

## 비등방성 적층 캔틸레버 박판 및 후판의 해석연구

박원태<sup>1</sup>

공주대학교 건설환경공학부 교수<sup>1</sup>

### Study on the Analysis of Anisotropic Laminated Cantilever Thin Plates and Anisotropic Laminated Cantilever Thick Plates

Park, Won-Tae<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, Kongju National University, Cheonan, South Korea

**Abstract:** In this study, it is presented analysis results of bending problems in the anisotropic cantilever thick plates and the anisotropic laminated cantilever thin plates bending problems. Finite element method in this analysis was used. Both Kirchoff's assumptions and Mindlin assumptions are used as the basic governing equations of bending problems in the anisotropic laminated plates. The analysis results are compared between the anisotropic laminated cantilever thick plates and the anisotropic laminated cantilever thin plates for the variations of thickness-width ratios.

**Key Words:** anisotropic laminated cantilever thick plates, anisotropic laminated cantilever thin plates, finite element method, Kirchhoff's assumptions

#### 1. 서 론

얇은 두께를 가진 등방성 탄성판의 응력해석은 고전적 박판이론에 의한 연구 이래로 많은 사람들의 연구대상이 되어 왔다.

그러나 재질이 비등방성이고, 전단변형의 효과를 무시할 수 없는 두꺼운 후판인 경우에는 보다 정확한 해석을 위해 엄밀한 이론이 필요하게 된다.

Kirchhoff 가정에 의한 박판이론에서는 변형전에 중면에 수직인 단면은 변형후에도 평면을 유지하고 중면에 수직이다 라고 가정하여 전단변형효과를 무시하였다. 반면에 Mindlin 가정에 의한 후판이론에서는 변형후 단면이 평면을 유지하지만 중면에 수직일 필요는 없다 라고 가정하여 전단변형효과를 고려하였다

최근 국내에서 새로운 개념의 복합재료를 사용한 교량의 등장과 함께 건설분야에도 전통적 재료인 등방성재료가 아닌 복합재료를 사용한 구조물에 대한 많은 연구가 진행되어 오고 있다.

본 연구에서는 재질이 직교이방성이고, 폭-두께비의 변화에 따른 후판 및 박판이론에 의한 해석결과를 비교 검토하여 건물의 슬래브 및 교량상판등에 새롭게 등장하는 건설재료에 대한 보다 정확한 해석기법을 제시하자 한다.

#### 2. 기본이론

##### 2.1 판의 변위벡터와 변형률벡터

**주요어:** 비등방성 적층 캔틸레버 후판, 비등방성 적층 캔틸레버 박판, 유한요소법, Kirchhoff의 가정

**Corresponding author:** Park, Won-Tae

Department of Civil and Environmental Engineering, Kongju National University, Chungnam-daero 1223-24, Cheonan, Chungnam 330-717, Korea

Tel: +82-41-521-9305, Fax: +82-41-568-0287, E-mail: pwtiae@kongju.ac.kr

투고일: 2010년 10월 10일 / 수정일: 2010년 11월 1일 / 게재확정일: 2010년 11월 3일

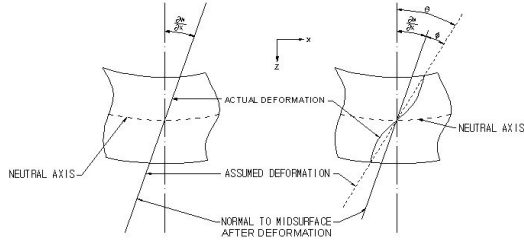


Fig. 1 Displacements of a plate element

Fig. 1과 같이 박판이론에 의한 판의 변위 벡터 ( $\delta_K$ ), 변형률 벡터 ( $\varepsilon_K$ )와 각각 식 (1)과 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta_K = \begin{Bmatrix} w \\ \Theta_x \\ \Theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\varepsilon_K = \{ \chi_K \} \quad (2)$$

, 여기서  $\chi_K$  식(3)과 같다.

$$\chi_K = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \Theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \Theta_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \Theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

후판이론에서의 판의 변위벡터 ( $\delta_M$ )와 변형률벡터 ( $\varepsilon_M$ )는 각각 식 (4)와 식 (5) 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta_M = \begin{Bmatrix} w \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \Phi_y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\varepsilon_M = \begin{Bmatrix} \chi_M \\ \Phi_M \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서  $\chi_M, \Phi_M$  은 식 (6)과 식 (7)과 같다.

$$\chi_M = \begin{Bmatrix} \bar{\chi}_x \\ \bar{\chi}_y \\ \bar{\chi}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial y} \\ -\left(\frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\theta}_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\Phi_M = \begin{Bmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{\theta}_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (7)$$

박판이론과 후판이론에 의한 비등방성 적층 판요소의 모멘트, 전단력과 변형률과의 관계는 식 (8)과 식 (9) 및 식 (10)과 같다.

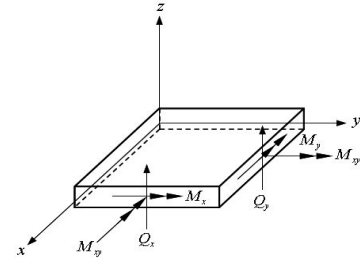


Fig. 2 Stress-resultant of a plate element

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}_M = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_x \\ \bar{\kappa}_y \\ \bar{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}_M = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서,

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$A_{ij} = K \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 4, 5)$$

$D_{ij}$ 는 휨강도 그리고  $A_{ij}$ 는 전단강도,  $K$ 는 전단보정계수를 의미한다. 또한  $[\bar{Q}_{ij}]$ 는 재료축에서의 재료강도를 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도를 나타낸다(Eduard Ventsel Theodor Krauthammer, 2001. Reddy, 1981, Wilhelm Flugge, 1973)

박판이론과 후판이론에 의한 판의 total potential energy는 식 (11)과 식 (12)로 나타낼 수 있다.

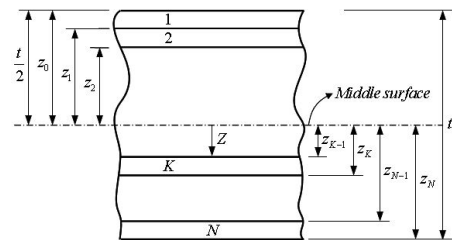


Fig. 3 Laminates

$$\Pi_K = \frac{1}{2} \int_A M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy} - \int_A q w dA \quad (11)$$

$$\Pi_M = \frac{1}{2} \int_A M_x \bar{\chi}_x + M_y \bar{\chi}_y + M_{xy} \bar{\chi}_{xy} + Q_x \phi_x + Q_y \phi_y dA - \int_A q w dA \quad (12)$$

## 2.2 요소 내 변위와 형상함수

본 연구에서는 자연좌표계(r,s)를 사용하여 직각좌표계(x,y)와 요소변위를 같은 보간함수 ( $h_i$ )로 나타낼 수 있는 4절점 “Iso-parametric 판요소”를 사용하였으며, 판요소내의 임의의 점(x,y)에서의 박판 및 후판이론에서의 변위는 형상함수를 이용하여 요소절점의 변위로 나타내면 식 (13)과 같다.

$$\delta_K = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s) \delta_K^i, \quad \delta_M = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 h_i(r,s) \delta_M^i \quad (13)$$

$$\text{단, } h_i(r,s) = \begin{bmatrix} h_1(r,s) & 0 & 0 & \dots & h_4(r,s) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(r,s) & 0 & \dots & 0 & h_4(r,s) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(r,s) & \dots & 0 & 0 & h_4(r,s) \end{bmatrix} \\ = [h_1(r,s) \Pi, \dots, h_4(r,s) \Pi] \quad (14)$$

여기서,  $h_i(r,s)$ ,  $\Pi$ ,  $\delta_K^i$ ,  $\delta_M^i$ 는 식(15)~식(17)과 같다.

$$h_1(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s), \quad h_2(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\ h_3(r,s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s), \quad h_4(r,s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (15)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (16)$$

$$\delta_K^i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}, \quad \delta_M^i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad i=1, \dots, 4 \quad (17)$$

## 2.3 변형률 매트릭스

박판이론 의한 판의 변형률과 변위관계는 식(18)과 같다.

$$\varepsilon_K = \{ \chi_K \} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \\ = [B_K^1, \dots, B_K^4] \delta_K^i = \sum_{i=1}^4 B_K^i \delta_K^i \quad (18)$$

$$\text{여기서, } B_K^i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

후판이론에 의한 판의 변형률과 변위관계는 식(20)과 같다.

$$\varepsilon_M = \begin{Bmatrix} \chi_M \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial x} & -h_i & 0 \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 & -h_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \\ = [B_M^1, \dots, B_M^4] \delta_M^i = \sum_{i=1}^4 B_M^i \delta_M^i \quad (20)$$

$$\text{여기서, } B_M^i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial h_i}{\partial y} & -\frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial x} & -h_i & 0 \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} & 0 & -h_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

식 (19)과 식 (21)에서 변형률 매트릭스  $B_K^i, B_M^i$ 에 있는 형상함수  $h_i$ 는 자연좌표계(r,s)로 정의 되어 있기 때문에 직각좌표계로 편미분하기 위해서 좌표변환을 해야한다. 형상함수의 직교좌표계에 대한 편도함수는 Jacobian 매트릭스를 사용하여 자연좌표계에 대한 편도함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

식 (22)에서  $[J]^{-1}$ 은 식 (23)과 같다.

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial x}{\partial s} \\ -\frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

따라서 박판 및 후판이론에서의 변형률 매트릭스  $B_K^i, B_M^i$ 은 식(24)과 식(25)과 같이 표시할 수 있다.

$$B_K^i = \begin{bmatrix} 0 & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & 0 \\ 0 & 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \\ 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B_M^i = \begin{bmatrix} 0 & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & 0 \\ 0 & 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \\ 0 & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \\ -(J_{11} \frac{\partial h_i}{\partial r} + J_{12} \frac{\partial h_i}{\partial s}) & -h_i & -(J_{21} \frac{\partial h_i}{\partial s} + J_{22} \frac{\partial h_i}{\partial s}) \\ 0 & 0 & -h_i \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 2.4 요소강도 매트릭스

본 연구에서의 요소강도 매트릭스는 전 Potential energy( $\pi$ )의 정류조건으로부터 구할 수 있다. 즉

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi_e}{\partial \delta_e} = 0 \quad (26)$$

결국 박판이론 및 후판이론에서의 요소강도 매트릭스는 식(27)과 식(28)과 같다.

$$K_K^e = \int_{A_e} B_K^T D_K B_K dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_K^T D_K B_K \|J\| d\xi d\eta \quad (27)$$

$$K_M^e = \int_{A_e} B_M^T D_M B_M dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_M^T D_M B_M \|J\| d\xi d\eta \quad (28)$$

식(27)~(28)에서  $B_K^T D_K B_K \|J\| d\xi d\eta$ ,  $B_M^T D_M B_M \|J\| d\xi d\eta$ 는 대단히 복잡하기 때문에 직접 적분하지 않고 수치적분을 하게 되며 일반적으로 식 (29)와 같은 Gauss-Legendre의 구적법을 사용하게 된다.

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{+1}^{-1} \int_{+1}^{-1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_{+1}^{-1} \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i, \eta) d\eta = \int_{+1}^{-1} \phi(\eta) d\eta \\ &= \sum_{j=1}^n \phi(\eta_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서,  $\xi_i, \eta_j$ 는  $i, j$ 번째 Gauss point의  $\xi, \eta$ 의 좌표이다.

### 3. 수치해석의 적용

본 연구의 해석방법에 의한 수치해석결과의 타당성의 확인을 위해 Table 1에서와 같은 등방성재료의 물성치를 사용하여 캔틸레버 사각형판( $a=b=4m$ )에 등분포하중  $q=1,000N/m^2$ 을 재하시켰을 때 후판이론과 박판이론에 의한 해석결과를 비교 검토하였다.

Table 1. Material properties

	engineering constants
isotropic material	$E=2.1 \times 10^{11} N/m^2, \nu=0.3$
orthotropic materials	$E_1=20.83 \times 10^6 N/m^2, E_2=10.94 \times 10^6 N/m^2$ $G_{13}=3.71 \times 10^6 N/m^2, G_{12}=6.10 \times 10^6 N/m^2$ $G_{23}=6.9 \times 10^6 N/m^2, \nu_{12}=0.44, \nu_{21}=0.23$

Table 2에서와 같이 판의 폭-두께비를 0.01~0.20으로 변화시켰을 때에 캔틸레버판의 자유단의 최대처짐값은 전단변형에 의한 효과를 고려하는 경우 차이가 발생한다. 전단변형효과로 인한 자유

단에서 판의 최대처짐은 판의 폭-두께비가 감소할수록 전단변형효과를 무시한 판이론에 의한 값과 차이를 보인다. 판의 폭-두께비가 작을수록, 즉 판의 두께가 두꺼울수록 전단변형효과를 고려한 처짐값이 증가하며, 폭-두께비가 클수록 처짐이 감소하여 일정한 값을 가짐을 알 수 있다.

Table 2. Maxmum displacements for thick and thin plates

t/a	Thick plate theory	Thin plate theory
0.01	271.3290	271.2687
0.02	33.9390	33.9086
0.03	10.0675	10.0470
0.04	4.2541	4.2386
0.05	2.1828	2.1702
0.10	0.2693	0.2758
0.15	0.0804	0.0849
0.20	0.0373	0.0339

비등방성인 재질 경우에는 Table 1 과 같은 물성치를 사용하여 사각형판( $a=b=4m$ )에 등분포하중 ( $q=1,000N/m^2$ )을 재하시켰을 때 폭-두께비에 따른 박판이론과 후판이론에 의한 판의 최대처짐 해석결과를 Table 2 에 제시하였다. Figure 4~Figure 6는 판의 폭-두께비가 0.01, 0.10, 0.02 인 캔틸레버 판 전체의 처짐값에 대해 박판이론과 후판이론에 의해 해석한 예를 보인 것이다.

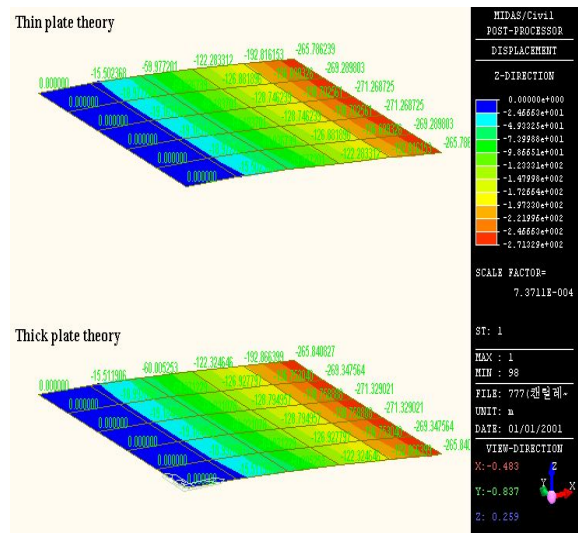


Fig. 4 Displacements of Cantilever plates subjected to distributed loads (t/a=0.01)

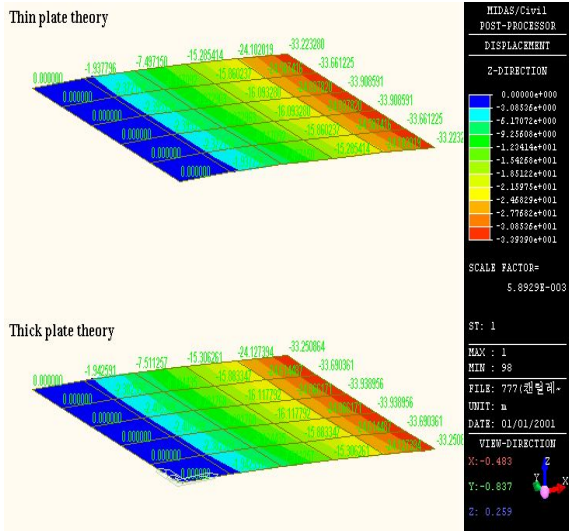


Fig. 5 Displacements of Cantilever plates subjected to distributed loads ( $t/a=0.02$ )

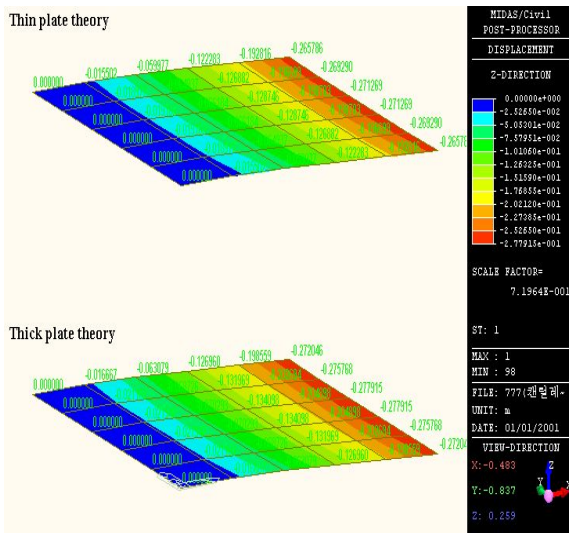


Fig. 6 Displacements of Cantilever plates subjected to distributed loads ( $t/a=0.02$ )

#### 4. 결론

본 연구는 비등방성 재료로 구성된 적층 사각형판에 등분포하중을 재하하였을 때 Kirchhoff 가정에 의한 박판이론과 Mindline 가정에 의한 후판 이론을 이용하여 캔틸레버판의 거동을 분석하였다. 폭-두께비가 0.20에서 박판이론과 후판이론에 의한 판의 자유단의 최대 처짐값에서 약 10% 이상의 차이를 보였다. 캔틸레버판의 자유단에서의 처짐값이 폭-두께비가 등방성 재질보다는 비등방성재질로 구성된 판에서 훨씬 전단 변형효과에 영향을 커짐을 알 수 있었다. 따라서 두께-폭비가 0.20 이상이고, 재질 또한 비등방성인 경우 전단변형효과를 고려하는 것이 정확한 해를 기대할

수 있다.

#### References

- Flügge, W. (1973). Stresses in Shells, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, pp. 204-235.
- Reddy, J. N. (1981). Mechanics of Laminated, Composite shells, CRC press.
- Ventsel, E., Krauthammer, T. (2001). Thin Plates and Shells, Marcel Dekker, Inc, pp. 411-421.