 조건을 만족해야 A의 역행렬이 존재하지?
학생 무 : $ad-bc \neq 0$이요.
교사 : 그래. 맞아... 역행렬이 존재하는지를 보이려면 판별식이 $|A|=ad-bc \neq 0$임을 보여야해. 그러니까 이 문제는 $|AB| \neq 0$이면 $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$ 을 보여야 해. **(교사의 안내)**
학생 무 : 아하.. 알겠어요..$|AB|=|A||B| \neq 0$이니까 $|A| \neq 0, |B| \neq 0$이 되요. **(오류 교정)**

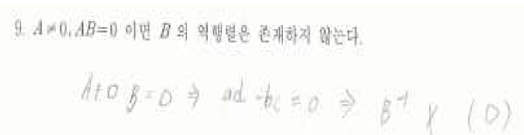
교사 : 바로 그거야. 어때? 쉽지않아?
학생 무 : 네. 쉬운데... 처음에 판별식을 생각하지 못 했어요.

학생 무는 원래의 행렬과 역행렬을 곱하는 과정에서 단순히 단위행렬 모양이 나오지 않아서 거짓이라고 결론을 맺었다. 이 학생은 역행렬임을 증명하는 방법은 알고 있지만 증명이 완성되기도 전에 어떤 행렬과 역행렬이라고 생각되는 행렬을 곱해서 단위행렬 모양이 나오지 않아 무조건 역행렬이 아니라고 생각하였다. 이것은 논리 추론이 완전치 못하다는 것이다. 이와 같은 불완전한 추론의 경우에는 분석법을 통해 성립해야하는 조건이나 반례를 찾도록 지도하여 추론을 완성시킬 수 있도록 하는 것이 필요하다. 또 역행렬의 존재를 증명하는 문제는 먼저 판별식 조건을 만족하는지를 확인해 보도록 지도해야 한다.

다음 <발췌문 5>는 학생 병이 문항 9번에서 범한 오류를 교정하는 과정이다.

<발췌문 5> 학생 병의 오류 교정과정

교사 : (학생 병의 문항 9번의 증명을 보여주면서..) 어디가 틀렸을까?



(행렬의 기본 성질 · 개념의 부족으로 인한 오류)

학생 병 : $AB=0$에서 $B=0$이라고 생각한 것이 틀린 것 같아요.. **(오류 인지)**

교사 : 그래 지난 시간에 했었자나. $AB=0$이면 항상 $A=0$, $B=0$이 아니라구

학생 병 : 네.. 그런데 반례가 어떤 것이 있어요?

교사 : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$일 때, AB를 계산해봐

학생 병 : $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$인데요..

교사 : 그러니까 항상 $B=0$이 아니지?

학생 병 : 아하.. 그렇구나. (자기 반성적 사고)

교사 : A의 역행렬이 존재하는지를 보이려면 무엇을 보여야 한다구 했지?

학생 병 : 판별식이 $|A| \neq 0$ 임을 보여야해요.

교사 : 그러니까 이 문제는 $|AB| \neq 0$ 이고 $A \neq 0$ 이면 $|B|=0$ 임을 보여야 해. (교사의 안내)

학생 병 : 당연히.. .$|AB|=|A||B| \neq 0$이니까 $|A| \neq 0, |B| \neq 0$이 되요.. **(오류 교정)**

교사 : 잘했어.. 근데 다른 방법으로 증명해 보자. 귀류법이라고 배웠지?

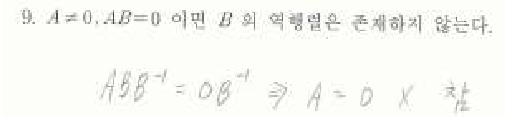
학생 병 : 잘 기억이 안 나요..

교사 : 결론을 부정했을 때 모순이 됨을 보이는 증명방법이지. 이 명제의 결론이 뭐지? 또, 그 부정은 뭐지?

학생 병 : “B의 역행렬이 존재하지 않는다”이니까 “B의 역행렬이 존재한다 ” 이에요.

교사 : B의 역행렬을 B^{-1}이라 하고 가정 $AB=0$을 만족하는지 확인해봐.. **(교사의 안내)**

학생 병 : **(인지적 사고 활동)**



교사: 아주 잘했어.. 귀류법을 이용해 보니까 어떤 생각이 들어?

학생 병 : 이 경우에는 귀류법이 더 쉬운거 같아요.. **(인지적 사고 활동)**

학생 병은 3차시의 교정수업을 통해서 문항 9번에 대한 자신의 증명이 잘 못 되었음을 스스로 인지하였다. 이 때, 연구자는 구체적인 예를 들어서 잘못 된 증명을 확인시켜 줌으로써 학생이 자기 반성적 사고를 할 수 있도록 도와주었다. 또한, 오류를 교정한 후에 또 다른 증명 방법으로써 귀류법에 대한 인지적 사고 활동을 할 수 있도록 도와주었다.

귀류법은 증명의 한 방법으로써 매우 유용하다. 특히, 어떤 행렬의 역행렬이 존재하지 않음을 증명하는 경우에 귀류법을 사용하면 쉽고 간단하게 증명할 수 있다. 그러나 학생들은 증명 문제에서 귀류법을 거의 사용하지 않는다. 따라서 교사는 증명의 한 방법으로 귀류법을 연습시키는 훈련이 필요하다.

Ⅴ. 결 론

행렬은 선형 연립방정식, 벡터 해석, 상관 분석 등 많은 분야에서 문제 해결의 수단으로 활용되고 있다. 그러나 학생들은 실수 체계와는 다른 행렬의 대수적 성질 때

문에 행렬에 관한 명제 증명에서 많은 오류를 범한다. 학습 과정에서 나타나는 오류는 학습의 실패 원인에 대한 의미 있는 정보를 제공해주므로 효과적인 지도를 위해서는 학습자가 보인 다양한 오류에 대한 인지적 원인을 파악하여 교정해 나가야 한다.

본 논문에서는 학생들이 행렬의 참·거짓 증명 문제에서 나타나는 오류의 유형을 분석하고, 오류를 보인 학생들을 대상으로 교정 수업을 통해 그들의 사고를 반성하고 인지적 활동을 유도함으로써 오류를 교정하는 지도 방안을 탐색하였다. 이를 위해 서울특별시 D고등학교를 선정하여 2학년 자연반 2개 학급 총 87명의 학생을 대상으로 오류 유형을 분석한 결과, 학생들이 흔히 범하는 오류의 유형은 행렬의 기본 성질·개념의 부족으로 인한 오류(35.3%), 부적절한 논리 추론으로 인한 오류(27.4%), 조건 이용의 오류(18.7%)의 순으로 나타났다. 특히. 학생들은 실수 체계에서 성립하는 성질을 행렬에서도 그대로 적용하거나 반례를 보여야 하는 거짓 명제를 증명하는 과정에서 많은 오류를 보였다. 또, 역행렬이 존재한다는 조건이 주어지지 않았음에도 불구하고 당연히 역행렬이 존재하는 것으로 생각하여 증명을 하는 오류가 많았다. 이것은 학생들이 수학적인 사고보다는 직관적인 사고나 지각 우위적인 사고를 먼저 하기 때문인 것으로 풀이된다. 따라서 교사는 행렬의 성질과 개념을 충분히 익히게 하고 실수의 성질과 다른 행렬의 성질을 강조하여 지도해야 한다. 또, 행렬의 참·거짓 문제를 증명할 때에는 직관적 사고와 지각 우위적 사고를 배제하고 논리적으로 추론할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

한편, 연구 대상자 중에서 오류를 많이 보인 중상위권 학생 5명을 선정하여 사고 및 논리 추론 과정을 살펴본 결과, 오류를 교정하기 위한 지도 방안은 다음과 같이 나타났다.

첫째, 실수 체계에서 성립하는 곱셈정리, 곱셈의 교환법칙 등이 행렬에서는 적용되지 않을 수도 있다는 것을 강조하고, 항등원, 역원 같은 개념을 명확하게 지도하여야 한다.

둘째, 증명 과정에서 결론적으로 무엇을 보여야 할지를 생각하고 어떻게 하면 그 결론에 도달할 수 있을까를 생각한 후 증명을 하는 분석법을 이용하거나 결론을 부정했을 때 모순임을 보이는 귀류법을 이용하여 증명하는 등 다양한 방법으로 증명할 수 있도록 지도한다.

셋째, 거짓인 명제에 대해서는 반례를 찾아 증명하는 방법을 익히도록 지도한다. 특히, 많은 학생들이 반례를 찾는 것에 어려움을 겪으므로 반례는 E, $-E$, 성분이 -1, 0, 1인 간단한 행렬 중에서 찾을 수 있도록 지도한다.

넷째, 역행렬의 존재 유무를 증명하는 경우에는 판별식 또는 귀류법을 이용하여 증명하도록 지도한다.

중상위권 학생들은 행렬에 대한 기본 성질과 증명에 대한 기초 지식은 알고 있음에도 불구하고 훈련과 연습이 부족하여 증명 문제에서 많은 오류를 범한다. 또 학생들은 스스로 잘 알고 있다고 하는 경우에도 막상 증명을 할 때에는 즉흥적 사고나 직관적 사고로 많은 오류를 범한다. 오류의 특성 중의 하나가 어떤 문제에 직면하였을 때 직관적인 생각이 자기도 모르게 튀어나온다는 점이다. 이 경우 다른 사람이 잘못을 지적해 주면 "아, 내가 착각했다."는 반응을 하지만 그 학생의 인지구조는 그러한 착각을 하도록 구조화 되어 있을 수 있다. 착각도 하나의 인지적 작용의 결과인 것이다. 따라서 교사는 증명 문제를 지도하는 경우에 학생들의 실수나 착각을 그냥 간과할 것이 아니라 증명의 기초와 여러 가지 증명방법 등을 익히게 하고, 학생 스스로 증명과정을 정교화할 수 있도록 반복 연습과 훈련을 시키는 것이 필요하다.

본 연구는 중상위권 학생들이 행렬의 증명 문제에서 범한 오류의 유형과 오류의 교정 방안을 탐색한 것이지만 중하위권 학생들에게도 이와 같은 연구가 있어야 할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

김옥경 (1990). 고등학교 수학에서 발생하는 수학적 오류의 분류모델에 대한 연구, 이화여자대학교 석사학위논문.

김효영 (2007). 무리수의 개념과 성질 및 계산 과정에서 나타나는 오류 분석 - 중학교 3학년 대상으로, 한국교원대학교 석사학위논문

박선화(1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구, 서

울대학교 박사학위논문.

신경희 (2004). 선형대수에서의 학생들의 오개념-일차변환을 중심으로, 수학교육논문집, 19(2), pp.343-361.

오정현 (1996). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구, 이화여자대학교 석사학위 논문.

우정호 (2000). 학교수학의 교육적 기초, 서울 : 서울대학교 출판부.

우현철 (2003). 이차방정식과 부등식 문제해결과정에서 나타나는 오류원인 분석과 교정에 관한 연구, 한국교원대학교 석사학위논문.

이정은・김원경(1999). 중학생들의 일차방정식에 관한 문장제 문제 해결 전략 및 오류 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 38(1), pp.77-85.

이종희・김부미(2006). 일차방정식에서 오류 탐지-교정 학습법의 교수학적 효과 분석, 교과교육학연구, 10(2), pp.222-247.

이종희・김윤영・김선희・김부미・김기연 (2002). 중학생의 수학적 오류 분석 및 교수학적 처방을 위한 학습지도 방법 개발. 교과교육 연구 활성화 방안 연구. 한국교원대학교.

김한나 (2005). 역행렬의 일반화로서의 유사 역행렬 도입과 그의 효과적인 지도방법. 상명대학교 석사학위 논문.

조미정 (2003). 비판적 사고력과 증명능력과의 관계와 증명방법에 대한 분석. 이화여자대학교 석사학위 논문.

최지선 (2003). 중등학교 수학학습에서 나타나는 오개념에 대한 고찰. 서울대학교 석사학위논문.

Babbitt, B. C. (1990). *Error patterns in problem solving.* Paper presented at the International Conference of the Council for Learning Disabilities. Austin, TX. ERIC No. ED 338500. pp.1-11.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* NY : Kluwer Academic Publishers.

Clayton, G. A. (1990). *Successful mathematics teaching for middle school graders.* Research Triangles Park, NC: Southeastern Educational Improvement Lab.(ERIC Document No. 316432).

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). *The nature of the process conception of function.* In G. Harel & E. Dubinsky. *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*(MAA Notes No. 25). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fischbein E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics,* 38, pp.11-50.

Hashweh, MZ (1988). Descriptive studies of students' conceptions in science. *Journal of Research in Science Teaching,* 25, pp.121-134.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). *Learning and teaching with understanding.* In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics and learning.* NY: NCTM

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S.(1987). An empirical classification model for errors in high school mathesmatics. *Journal for Research in Mathematics Education.* 18(1), pp.3-14.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education.* 10(2). pp.163-172.

A Study on Error Analysis and Correction Method in Proof Problems of Matrix

Kim, Hye Jin
Dunchon High School
E-mail : kwangbi@hanmail.net

Kim, Won Kyung
Korea National University of Education
E-mail : wonkim@knue.ac.kr

The purpose of the study is to analyze various types of errors appeared in true-false proof problems of matrix and to find out correction method. In order to achieve this purpose, error test was conducted to the subject of 87 second grade students who were chosen from D high schoool. It was shown from this test that the most frequent error type was caused by the lack of understanding about concepts and essential facts of matrix(35.3%), and then caused by the invalid logically reasoning (27.4%), and then caused by the misusing conditions(18.7%).

Through three hours of correction lessons with 5 students, the following correction teaching method was proposed.

First, it is stressed that the operation rules and properties satisfied in real number system can not be applied in matrix.

Second, it is taught that the analytical proof method and the reductio ad absurdum method are useful in the proof problem of matrix.

Third, it is explained that the counter example of $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $-E$, should be found in proof of the false statement.

Fourth, it is taught that the determinant condition should be checked for the existence of the inverse matrix.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Matrix, Error, Correction

<부록> 사전 검사지

본 검사는 여러분이 행렬의 증명문제에 관하여 어느 정도 명제를 증명할 수 있는지를 알아보기 위한 것입니다. 검사의 결과는 공개되지 않으며, 연구의 목적으로만 사용됩니다.

연습지 없이 직접 증명 과정을 문제지에 적어 넣기 바라며, 만일 오류가 발생되었을 때는 지우거나 알아보지 못하게 없애 버리지 말고 두 줄로 그어 삭제의 뜻을 표시하고 계속하여 해결하기 바랍니다. 또한 문제 해결에 필요하다고 생각되는 것을 모두 문제지에 기록하여 주시기 바랍니다. 틀려도 상관없습니다.

본 검사의 총 문항 수는 10문항이고, 시간은 50분입니다. 문제를 잘 읽고 끝까지 최선을 다해 해결하여 주시기 바랍니다.

( )고등학교 ( )학년 ( )반 ( )번 이름 ________

※ 다음 명제의 참, 거짓을 증명하고, 참이면 ○, 거짓이면 ×로 답하여라.
(단, A, B는 행렬, E는 단위행렬, O는 영행렬)

1. $A+B=E$ 이면 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$이다.
2. $A^2=E,\ A^3=E$ 이면 $A=E$이다.
3. $A^2=E$ 이면 $A=E$이다.
4. $AB=A,\ BA=B$ 이면 $A^2=A$이다.
5. $AB=A,\ BA=B$ 이면 $AB=BA$이다.
6. $A+B=E$ 이면 $A^2-B^2=A-B$이다.
7. $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$
8. AB의 역행렬이 존재하면 A와 B의 역행렬이 모두 존재한다.
9. $A\neq 0, AB=0$ 이면 B의 역행렬은 존재하지 않는다.
10. $A^2-A=E$ 이면 A의 역행렬이 존재한다.