韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育> J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
2010. 05. 제 49권, 제 2호, 149-160. May. 2010, Vol. 49, No. 2, 149-160.

함수의 합성 ∘ 이 가지는 의미에 대한 고찰

김 부 윤 (부산대학교)
정 영 우 (울산대학교)

Ⅰ. 서 론

함수의 연산에는 사칙연산 이외에도 함수만의 고유한 연산인 함수의 역과 함수의 합성이 있다. 역(逆)이라는 것은 가역적 사고로서 인간 활동에서 자연스럽게 대두되는 개념이며, 이를 함수라는 관점에서 형식화한 것이 역함수이다. 또한 합성함수도 단순한 형태의 함수를 다루는 과정에서 발전되어져 나온 것으로, 이를 무엇이라 할 것이며, 수학적으로 어떻게 정의하고 다룰 것인가? 하는 과제를 해결한 결과물이다. 예를 들어, $y=x^2$이라는 다항식함수와 $y=2^x$이라는 지수함수를 다루는 경험들이 $y=2^{x^2}$를 생각하게 이끌었으며, 이를 구명하려는 노력에서 합성함수의 개념이 추출되고 정의되게 된다. 결국 합성함수는 많은 함수들이 가지고 있는 구조를 보다 간단한 함수를 사용하여 정의하기 위한 것이다. 이렇게 추출된 합성함수의 개념은 연속함수의 정의인 극한(limit)의 교환성에 의해 수학적 형식화가 이루어진다. 이러한 과정에서 함수의 합성이 가지는 연산이라는 성질이 드러나게 된다. 이러한 합성함수의 연산이란 본질은 대수학의 연구에서 이미 정보를 가지고 있는 집합의 연산을 일대일대응에 의해 다른 집합의 연산으로 보존하는 '구조연구'에 필수적인 개념으로 발전한다. 그러나 현행 수학과 교육과정에서는 이러한 연산으로서의 함수의 합성이 중요하게 다루어지고 있지 않으며, 더불어 연산이라면 다루어져야 할 중요한 내용이 결여되어 있다.

따라서 본 연구에서는 개발연구방법론에 기초하여, 합성함수에 대한 국소적 교육과정 및 교과서를 분석하여 미흡한 부분을 지적하고, 그것에 대한 근거를 현대수학 이론에 기초하여 제시하며, 이를 반영하여 교육과정에서 다루어야 할 내용에 대해 제안한다. 그러나 정제된 이론을 그대로 제시하는 것은 대학수학의 재정리에 지나지 않으므로, 연속함수에서의 환(ring)의 구조를 구명해가는 수학화를 예시하고, 이를 통하여 함수의 합성이 가지는 연산으로서의 의미 및 그 중요성을 밝힌다. 그리고 이에 기초하여 연산으로서의 합성함수의 본질을 살리기 위해 고등학교에서 지도되어야 할 합성함수의 지도내용에 대한 제안을 하고자 한다.

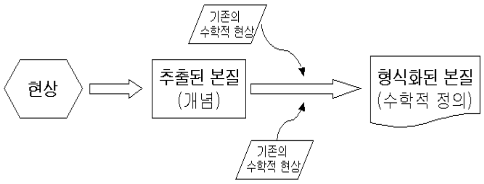
* 접수일(2009년 12월 31일), 수정일(1차 : 2010년 2월 24일, 2차 : 5월 13일), 게재확정일(2010년 5월 13일)
* ZDM분류 : M14, H44
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 수학화, 곁가지의 수학화, 환, 근환.

Ⅱ. 본 론

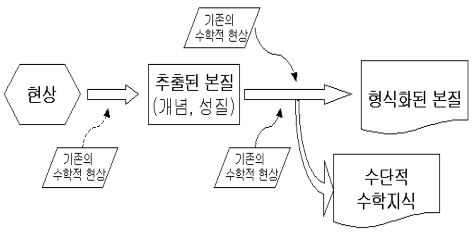
1. 수학화와 곁가지의 수학화

김부윤・정영우(2010)는 수학화(mathematization)와 곁가지의 수학화(byproduct mathematization) 그리고 이들의 순환구조로 수학적 지식의 성장을 논하고, 그것을 도식화하였다. 이들 개념은 절대적 개념이 아니라 상대적인 개념이며, 수학적 개념에 따라 도식은 다양하게 변형된다. 이 개념의 핵심은 현상과 본질의 관계이며, <유형 1>은 기존의 수학적 현상(수학적 지식)의 도움으로 현상에서 본질을 창출하는 것이며, <유형 2>는 현상에서 본질을 창출하는 것뿐만 아니라 그 과정에서 수단적 지식이 부산물로 만들어지는 것이다. 또한 관점을 달리하여 새로운 본질을 부가적으로 만들어내는 것도 이 유형에 속한다. 그리고 <유형 3>은 <유형 2>에서 만들어진 수단적 지식이 나름의 가치를 창출해 나가는 과정으로 '변형[1]'과 '활용[2]'의 경우로 세분화하였다.

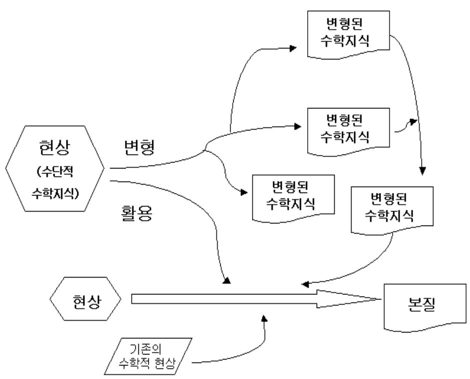
1) 수단적 지식으로부터의 식의 변형
2) 다른 수학적 지식들과의 결합 및 수단적 사용



<그림 1> 유형 1의 도식

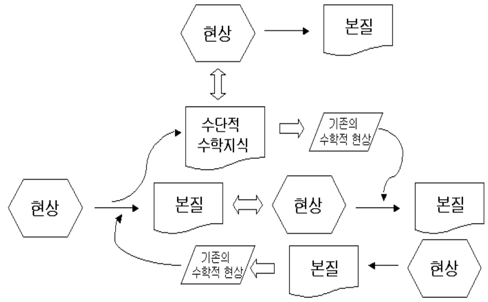


<그림 2> 유형 2의 도식



<그림 3> 유형 3의 도식

그리고 <수학적 지식의 성장 과정> 도식은 창출된 본질이 또 다시 현상이 되어 새로운 본질을 창출하고, 이러한 과정이 순환구조를 이루고 있음을 나타내고 있다. 이처럼 본질이 현상이 되는 것은 또 다시 수학화 된 본질이 현상이 되는 '본질의 현상화'와 수단적 지식이 현상이 되는 '본질의 수단화'로 나누어 생각할 수 있다.



<그림 4> 수학적 지식의 성장 과정

수학화와 곁가지의 수학화를 구성하는 목적은 자연스러운 사고 과정이란 측면에서 교사가 수학적 개념을 구성하여 학생들이 유의미한 학습 활동을 하도록 하는데 있다. 즉, 이것은 수학적 개념의 필연성(동기) 및 가치부여 과정과 그 의미를 고려한 지도방법을 모색하기 위한 것이며, 그렇게 될 때, 학생들은 수학을 완성된 개체가 아닌 살아 있는 성장의 대상으로 인식할 수 있을 것이다.

2. 합성함수의 수학화

연속함수에 대한 수학화 과정에서 연속인 다양한 함수들의 본질이 구명된다. 그리고 이 함수들은 또 다시 현상이 된다. 이러한 함수들을 관찰하는 과정에서 $y=2^{x^2}$, $y=2^{\sin x}$, $y=\sin(2x)$와 같은 함수를 생각하게 되었고, 이것들을 구명하고자 하는 연구가 시작된다. 피아제가 균형화이론에서 인간은 우선 자신들이 가진 것에 동화시키는 방향으로 사고한다고 주장한 것처럼, 이러한 예들의 구조를 분석할 때에도 결국 기존의 함수들을 수단으로 사용하게 된다. 따라서 $y=2^{x^2}$는 $f(x)=x^2$과 $g(x)=2^x$으로, $y=2^{\sin x}$는 $f(x)=\sin x$과 $g(x)=2^x$으로, $y=\sin(2x)$는 $f(x)=2x$와 $g(x)=\sin x$와 같이 간단한 함수들로 구성할 수 있다는 개념을 추출해내게 된다. 이것을 형식화한 것이

$$y=g(f(x))=(g\circ f)(x)$$

이고, 이를 합성함수라 부른다.

그러나 이것은 단순히 구체적인 예를 일반화하여 기호로 나타낸 것으로 수학적 개념이 완성되었다고는 할 수 없다. 즉, 본질을 수학적으로 구명한 것이라 할 수 없다. 따라서 여러 가지 함수들에 대한 연구에서 합성함수라는 개념을 추출하였으며, 합성함수의 본질을 구명하려는 수학화를 하게 된다. 먼저, 합성함수가 함수가 될 조건을 검토해야 한다. 그 결과로 합성함수의 본질로 함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이어야 한다는 것이 구명된다. 다음으로 f와 g가 연속함수일 때, 새로운 함수인 합성함수도 연속함수가 되는지를 검토하여야 한다. 이는 합성 ∘가 연산이기 위한 조건이다. 이때 극한값의 성질, 연속함수의 정의가 기존의 수학적 현상으로 투입된다.

위의 예 $y=2^{\sin x}$를 가지고 연속인 함수의 합성함수가 연속임을 보이자. 먼저, $f(x)=\sin x$, $g(x)=2^x$, $h(x)=2^{\sin x}$라 하자. 그러면 $h(x)=(g\circ f)(x)$이다. $f(x)=\sin x$와 $g(x)=2^x$는 실수 $\mathbb{R}$에서 연속함수이므로 임의의 $x=a$에 대하여 a에 수렴하는 유리수 수열 $\{x_n\}$이 존재하여,

$$\lim_{n\to\infty}\sin(x_n)=\sin(\lim_{n\to\infty}x_n) \text{과} \quad \lim_{n\to\infty}2^{x_n}=2^{\lim_{n\to\infty}x_n}$$

을 만족한다. 따라서 이 수열 $\{x_n\}$에 대해

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}h(x_n)&=\lim_{n\to\infty}2^{\sin(x_n)}=2^{\lim_{n\to\infty}\sin(x_n)}\\&=2^{\sin(\lim_{n\to\infty}x_n)}\\&=2^{\sin a}=h(a)=h(\lim_{n\to\infty}x_n)\end{aligned}$$

이 성립한다. 다른 예들도 마찬가지로 연속임을 보일 수 있다. 이런 과정을 거친 후, 구체적인 예들을 통해 얻은 개념을 일반화시키려는 노력을 하게 된다.

h를 $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$라 두고, f와 g를 연속함수라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}h(x_n)&=\lim_{n\to\infty}((g\circ f)(x_n))\\&=\lim_{n\to\infty}g(f(x_n))\\&=g(\lim_{n\to\infty}f(x_n))\\&=g(f(\lim_{n\to\infty}x_n))\\&=(g\circ f)(\lim_{n\to\infty}x_n)=h(\lim_{n\to\infty}x_n)\end{aligned}$$

이 성립한다.

이로서 합성함수의 본질이 구명되고 형식화되었는데, 이러한 과정이 '합성함수의 수학화'이다. 이러한 합성함수의 수학화는 기존의 수학적 지식의 도움을 받아 본질을 형식화하는 <유형 1>의 예가 된다. 그리고 합성함수는 다시금 현상이 되어 미적분학의 연쇄율, 군론(group theory), 환론(ring theory)으로 수학화되어 그 수학적 가치를 높여가게 된다.

3. 환 구조의 수학화

환의 개념은 다항방정식의 해결을 위한 수학화 과정에서 나오게 된다. 먼저, 일차방정식의 경우를 생각해 보자. $x+a=b$의 풀이를 위해 역원, 결합법칙, 항등원의 개념이 필요하며 이것을 추상화한 군의 공리(group axiom)가 등장한다. 이 경우는 덧셈에 대하여 군(group)이 된다.

다음으로 이차방정식의 경우를 생각해 보자. 이차방정식의 해법으로 인수분해를 이용하는 방법과 완전제곱식을 이용하는 방법 등을 생각할 수 있는데, 인수분해를 이용할 때 곱셈에 대한 결합법칙과 좌·우 분배법칙이 필요하게 된다.

우선, 좌 분배법칙과 우 분배법칙을 모두 만족하는 경우를 생각하자.

$(a+b)(c+d)$에 대해 좌 분배법칙을 먼저 적용하고, 그 다음에 우 분배법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)&=(a+b)c+(a+b)d\\&=ac+bc+ad+bd \qquad \cdots\cdots\cdots\text{①}\end{aligned}$$

이고, 우 분배법칙을 먼저 적용하고, 그 다음에 좌 분배

법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a(c+d)+b(c+d)\\ &= ac+ad+bc+bd \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

이다. 다항방정식의 풀이를 위한 식의 전개나 인수분해 등 계산의 편리성이란 관점에서 보면, ①=②이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned}ac+bc+ad+bd &= ac+ad+bc+bd\\ bc+ad &= ad+bc\end{aligned}$$

이어야 한다. 이것은 임의의 a, b, c, d에 대해서 성립해야 하므로 덧셈에 대한 교환법칙이 먼저 보장되어야 한다는 것을 의미한다.

삼차 이상의 다항방정식의 해결하기 위한 기본원리는 이차방정식과 동일하다. 따라서 방정식을 풀기 위해서는 위의 요소들이 보장되어야 하며, 이러한 요소들을 추상화하여 환(ring)의 개념을 다음과 같이 정의한다(김응태·박승안(2003), 이현정(2003)).

> $(R,\ +,\ \cdot)$이 환으로 항등원 1_R을 가진다는 것은 다음을 만족할 때를 말한다 :
> ① $(R,\ +)$는 가환군(abelian group)이다.
> ② $(R,\ \cdot)$는 반군(semigroup)이다.
> ③ 좌 분배법칙과 우 분배법칙을 모두 만족한다.

이러한 과정이 '환의 수학화'로, 방정식의 해법을 일반화하려는 노력(현상)에서 환의 개념이 추출되고, 그것이 수학적으로 형식화되어 환이라는 본질을 구명했으므로 <유형 1>의 예가 된다.[3] 여기서 두 연산의 유기적 관계를 다루고 있는 것이 좌·우 분배법칙이다.

이러한 환의 개념을 연속함수들의 집합

$$C(R)=\{f\,|\,f:\ R\rightarrow R;\ \text{연속}\}$$

에 대해 적용해 보자. 연속함수공간에 대한 환의 구조는 $(C(R),\ +,\ \cdot)$과 $(C(R),\ +,\ \circ)$의 두 가지를 생각할 수 있다.

우선 $(C(R),\ +,\ \cdot)$에 대해 생각해 보자. 여기서 임의의 $x\in R$에 대해 두 연산 $+$와 $\cdot$을 다음과 같이 정의하자 :

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&=f(x)+g(x)\\ (f\cdot g)(x)&=f(x)g(x)\end{aligned}$$

그러면 $(C(R),\ +,\ \cdot)$는 환이다.

이제 $(C(R),\ +,\ \circ)$에 대해 생각해 보자. 여기서 연산 $\circ$를 다음과 같이 정의하자 :

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

우선, 교환법칙이 성립하지 않는다는 것은 다음 예를 통해 알 수 있다. $f(x)=2x$와 $g(x)=\sin x$일 때,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=2\sin x\\ (g\circ f)(x)&=\sin(2x)\end{aligned}$$

이다. 다음으로 분배법칙을 생각해 보자.

$$\begin{aligned}((g+h)\circ f)(x)&=(g+h)(f(x))\\ &=g(f(x))+h(f(x))\\ &=(g\circ f)(x)+(h\circ f)(x)\\ &=((g\circ f)+(h\circ f))(x)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $(g+h)\circ f=(g\circ f)+(h\circ f)$가 성립하므로 우 분배법칙을 만족한다. 한편,

$$\begin{aligned}(f\circ(g+h))(x)&=f((g+h)(x))\\ &=f(g(x)+h(x))\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}&((f\circ g)+(f\circ h))(x)\\ &\quad=(f\circ g)(x)+(f\circ h)(x)\\ &\quad=f(g(x))+f(h(x))\end{aligned}$$

이다. 만일 $f(x)=\sin x,\ g(x)=x,\ h(x)=x$로 둔다면,

3) 만일 여러 다항방정식을 현상으로 보고 다항식의 해법을 본질로 본다면, 환의 개념은 수단적 지식이 되므로 <유형 2>의 예가 될 수 있다. 이처럼 본질과 곁가지는 상대적 개념으로 무엇을 현상으로 보고, 무엇을 본질로 보는가에 따라 다양한 수학화의 구성이 가능하다.

$$f(g(x)+h(x))=\sin 2x$$

이고

$$f(g(x))+f(h(x))=2\sin x$$

이므로

$$f(g(x)+h(x))\neq f(g(x))+f(h(x))$$

이다. 즉,

$$f\circ(g+h)\neq(f\circ g)+(f\circ h)$$

이다. 따라서 좌 분배법칙은 만족하지 않는다. 그러므로 $(C(R),\ +,\ \circ)$는 환이 아니다.

이 사실로부터 좌・우 분배법칙 중 어느 한 쪽만 만족하는 예가 존재한다는 것을 알게 되었고, 이로부터 새로운 개념을 추출하게 된다. 이 새로운 개념의 형식화를 위해 어느 한 쪽의 분배법칙만이 만족된다고 하자. 여기서는 우 분배법칙이 만족된다고 하자. 그러면

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$$

이다. 그런데 좌 분배법칙을 사용할 수 없으므로 계산은 여기서 멈추게 된다. 따라서 교환법칙에 대한 논의도 고려할 필요가 없다. 이러한 개념을 추상화한 것이 근환(近環, nearring)의 개념이다. 이렇게 환의 구조를 연구하는 과정에서 분배법칙 가운데 어느 한 쪽이 만족되지 않는 예를 발견하게 되었고, 이를 형식화하여 근환(nearring)의 정의가 나오게 된다(James R. Clay(1992), 이현정(2003)).

$(N,\ +,\ \circ)$이 근환(nearring)이라는 것은 다음을 만족할 때를 말한다 : ① $(N,\ +)$는 (가환이 아닌)군이다. ② $(N,\ \circ)$는 반군이다. ③ 좌・우 분배법칙 중 하나만 만족한다.

이러한 과정은 '연속함수집합의 환 구조의 수학화'인데, 이때 곁가지로 근환(nearring)의 개념을 얻었다. 따라서 이것은 <유형 2>의 예가 된다.

이렇게 $(C(R),\ +,\ \circ)$의 구조를 탐구하는 과정에서 추출된 근환(nearring)의 개념을 수학적으로 형식화하고 나면, 환과의 차이점 중의 하나인 덧셈에 대한 교환법칙의 만족이 중요한 요소인지를 판정하기 위한 연구, 그리고 이들 공준이 가치가 있다는 것을 실증할 예들을 찾기 위한 연구가 뒤따르게 된다.

<예 1> $(C(R),\ +,\ \circ)$의 부분집합인

$$N=\{f\mid f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ;\ \text{상수함수}\}$$

을 생각해 보자. 임의의 $x\in\mathbb{R}$에 대해 $f(x)=a$, $g(x)=b$라 두자. 그러면 f와 g는 상수함수이므로 연속함수이다. 또한

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(b)=a$$

이고

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(a)=b$$

이므로 교환법칙이 만족되지 않는다. 마찬가지로 분배법칙에 대하여 생각해보자. $h(x)=c$라 하자.

$$\begin{aligned}(f\circ(g+h))(x)&=f((g+h)(x))\\&=f(g(x)+h(x))\\&=f(b+c)\\&=a\end{aligned}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)+(f\circ h)(x)&=f(g(x))+f(h(x))\\&=f(b)+f(c)\\&=a+a\\&=2a\end{aligned}$$

이므로 좌 분배법칙은 만족하지 않는다. 한편

$$\begin{aligned}((f+g)\circ h)(x)&=(f+g)(h(x))\\&=(f+g)(c)\\&=f(c)+g(c)\\&=a+b\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}(f \circ h)(x)+(g \circ h)(x) &= f(h(x))+g(h(x)) \\ &= f(c)+g(c) \\ &= a+b\end{aligned}$$

이므로 우 분배법칙은 만족한다.

이제

$$\begin{aligned}\theta : \mathbb{R} &\to N \\ a &\mapsto f_a : x \mapsto a\end{aligned}$$

인 일대일대응(1-1, onto 함수) θ를 생각하자. 그러면 N에서의 $f_a \circ f_b = f_a$는 $\mathbb{R}$에서의 연산 $*$에 대하여 $a * b = a$로 구조가 옮겨진다. 즉, 임의의 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 $a * b = a$이다. 따라서 $(R, +, *)$은 근환(nearring)이다[4].

<예 2> $(G, +)$를 임의의 군(group)이라 하자. 여기서 $End(G)$를 G에서 G로 가는 자기준동형(endomorphism)의 집합 즉,

$$End(G) = \{f \mid f : G \to G \text{ ; 군 준동형사상}\}$$

라 하자. 이 때 이 집합에서의 연산을 다음과 같이 정의하자 :

$$\begin{aligned}(f \oplus g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x))\end{aligned}$$

그러면 $(End(G), \oplus, \circ)$는 근환(nearring)이다.

(증명) $f, g, h \in End(G)$이고 $t \in G$라 하자. 그러면

$$(f \circ (g \circ h))(t) = f((g \circ h)(t)) = f(g(h(t)))$$

이고

$$((f \circ g) \circ h)(t) = (f \circ g)(h(t)) = f(g(h(t)))$$

이므로 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$이 성립한다. 따라서 결합법칙을 만족한다. 한편,

$$\begin{aligned}(f \circ (g \oplus h))(t) &= f((g \oplus h)(t)) \\ &= f(g(t)+h(t)) \\ &= f(g(t))+f(h(t)) \\ &= (f \circ g)(t)+(f \circ h)(t) \\ &= ((f \circ g) \oplus (f \circ h))(t)\end{aligned}$$

이므로 따라서

$$f \circ (g \oplus h) = (f \circ g) \oplus (f \circ h)$$

이 성립한다. 그러므로 좌 분배법칙이 만족한다. 한편, $h(t) = x+y$ $(x, y \in G, x \neq y)$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}((f \oplus g) \circ h)(t) &= (f \oplus g)(h(t)) \\ &= (f \oplus g)(x+y) \\ &= (f \oplus g)(x)+(f \oplus g)(y) \\ &= f(x)+g(x)+f(y)+g(y) \quad \cdots ①\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}((f \circ h) \oplus (g \circ h))(t) &= (f \circ h)(t)+(g \circ h)(t) \\ &= f(h(t))+g(h(t)) \\ &= f(x+y)+g(x+y) \\ &= f(x)+f(y)+g(x)+g(y) \quad \cdots ②\end{aligned}$$

이다. ①과 ②가 같으려면 $g(x)+f(y) = f(y)+g(x)$이고, $f = g = 1_G$일 때 $x+y = y+x$ $(x, y \in G)$가 성립해야 하지만, G는 임의의 군이므로 일반적으로 ① $\neq$ ②이다. 따라서 우 분배법칙이 성립하지 않는다. 그러

4) 2006 개정 교육과정에 의한 교과서 「고등학교 수학」에서는 ‘실수의 연산에 대한 성질’에서 ‘닫혀 있다’, ‘항등원’, ‘역원’을 다루면서 일반적인 연산을 언급하고 있다. 즉, A가 임의의 집합일 때, 임의의 $a, b \in A$에 대하여 ① $a \circ b \in A$, ② $a \circ e = e \circ a = a$, ③ $a \circ x = x \circ a = e$를 언급하고 있다. 그리고 사칙연산에 대해 이를 예시하고 있다(류희찬 외(2009), 이재학 외(2009), 이준열 외(2009), 황선욱 외(2009), 황우형 외(2009)). 이러한 내용은 일반적인 연산 $\circ$라는 것이 단지 $+$, $-$, $\times$, $\div$를 대신한 일반화된 기호라는 이미지를 줄 수 있다. 따라서 일반적인 연산 $\circ$을 구체적인 예를 가지고 경험시킬 필요가 있다. 이 때 역사발생적인 과정에서 논의의 대상이 되었던 소재를 도입하는 것은 대상 개념을 보다 명확하게 이해하는데 도움을 준다.

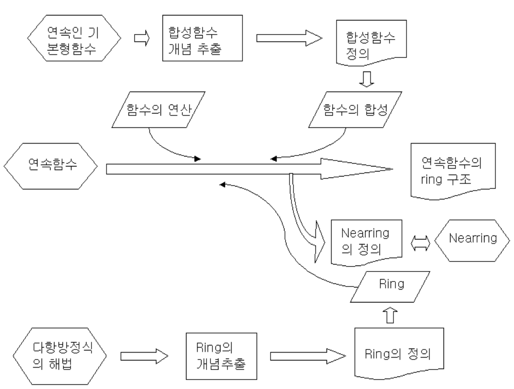
므로 $(End(G),\ \oplus,\ \circ)$는 근환(nearring)이다.

이런 예들을 통해 가치를 부여 받은 근환(nearring)은 $(D(R),+,\ \circ)$, $(R[x],+,\ \circ)$을 비롯한 더 많은 예[5]들을 찾음으로써 수학 내에서 확실한 자리매김을 해 간다. 이것이 '근환(nearring)의 곁가지의 수학화'이다. 이것은 <유형 3>의 예일 수 있다.

환과 근환(nearring)을 구별 짓는 중요한 조건은 교환법칙과 좌·우 분배법칙의 성립 여부이다.

위의 <예 2>에서 만약 $(G,\ +)$가 가환군이라면, $(End(G),\ \oplus,\ \circ)$는 환이 된다. 이와 유사한 예로서는 ⅰ) 만약 V가 F 위의 벡터공간일 때, $(End_F(V),\ +,\ \circ)$이 환이 되고, ⅱ) 만약 R이 환이고 M이 좌 R-가군(左 R-加群, left R-module)일 때, $(End_F(M),\ +,\circ)$은 환이 된다. 특히 벡터공간에서 덧셈에 대한 교환법칙이 조건으로 들어있는 것은 환이 되게 하여 선형변환(linear transformation)의 연구[6]를 효율적으로 하기 위함이다.

이처럼 연속함수집합에서 환의 구조를 탐구하는 과정 − 즉, 연속함수집합에서의 환 구조의 수학화 − 에서 근환(nearring)이 부산물로서 나타나게 되었음을 알 수 있다. 이 과정을 전체적으로 도식화 하면 다음과 같다. 이것은 <유형 2>의 예가 된다.



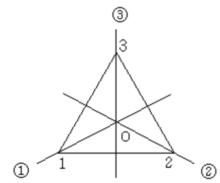
<그림 5> 연속함수집합에서의 환 구조의 수학화

5) 더 많은 예는 James R. Clay(1992)를 참고.

6) 불변성의 연구

환과 근환(nearring)의 개념을 형식화하고 나면, 더 많은 예를 찾으려는 연구를 하게 된다. 다음의 예를 생각해 보자.

<예 3> 유클리드 평면 위에 있는 정삼각형을 공간도형으로 생각하자. 이 정삼각형을 자기 자신에 겹치도록 옮겨 놓는 공간에서의 회전이동 전체의 집합을 S_3라 하자. 그러면 그림에서 중심 O를 지나 평면에 수직인 직선을 회전축으로 가지는 120° 회전이동을 σ, ①에서 180° 회전이동을 τ라 하면[7],



<그림 6>

$$S_3=\{e,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \tau,\ \sigma\circ\tau,\ \sigma^2\circ\tau\}$$

이다. 여기서 $\tau\circ\sigma=\sigma^2\circ\tau$이다. 그러면 $(S_3,\ \circ)$는 군이고, σ와 τ가 생성원(generator)이다(김응태 외(2003), B. Baumslag 외(1968)). 이제

$$End(S_3)=\{f\,|\,f:S_3\to S_3,\ \text{군 준동형사상}\}$$

인 f를 직접 계산해 보자. 먼저, $\{f(\sigma)\}^3=f(\sigma^3)=f(e)=e$이므로 $f(\sigma)=e$ 또는 σ 또는 σ^2이다. 또한 $\{f(\tau)\}^2=f(\tau^2)=f(e)=e$이므로 $f(\tau)=e$ 또는 τ 또는 $\sigma\tau$ 또는 $\sigma^2\tau$이다.

(경우 1) $f(\sigma)=e$이고 $f(\tau)=e$인 경우 :

f는 항등함수(identity map)이다. 이것을 $f_{e,e}$이라 하자.

(경우 2) $f(\sigma)=e$이고 $f(\tau)=\tau$인 경우 :

$$f(e)=e$$
$$f(\sigma^2)=\{f(\sigma)\}^2=e^2=e$$
$$f(\sigma\circ\tau)=f(\sigma)f(\tau)=e\tau=\tau$$
$$f(\sigma^2\circ\tau)=\{f(\sigma)\}^2 f(\tau)=e^2\tau=\tau$$

7) 이 경우 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$이다.

이다. 이 함수를 $f_{e,\tau}$라 하자.

(경우 3) $f(\sigma)=e$이고 $f(\tau)=\sigma\tau$인 경우 :

$$f(e)=e$$
$$f(\sigma^2)=\{f(\sigma)\}^2=e^2=e$$
$$f(\sigma\circ\tau)=f(\sigma)f(\tau)=e\sigma\tau=\sigma\tau$$
$$f(\sigma^2\circ\tau)=\{f(\sigma)\}^2f(\tau)=e^2\sigma\tau=\sigma\tau$$

이다. 이 함수를 $f_{e,\sigma\tau}$라 하자.

(경우 4) $f(\sigma)=e$이고 $f(\tau)=\sigma^2\tau$인 경우 :

$$f(e)=e$$
$$f(\sigma^2)=\{f(\sigma)\}^2=e^2=e$$
$$f(\sigma\circ\tau)=f(\sigma)f(\tau)=e\sigma^2\tau=\sigma^2\tau$$
$$f(\sigma^2\circ\tau)=\{f(\sigma)\}^2f(\tau)=e^2\sigma^2\tau=\sigma^2\tau$$

이다. 이 함수를 $f_{e,\sigma^2\tau}$라 하자.

마찬가지 방법으로 하면, f의 개수는 $3\times4=12$(가지)이다. 이제 $End(S_3)$를 다음과 같이 두자 :

$$End(S_3)=\{f_{e,e},f_{e,\tau},f_{e,\sigma\tau},f_{e,\sigma^2\tau},f_{\sigma,e},f_{\sigma,\tau},f_{\sigma,\sigma\tau},f_{\sigma,\sigma^2\tau},f_{\sigma^2,e},f_{\sigma^2,\tau},f_{\sigma^2,\sigma\tau},f_{\sigma^2,\sigma^2\tau}\}$$

그리고 여기에 $\oplus$과 $\circ$의 연산을 다음과 같이 정의하자 : 임의의 $f,\ g\in End(S_3)$와 $x\in S_3$에 대하여

$$f\oplus g : x\mapsto f(x)\cdot g(x)$$
$$f\circ g : x\mapsto f(g(x))$$

그러면 $(S_3,\ \cdot)$는 교환법칙이 성립하지 않는다. 왜냐하면

$$\begin{aligned}(f_{\sigma,\tau}\oplus f_{\sigma^2,\tau})(\sigma\tau)&=f_{\sigma,\tau}(\sigma\tau)\cdot f_{\sigma^2,\tau}(\sigma\tau)\\&=\sigma\tau\cdot\sigma^2\tau=\sigma\sigma^2\tau\sigma\tau=\tau\sigma\tau\\&=\sigma^2\tau\tau=\sigma^2\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}(f_{\sigma^2,\tau}\oplus f_{\sigma,\tau})(\sigma\tau)&=f_{\sigma^2,\tau}(\sigma\tau)\cdot f_{\sigma,\tau}(\sigma\tau)\\&=\sigma^2\tau\cdot\sigma\tau=\sigma^2\sigma^2\tau\tau\\&=\sigma^3\sigma\tau^2=\sigma\end{aligned}$$

이기 때문이다.

이제 분배법칙이 성립되는지 조사해 보자. 임의의 $x\in S_3$에 대해

$$\begin{aligned}((f\oplus g)\circ h)(x)&=(f\oplus g)(h(x))\\&=f(h(x))\cdot g(h(x))\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}((f\circ h)\oplus(g\circ h))(x)&=(f\circ h)(x)\cdot(g\circ h)(x)\\&=f(h(x))\cdot g(h(x))\end{aligned}$$

이므로 우 분배법칙은 성립한다. 한편,

$$\begin{aligned}(f\circ(g\oplus h))(x)&=f((g\oplus h)(x))\\&=f(g(x)\cdot h(x))\qquad\cdots\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}((f\circ g)\oplus(f\circ h))(x)&=(f\circ g)(x)\cdot(f\circ h)(x)\\&=f(g(x))\cdot f(h(x))\quad\cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

인데, f가 준동형(homomorphism)이므로 ①=②이다.

따라서 좌 분배법칙도 성립한다. 그러므로 $(End(S_3),\oplus,\circ)$은 환도 근환(nearring)도 아니다[8].

이 예를 발견함으로써 교환법칙과 분배법칙은 서로 독립적임이 밝혀졌으며, 또 다른 환의 구조가 생겨나게 된다. 이 구조는 좌·우 분배법칙을 만족하므로 식의 전개는 가능하지만, 교환법칙이 만족되지 않으므로 좌·우

---

8) 여기에서 만일 $M=\{\theta\mid\theta : S_3\to S_3\ ;\ 함수\}$라 하자. 그러면 임의의 $\theta_1,\ \theta_2\in M$과 $x\in S_3$에 대하여

$$(\theta_1\oplus\theta_2)(x)=\theta_1(x)\cdot\theta_2(x)$$

이고

$$(\theta_1\circ\theta_2)(x)=\theta_1(\theta_2(x))$$

이면, $(M,\ \oplus,\ \circ)$은 근환(nearring)이다.

분배법칙의 결과는 다르게 주어진다. 그러므로 인수분해는 의미가 없으며, 따라서 다항방정식의 풀이도 의미가 없게 된다. 그러나 이 개념은 군론 연구에 이용되어 결가지의 수학화를 한다.

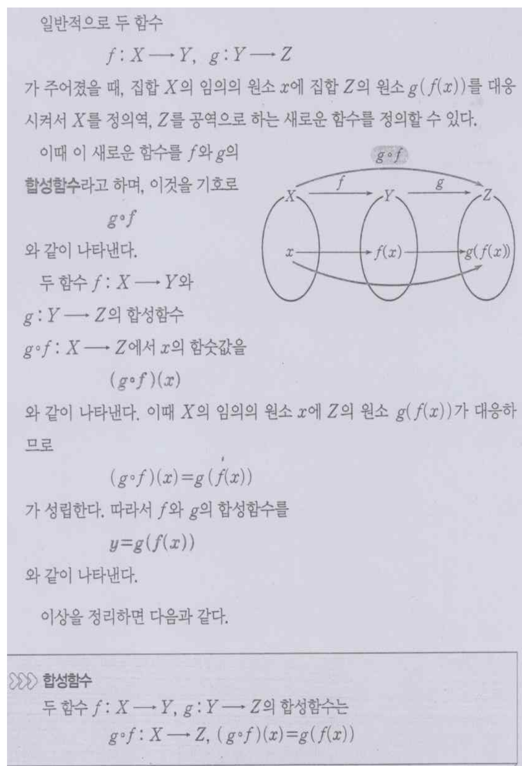
이렇게 해서 교환법칙과 좌·우 분배법칙이 모두 만족되는 환, 교환법칙은 만족되지 않지만 좌·우 분배법칙 중 하나가 만족되는 근환(nearring), 그리고 교환법칙은 만족되지 않지만 좌·우 분배법칙이 모두 만족되는 구조까지 얻어졌다. 그리고 이들 구조들은 각자의 특성에 맞게 다른 수학적 영역에서 자리매김을 하게 된다. 즉, 환은 방정식의 해법과 관련하여, 근환(nearring)은 대수적으로 해결이 안 되는 구조 연구를 위해 해석학적으로 접근하는 대수적 해석학(algebraic analysis)[9] 영역으로 수학화된다. 이처럼 환의 구조에 대한 수학화에서 함수의 합성은 근환(nearring)의 개념을 이끈 중요한 개념이며, 따라서 고등학교에서도 근환(naerring)개념을 도입하여 다른 연산과 함수의 합성을 차별화시켜야 한다.

이상과 같이, 연속함수에서 생각할 수 있는 환의 구조에 대한 고찰을 시작으로 이들을 수학화해서, 교사들은 합성이 함수의 연산임을 강조할 수 있으며, 학생들에게 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙이 가지는 의미를 보다 개연성 있게 이해시킬 수 있다. 나아가 수학적 정의가 그렇게 제시될 수밖에 없는 공준화의 과정 − 환의 공준은 방정식을 해결할 수 있는 가장 핵심적인 조건을 추상화하여 만든 모델이다. − 도 경험시킬 수 있다.

4.. 교육과정에서의 합성함수

앞에서 살펴본 것처럼, '합성함수의 수학화'는 함수를 이해할 때, 그리고 '환 구조의 수학화'는 합성을 연산으로 이해하는데 중요한 수단이 될 수 있으며, 무엇보다도 이들 개념이 그런 형태로밖에 추상화될 수 없었던 필연성을 경험하게 한다. 그러나 이 예들은 단순한 이해의 수단에 그치는 것이 아니라, 중등교육과정에서 합성함수가 어디에 초점을 두고 지도되어야 하는가에 대한 시사점을 준다. 근환(nearring)은 교환법칙이 성립하지 않고 분배법칙이 부분적으로 성립하므로 방정식을 해결할 수 없다. 따라서 환과 근환(nearring) 개념을 구분하는 기준인 덧셈에 대한 교환법칙이나 좌·우 분배법칙의 만족 여부는 중요한 의미를 가지게 된다.

2006년 개정 고등학교 수학과 교육과정에서는 1학년에서 함수를 '대응'의 관점에서 지도하라 밝히고 있는데(교육과학기술부, 2008), 이에 기초하여 교과서들은 <그림 7>과 같이 합성함수의 수학적인 정의를 다음과 같은 도식과 함께 제시하고 있다.



일반적으로 두 함수

$$f : X \longrightarrow Y,\ \ g : Y \longrightarrow Z$$

가 주어졌을 때, 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Z의 원소 $g(f(x))$를 대응시켜서 X를 정의역, Z를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다.

이때 이 새로운 함수를 f와 g의 **합성함수**라고 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f$$

와 같이 나타낸다.

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$와 $g : Y \longrightarrow Z$의 합성함수 $g \circ f : X \longrightarrow Z$에서 x의 함숫값을

$$(g \circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 이때 X의 임의의 원소 x에 Z의 원소 $g(f(x))$가 대응하므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

가 성립한다. 따라서 f와 g의 합성함수를

$$y = g(f(x))$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수

두 함수 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$의 합성함수는

$$g \circ f : X \longrightarrow Z,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

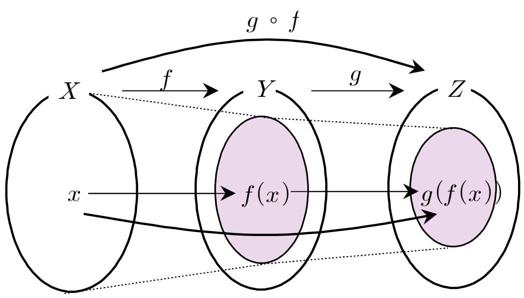
<그림 7> 합성함수의 정의

9) Algebraic analysis(대수적 해석학)이란 용어는 "~에 대한 대수적 연구"와 동의어로 사용된다. 이것은 1959년 사토 미키오(Sato Mikio, 佐藤幹夫)에 의해 대수적 위상수학(Algebraic Topology), 대수기하학(Algebraic Geometry)과 복소해석학을 결합한 것에서 시작되었다. 대수적 해석학은 초함수(hyperfunction)과 미시함수(micro function)와 같은 함수들의 성질과 일반화를 연구하기 위해 층(層) 이론(sheaf theory)과 복소해석학을 이용하여 연립선형편미분방정식을 다루는 수학의 한 분야이다.
(출처 : http://en.wikipedia.org)

그런데 이 내용에는 f의 치역과 g의 정의역의 관계가 드러나지 않으며, 따라서 학생들은 f의 치역과 g의 정의역이 같아지는 것만을 개념이미지로 가질 우려가 있다. 따라서 이와 같은 도식은 f의 치역과 g의 정의역의 관계가 잘 드러나도록 수정될 필요가 있다. 즉, 합성함수의 본질을 밝히는 수학화에서 구명된 '함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합이어야 한다.'가 나타나도록 도식을 제시하여야 한다. 이때 합성함수의 정확한 정의는 '두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$의 합성함수는

$$g \circ f: X \to Z,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

이며, $X = f^{-1}$(정의역 g)이다'이어야 한다.

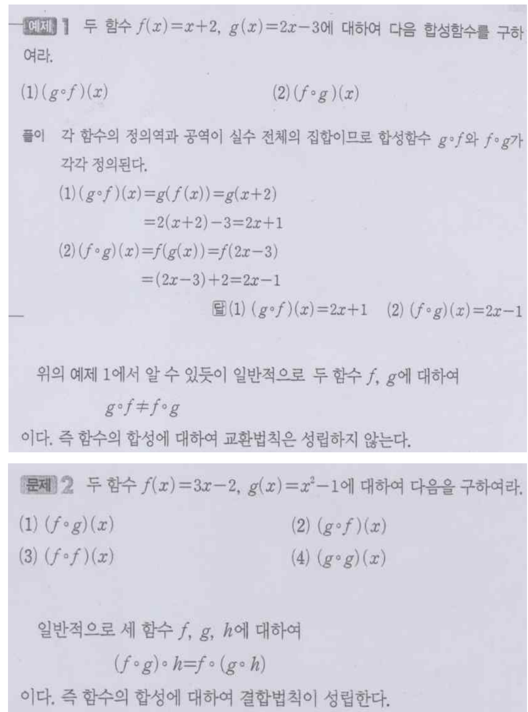


<그림 8> 합성함수

그러나 역함수를 학습한지 얼마 되지 않은 학생들에게는 엄밀한 정의보다 도식을 통해 직관적인 개념이미지를 형성하도록 지도하여도 무방할 것이다.

합성함수를 정의한 후, 이어서 <그림 9>에서와 같이, 예제를 통해 합성함수의 교환법칙과 결합법칙[10]만을 다루고 있다.

이것은 연산으로서의 합성함수를 다루고 있음을 보여주는 것인데, 분배법칙에 대한 내용은 다루어지고 있지 않다. 또한 교과서에 서술되어 있는 이러한 내용들은 형식화된 수학적 지식을 전달하는 것에 그치고 있어, 합성함수를 생각하게 된 배경, 정의를 하기 위해 필요한 조건을 찾아가는 과정, 그리고 합성이 함수의 연산임을 인식할 수 있는 내용들은 드러나 있지 않다.


예제 1 두 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=2x-3$에 대하여 다음 합성함수를 구하여라.

(1) $(g \circ f)(x)$ (2) $(f \circ g)(x)$

풀이 각 함수의 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $g \circ f$와 $f \circ g$가 각각 정의된다.

(1) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2)$
$= 2(x+2)-3 = 2x+1$

(2) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-3)$
$= (2x-3)+2 = 2x-1$

답 (1) $(g \circ f)(x) = 2x+1$ (2) $(f \circ g)(x) = 2x-1$

위의 예제 1에서 알 수 있듯이 일반적으로 두 함수 f, g에 대하여

$$g \circ f \neq f \circ g$$

이다. 즉 함수의 합성에 대하여 교환법칙은 성립하지 않는다.

문제 2 두 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=x^2-1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $(f \circ g)(x)$ (2) $(g \circ f)(x)$
(3) $(f \circ f)(x)$ (4) $(g \circ g)(x)$

일반적으로 세 함수 f, g, h에 대하여

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

이다. 즉 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다.

<그림 9> 합성함수의 성질

그러나 합성함수에 대한 정확한 이해와 합성을 함수의 연산으로 인식하는 것은 이후 미분적분학을 학습[11] 할 때에 필요하며, 비슷한 수학적 구조를 가지는 내용[12] 을 학습할 때, 그 연산의 의미를 이해하는데도 도움이 된다. 따라서 합성함수를 지도할 때, 이러한 맥락화와 연산으로서의 합성을 강조할 수 있는 수업 구성이 필요하다.

교사가 합성함수를 맥락화하여 지도하고자 할 때 손쉽게 도입할 수 있는 것이 수학사 내용인데, 이것의 도입은 학생들의 학습경험을 고려할 때 어려울 경우도 있으며, 흐름이 자연스럽지 못한 경우도 있다. 이러한 관점에서 볼 때, Freudenthal이 안내된 재발명에서 제시하였듯이, 학습자의 상황에서 재해석하여 구성할 필요가 있는데 이러한 재구성 과정에는 수학사적 내용뿐 아니라, 그 개념의 수학적 배경지식에 대한 이해도 필요하다. 이

10) 결합법칙을 본문에서 다루지 않는 교과서도 있다.

11) 연속의 성질, 연쇄율

12) 벡터, 미분, 적분, 행렬 등의 연산

런 관점에서 환 구조의 수학화 과정에서 드러난 것처럼, 합성함수가 가지는 연산의 의미를 충분히 부각시킬 필요가 있으며, 이를 위해서 합성함수는 다음 사항을 강조하여 지도되어야 한다 :

첫째, 결합법칙이 성립한다.
둘째, 우 분배법칙은 성립하지만, 좌 분배법칙은 성립하지 않는다.
셋째, 교환법칙이 성립하지 않는다.

이러한 내용들을 다룰 때에도 예와 결과만을 단순하게 제시할 것이 아니라, 이러한 성질들이 성립한다는 것과 성립하지 않는다는 것이 가지는 의의를 경험시켜야 한다. 즉, 결합법칙이 성립한다는 것은 이항연산을 여러 개의 항에 대한 계산으로 확장시키며, 분배법칙은 식의 조작을 가능하게 하여 방정식을 풀 수 있게 해주며, 교환법칙은 좌 분배법칙과 우 분배법칙의 결과가 같게 해줌으로써 계산의 편리성을 준다는 것을 경험하게 해야 한다. 이를 위해서 함수의 곱과 합성을 비교하는 예를 제시하여야 한다. 즉, 방정식을 해결하기 위한 환의 개념에서 중요한 것은 결합법칙과 분배법칙으로 이를 강조하여 지도할 필요가 있으며, 교환법칙은 행렬의 곱과 관련하여 지도될 수도 있다. 이처럼 어떤 집합에 대하여 정의되는 연산은 결합법칙, 좌 분배법칙, 우 분배법칙, 교환법칙에 대한 성립 여부를 다루어야 그 집합이나 연산의 특징이 제대로 다루어지는 것이다.

이와 같이 어떤 수학적 개념에 대한 수학화의 예를 통해 학생들이 수학적 개념을 학습할 때, 교수활동의 범위 및 의의는 정당화되어질 것이다.

Ⅲ. 결론 및 제언

합성함수와 관련된 모든 내용들이 합성함수의 지도에서 한꺼번에 모두 다루어질 필요는 없다. 그러나 이러한 관련 사실들을 교사들이 알고 가르치고 있는가 하는 것은 중요하다. 교사는 교육과정에 주어진 내용을 기초로 교과서를 참고하여 자신의 학생들의 수준을 고려한 수업을 구성한다. 따라서 교사는 교육과정의 내용이 왜 선정되었으며, 왜 그 영역에서 다루어지는지에 대한 목적과 동기를 이해하여야 하며, 그에 대한 충분한 이해 위에 자신의 학생들의 수준을 배려하여 가르칠 지식으로 다시 교수학적 변환을 하여야 한다. 따라서 교사의 전문성 신장과 교육 과정의 올바른 이해가 선행되어야 자신의 학생들의 수준에 맞게 교수학적 변환도 할 수 있을 것이다.

교육과정의 내용은 교수・학습활동의 기초가 되는데, 현행 수학과 교육과정에서는 합성함수의 연산의 성질에 대한 내용이 충분히 다루어지고 있지 않다.

본 연구에서는 합성함수의 수학화와 환 구조의 수학화를 구성하고, 그 예를 제시하였다. 이 과정에서 덧셈에 대한 교환법칙과 좌・우 분배법칙의 성립 여부가 환의 구조를 분류하는 중요한 요소임을 알 수 있었다. 따라서 교사는 고등학교에서 합성함수 단원을 지도할 때, 이러한 구성의 배경이론이 될 수 있는 충분한 수학적 지식을 갖추고 있어야 함은 물론, 다음과 같은 사항을 유의하여 교수활동을 구성할 필요가 있다.

첫째, 함수의 곱이나 합성을 도입할 때는 덧셈과의 유기적 관계인 분배법칙을 고려하여 다루어야 한다.

둘째, 연속함수의 덧셈과 곱셈이 연속임을 다룬다면, 이 두 연산 $+$와 $\cdot$의 유기적 관계인 분배법칙을 다루어야 한다.

셋째, 연속함수의 덧셈과 합성이 연속임을 다룬다면, 이들을 아우르는 $(C(R),\ +,\ \circ)$에 대한 내용, 즉 우 분배법칙만이 만족함을 지도하여야 한다. 연속함수의 개념은 합성함수를 도입할 때 다루지 않는 개념이므로 강조할 필요는 없지만, 교사는 지도 소재를 선정할 때 세심하게 고려하여야 한다.

넷째, 앞에서 언급한 내용들이 교육과정에 명시되어야 함은 물론, 교육과정을 구체화 한 교과서에서는 이에 관한 충분한 예를 다루어야 한다.

따라서 고등학교에서 함수의 합성에 대한 지도내용은 ① 교환법칙이 성립하지 않으며, ② 결합법칙이 성립한다는 것뿐만 아니라, ③ 우 분배법칙만이 만족된다는 내용까지 충분히 다루어야 하며, ④ 함수의 곱셈과 합성의 차이를 구조적으로 이해할 수 있도록 충분한 예를 다루어야 한다.

교사는 자신이 가르쳐야 하는 수학적 개념에 대한 충

분한 교과지식을 가지고 있어야 함은 물론, 항상 수학적 개념의 수학화를 염두에 두고서 가르칠 개념에 대한 배경지식과 그 지식들 간의 관계에 대한 교재연구를 게을리 하지 말아야 할 것이다. 이렇게 하는 것이 곧 교사의 전문성 신장을 위한 첩경이며, 최근의 화두인 '수업 잘하는 교사'가 되기 위한 단초가 될 것이다.

참 고 문 헌

김부윤·정영우 (2010). Byproduct Mathematization에 관한 연구, 투고중.

김응태·박승안 (2003). 현대대수학, 서울 : 경문사.

교육과학기술부 (2008). 고등학교 교육과정 해설 5-수학, 서울 : 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.

류희찬·조완영·조정묵·임미선·유익승·한명주·박원균·남선주·정성윤 (2009). 고등학교 수학, 서울 : 대한교과서(주).

우정호·정영옥·박경미·이경화·김남희·나귀수·임재훈 (2007). 수학교육학 연구방법론, 서울 : 경문사.

이재학·정상권·박혜숙·홍진곤·박부성·김정배·김상훈 (2009). 고등학교 수학, 서울 : (주)금성출판사.

이준열·최부림·김동재·서정인·전용주·장희숙·조석연 (2009). 고등학교 수학, 서울 : (주)천재교육.

이현정 (2003), 분배법칙의 지도, 부산대학교 교육대학원 석사학위 논문.

황선욱·강병개·김수영 (2009). 고등학교 수학, 서울 : (주)좋은책 신사고.

황우형·권혁진·김인수·김동화·조남일·박승렬·이채형·차순규·이병하·김혜란·김원중 (2009). 고등학교 수학, 서울 : 대한교과서(주).

B. Baumslag, & B. Chandler (1968), *Group Theory*, NY : McGraw-Hill, Inc.

James R. Clay (1992), *Nearrings : Geneses and Appli-cations*, NY : Oxford University Press.

A Study on Meaning of Composition $\circ$ of Functions

Kim Boo Yoon

Department of Mathematics Education, Pusan National University, Busan 609-735, Korea

E-mail : kimby@pusan.ac.kr

Chung Young Woo

Department of Mathematics, University of Ulsan , Ulsan 680-749, Korea

E-mail : nahime1130@hanmail.net

Composition of functions are important tool for producing associativity in mathematical model. However it is not properly treated in dealing together with the other operation, the addition $+$, of functions defined on real numbers.

In this note, we will study mathematization of the construction of nearring axiom from relationships between the addition $+$ and the composition $\circ$ of functions, comparing with those between the addition $+$ and the multiplication $\cdot$ of functions. Furthermore, we will suggest some helpful teaching methods of these mathematization in the secondary school mathematics.

* ZDM Classification : M14, H44
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : Mathematization, Byproduct Mathematization, Ring, Nearring