

강성 저하된 적층복합판의 비선형 해석

한성천¹, 박원태², 이원홍^{3*}

¹대원대학 철도건설과, ²공주대학교 건설환경공학부, ³진주산업대학교 토목공학과

Non-linear Analysis of Laminated Composite Plates with Multi-directional Stiffness Degradation

Sung-Cheon Han¹, Weon-Tae Park² and Won-Hong Lee^{3*}

¹Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College

²Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University

³Department of Civil Engineering, Jinju National University

요 약 본 연구에서는 매트릭스가 손상된 적층복합판의 비선형 거동을 분석하기 위한 일차전단변형이론에 기초한 유한요소 정식을 유도하였다. Duan and Yao가 제안한 Matrix 균열의 강성 치환 방법을 적용하여 다방향 강성저하식을 구성하였다. 발생한 Matrix 균열은 탄성계수, 전단탄성계수 및 프아송비의 변화로 표현할 수 있으며, 이를 이용하여 판의 국부 강성 변화를 예측할 수 있다. 가정된 자연변형률 방법을 적용한 셀요소를 이용하여 면내 및 전단잠김 현상이 발생하지 않았다. 적층복합판의 선형해석은 물론 비선형 해석결과들은 참고문헌의 결과들에 수렴되었다. 매트릭스가 손상된 적층복합판의 해석 결과들은 향후 연구에 비교자료로 활용될 수 있을 것이다.

Abstract In this study, a finite element formulation based first-order shear deformation theory is developed for non-linear behaviors of laminated composite plates containing matrix cracking. The multi-directional stiffness degradation is developed for adopting the stiffness variation induced from matrix cracking, which is proposed by Duan and Yao. The matrix cracking can be expressed in terms of the variation of material properties, such as Young's modulus, shear modulus and Possion ratio of plates, and sequently it is possible to predict the variation of the local stiffness. Using the assumed natural strain method, the present shell element generates neither membrane nor shear locking behavior. Numerical examples demonstrate that the present element behaves quite satisfactorily either for the linear or geometrical nonlinear analysis of laminated composite plates. The results of laminated composite plates with matrix cracking may be the benchmark test for the non-linear analysis of damaged laminated composite plates.

Key Words : Stiffness degradation; Non-linear analysis; First-order shear deformation theory; Assumed natural strain, Laminated composite plates

1. 서론

복합재료로 구성된 적층판은 높은 강성비를 가지고 있으나 손상유형에 대한 연구가 필요한 실정이다. 적층복합판의 대표적 손상은 층간분리, Matrix 균열, 섬유 절단 등이 있으며 이러한 현상들은 적층복합판의 거동에 중대한

영향을 끼치는 경우가 발생할 수 있다. 층간 분리로 인한 적층복합판의 손상은 다양한 연구가 진행된 반면 Matrix의 균열이 적층복합판의 거동에 미치는 영향에 대한 연구는 미비한 실정이다. 특히 Matrix 균열 메커니즘은 해석이 난해하기 때문에 수치적 접근방법 보다는 실험에 의한 근사값으로 구한 손상계수를 이용하는 경우가 대부분이

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2007-521-D00476).

*교신저자 : 이원홍(whyee@jinju.ac.kr)

접수일 10년도 04월 20일

수정일 (1차 10년 05월 10일, 2차 10년 06월 23일)

게재확정일 10년 07월 06일

었다.

[1]은 강성 특성을 설명하기 위한 손상역학모형을 제시하였고, [2]는 매트릭스 손상에 의한 적층복합구조의 강성 저하를 새롭게 유도하였다. 이 방법은 적층복합구조의 강성 저하를 나타내기 위해 실험으로부터 단지 몇 개의 상수들만을 필요로 한다.

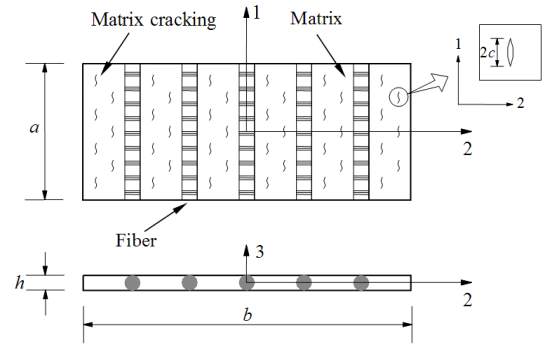
판과 셸의 해석을 위해 [3]은 9절점 가정변형률 셸 요소(QUAD9)를 개발하였는데 그들은 전단 잠김을 극복하기 위하여 자연좌표계에서 횡 전단변형의 향상된 보간법을 사용하였다. 막 변형률의 향상된 보간법은 막 잠김 거동을 피하기 위하여 국부 좌표계에서 사용되었으며, [4]는 개선된 기하학적 비선형 축퇴 셸 요소를 제시하였다. 그들은 자연좌표에서 횡 전단 변형률의 향상된 보간법과 막 변형률에서 감차 적분과 비적합 변위 모드의 선택적 추가법을 사용하였다. [5]는 요소 기저 정식화에 바탕을 둔 9절점 가정변형률 셸 요소를 개발 하였으며, [6]은 [5]의 개념을 적층복합판과 셸로 확장하였고, [7]은 적층복합구조의 자유진동해석으로 확장하였다. [8]은 3차원 복합재료 구조물의 해석을 수행하였고, [9]는 해석적 방법을 통한 점진기능재료 복합판의 정적, 동적 및 좌굴특성에 대해 연구하였다. 이러한 적층복합구조물에 관한 연구들은 선형해석으로 제한된 경우가 있었거나 비선형 해석에 관한 연구일지라도 구조물의 손상을 고려하지 않은 연구이었다.

본 연구에서는 전단 잠김과 막 잠김을 제거하기 위하여 [6]의 가정변형률 방법이 자연 좌표계에 사용되었고, 일차전단변형이론을 적용하여 전단효과를 보강하였다. 다방향 강성 저하를 고려하기 위하여 새로운 변형률-응력 관계식을 유도하였고, [10]의 방법을 적용하여 강성 저하된 재료특성을 유도하였다. 복합재료 적층판에 발생된 Matrix 균열의 크기에 따른 강성변화는 선형과 비선형의 거동 차이에 영향을 미치게 되며 경우에 따라 이러한 차이가 큰 경우가 발생할 수 있다. 특히 적층배열 및 섬유 보강방향 변화가 미치는 선형 및 비선형 거동의 상호작용은 매우 복잡하여 예측이 난해하다. 따라서 본 연구는 셸요소의 유효성을 확인하기 위하여 참고 문헌과 비교하였으며, Matrix에 발생된 균열 크기에 따른 기하학적 비선형 거동의 변화를 적층조건에 따라 상세 분석하였다.

2. 매트릭스의 손상으로 인한 강성 저하

문제를 단순화 하기 위하여 매트릭스의 손상은 한방향 인장을 받고 있는 상태에서 일정하게 분포하고 있다고 가정한다. 매트릭스 손상을 포함하는 미소요소를 그림 1

에 나타내었다. 변형률과 응력의 관계를 유도하면 식(1)과 같다.



[그림 1] 매트릭스 손상을 포함하는 복합재료 판

$$\begin{cases} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{44} \\ \epsilon_{55} \\ \epsilon_{66} \end{cases} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{44} & 0 & 0 \\ \text{symm.} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \\ \sigma_{66} \end{cases}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{E^m} & -\frac{\nu_{12}^m}{E^m} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}^m}{E^m} & \frac{1}{E^m} + \frac{4\pi T^2}{E^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^m} + \frac{4\pi T^2}{E^m} \end{bmatrix} \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{44} \\ \sigma_{55} \\ \sigma_{66} \end{cases} \quad (1)$$

여기서 E^m, G_{12}^m 그리고 ν_{12}^m 는 손상되지 않은 매트릭스의 탄성계수, 전단탄성계수 그리고 푸아송 비이다. 손상변수 T를 식(2)로 정의한다.[2]

$$T = \frac{c}{\sqrt{ab}} = \frac{c}{\sqrt{S_e}} \quad (2)$$

여기서 S_e 는 미소요소의 면적이다. 식(2)에 의해 T는 미소요소의 크기와 손상부위의 길이에 대한 비로 간주된다. 손상된 매트릭스의 탄성계수와 푸아송비는 식(3)과 같다

$$E_1^{mc} = E^m, \quad (3a)$$

$$E_2^{mc} = \frac{E^m}{1 + 4\pi T^2}, \quad (3b)$$

$$G_{12}^{mc} = \frac{E^m}{2(1+\nu_{12}^m) + 4\pi\Gamma^2}, \quad (3c)$$

$$G_{23}^{mc} = G_{12}^{mc} = \frac{E^m}{2(1+\nu^m)}, \quad (3d)$$

$$G_{13}^{mc} = G_{13}^m, \quad (3e)$$

$$\nu_{12}^{mc} = \nu_{23}^{mc} = \nu_{13}^{mc} = \nu_{12}^m \quad (3f)$$

그림 1에 나타난 것과 같이 분포된 매트릭스 손상만을 고려한다면 적층복합판은 손상된 매트릭스와 손상되지 않은 강섬유의 혼합체라고 볼 수 있다. 이러한 혼합체의 강성은 Tsai-Halpin[14] 방법을 이용하여 정리하면 식(4)와 같다.

$$E_1 = E^f V^f + E_1^{mc} (1 - V^f), \quad (4a)$$

그리고

$$\nu_{12} = \nu^f V^f + \nu_{12}^{mc} (1 - V^f) \quad (4b)$$

여기서 E^f 는 강섬유의 탄성계수, E_1^{mc} 손상된 매트릭스의 길이방향 탄성계수, ν^f 와 ν_{12}^{mc} 는 각각 강섬유의 푸아송 비, 손상된 매트릭스의 푸아송 비이다. V^f 는 강섬유의 체적이다.

$$\frac{M}{M^{mc}} = \frac{1 + \xi \eta V^f}{1 - \eta V^f} \quad (5)$$

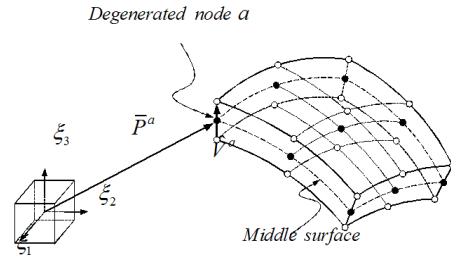
여기서

$$\eta = \frac{(M^f / M^{mc}) - 1}{(M^f / M^{mc}) + \xi} \quad (6)$$

여기서 M = 혼합체 물성치 $E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{13}, \nu_{23}, \nu_{13}$, M^f = 강섬유 물성치 E^f, G^f, ν^f , M^{mc} = 손상된 매트릭스의 물성치 E^{mc}, G^{mc}, ν^{mc} 그리고 ξ 는 상수이다.

3. 쉘 요소의 기하와 운동학

6개의 자유도를 갖는 9절점 쉘 요소의 구조 형상은 그림 2와 같다.



[그림 2] 6개의 자유도를 갖는 9절점 쉘 요소

중립면에 수직인 법선은 변형 후에도 직선으로 유지된다는 쉘의 가정을 사용하면, 쉘 요소의 초기 형상은 상수의 두께 h 를 가지며, 식(7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{P}(\xi_i) = \bar{\mathbf{P}}(\xi_\beta) + \xi_3 \bar{\mathbf{V}}(\xi_\beta); \quad i=1,2,3, \quad \beta=1,2 \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(\xi_\beta) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \bar{\mathbf{P}}^a \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{V}}(\xi_\beta) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{V}}^a \quad (9)$$

여기서, \mathbf{P} 는 쉘 요소에서 일반적인 한 점의 위치 벡터를 나타내고, $\bar{\mathbf{P}}$ 는 중립면에서 한 점의 위치 벡터를 나타낸다. N_a 는 노드 a 와 관련하여 2차원 2차 라그랑지안 보간 함수이며, $\bar{\mathbf{P}}^a$ 는 3개의 직교 좌표 요소를 갖고 있는 위치 벡터이다. h^a 는 노드 a 에서 쉘 두께이다. $\hat{\mathbf{V}}^a$ 는 절점 a 에서 중립면에 수직인 단위 법선 벡터이다. 절점 a 에서의 단위 법선 벡터 $\hat{\mathbf{V}}^a$ 는 식(10)과 같이 간단히 결정된다.

$$\hat{\mathbf{V}}^a = \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \bar{\mathbf{P}}^a}{\partial \xi_2} \right|} \quad (10)$$

쉘 요소에서 변위장 \mathbf{u} 는 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{u}(\xi_i) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) \left[\bar{\mathbf{u}}^a \quad \xi_3 \frac{h^a}{2} \hat{\mathbf{e}}^a \right] = \bar{\mathbf{u}}(\xi_\beta) + \xi_3 \bar{\mathbf{e}}(\xi_\beta) \quad (11)$$

여기서 $\bar{\mathbf{u}}$ 는 중립면의 임의 점의 병진 변위 벡터이고 $\hat{\mathbf{e}}^a$ 는 절점 a 에서 회전 변위 벡터이다.

본 연구의 쉘 요소에 대한 변위장의 증분 형태는 [5]의 절점 증분 벡터 $\Delta \mathbf{u}^a$ 를 사용하여 식(12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{u}(\xi) = \sum_{a=1}^9 N_a(\xi_\beta) [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \xi_3 \Psi^a] \Delta \mathbf{u}^a \quad (12)$$

여기서,

$$\Psi^a = \frac{h^a}{2} \mathbf{R}^a \Phi^a \mathbf{R}_A, \quad \Delta \mathbf{u}^a = \{\Delta \bar{u}_1^a, \Delta \bar{u}_2^a, \Delta \bar{u}_3^a, \Delta \theta_1^a, \Delta \theta_2^a, \Delta \theta_3^a\} \quad (13)$$

그리고

$$\Phi^a = \begin{bmatrix} 0 & \hat{V}_3^a & -\hat{V}_2^a \\ -\hat{V}_3^a & 0 & \hat{V}_1^a \\ \hat{V}_2^a & -\hat{V}_1^a & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

4. 자연 변형률 텐서

자연 좌표계[6]에 따르면, 본 연구에서 사용한 Green 변형률 텐서에 대응하는 자연 변형률 텐서는 식(15)와 같이 정의 된다.

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{P}_I}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \mathbf{P}_I}{\partial \xi_\beta} E_V \quad (15)$$

증분 변형률은 식(16)으로 간단하게 표현될 수 있다.

$$\Delta \bar{E}^m = \tilde{\mathbf{B}}_m \Delta \bar{\mathbf{u}}, \Delta \bar{E}^b = \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_b \Delta \mathbf{u}, \Delta \bar{E}^s = \tilde{\mathbf{B}}_s \Delta \mathbf{u} \quad (16)$$

여기서, $\Delta \bar{E}^m, \Delta \bar{E}^b, \Delta \bar{E}^s$ 는 각각 증분 면내 변형률, 증분 휨 변형률, 증분 수직 전단 변형률 성분이고 $\tilde{\mathbf{B}}$ 는 변형률-변위 행렬이다.

잠금 문제를 해결하기 위하여 [6]의 제안한 9절점 쉘 요소에서 가정 자연 변형률 방법을 사용하였다.

$$\tilde{\epsilon}_{13} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \Omega_i(\xi_1) \Xi_j(\xi_2) \tilde{E}_{13}^\delta, \quad \tilde{\epsilon}_{23} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \Omega_i(\xi_2) \Xi_j(\xi_1) \tilde{E}_{23}^\delta, \quad \tilde{\epsilon}_{12} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Omega_i(\xi_1) \Omega_j(\xi_2) \tilde{E}_{12}^\delta \quad (17)$$

여기서 $\delta = 2(j-1)+i$ 는 표본점의 위치를 나타내고, 그 형상 함수 $\Omega_i(\xi_1)$ 및 $\Xi_j(\xi_2)$ 는 식(18)과 같다.

$$\Omega_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\xi_1), \quad \Omega_2(\xi_1) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\xi_1), \quad \Xi_1(\xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2 + 1), \quad \Xi_2(\xi_2) = 1 - \xi_2^2, \quad \Xi_3(\xi_2) = \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2 - 1) \quad (18)$$

여기서 $\Omega_i(\xi_1)$ 및 $\Xi_j(\xi_2)$ 는 변수를 바꾸어서 얻을 수 있다. 가정 변형률 $\tilde{\epsilon}_{11}, \tilde{\epsilon}_{22}$ 는 각각 $\tilde{\epsilon}_{13}, \tilde{\epsilon}_{23}$ 와 동일한 보간 방법이 쓰인다.

식 (18)로부터 유도된 가정 변형률 $\tilde{\epsilon}$ 를 변위장에서 얻어진 변형률 \bar{E} 대신에 본 연구의 쉘 요소에 사용하였다. 본 연구에서는 식(19)와 같이 새로운 $\tilde{\mathbf{B}}_{AS}$ 행렬이 일반적인 $\tilde{\mathbf{B}}$ 행렬 대신에 사용되었다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}^m \\ \tilde{E}^b \\ \tilde{\epsilon}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{B}}_m)_{AS} & 0 \\ \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b1} & \xi_3 \tilde{\mathbf{B}}_{b2} \\ (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{AS} & (\tilde{\mathbf{B}}_s)_{AS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서 $\tilde{\epsilon}^m$ 와 $\tilde{\epsilon}^s$ 는 가정 면내 변형률과 가정 전단 변형률 요소이다.

5. 적층판의 변형 에너지와 합 응력

3차원 구조체로 표현된 쉘의 변형에너지는 응력 텐서 S_{ij} 와 변형률 텐서 E_{ij} 의 곱을 전체 체적에 대하여 적분한 형태로 표현되며 식(20)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_V S_{ij} E_{ij} dV \quad (20)$$

적층 구조물에서 변형 에너지 U 는 식(21)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \bar{E}_y^T \bar{C}_{yjk} \bar{E}_k d\xi_3 dA \quad (21)$$

두께에 대한 적분을 수행하면 변형 에너지로부터 식 (22)와 같은 면내, 면내-휨 조합, 휨 그리고 전단 강성 행렬을 구할 수 있다.

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}, B_{\alpha\beta\gamma\delta}, D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} (1, \xi_3, \xi_3^2) d\xi_3, \quad A_{\alpha\beta\gamma\delta} = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} d\xi_3 \quad (22)$$

여기서 Reissner에 의해 제안된 5/6를 전단 보정계수

(k_s)로 유한요소 정식에 사용하였다.

적층 복합 판의 적합 방정식은 식(23)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_{\alpha\beta} \\ M_{\alpha\beta} \\ Q_{\alpha 3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\alpha\beta\gamma\delta} & B_{\alpha\beta\gamma\delta} & 0 \\ B_{\alpha\beta\gamma\delta} & D_{\alpha\beta\gamma\delta} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\alpha 3\beta 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_{\gamma\delta}^m \\ \bar{E}_{\gamma\delta}^b \\ \bar{E}_{\beta 3}^s \end{Bmatrix} \quad (23)$$

6. 증분 평형방정식

미소 변형률 이론을 사용하면 식(24)와 같이 증분 평형방정식을 나타낼 수 있다.

$$\int \delta(\Delta^L \bar{E})^T \bar{C} \Delta^L \bar{E} dV + \int \mathbf{s}(\Delta^{NL} \bar{E}) dV = {}^{t+\Delta t} SW_{ext} - \int \delta(\Delta^L \bar{E})^T \mathbf{s} dV \quad (24)$$

여기서 \mathbf{S} 는 자연 응력 텐서이고 위 첨자 t 는 일반적으로 현재 상태를 나타내며, 위 첨자 $t + Dt$ 는 증분된 상태를 나타내며, ${}^{t+Dt} dW_{ext}$ 는 $t + Dt$ 에서 외적 가상일을 의미한다.

선형 강성행렬은 두께방향으로 직접적분을 수행하여 얻을 수 있다. 최종적으로 6x6 요소 강성행렬을 식(25)와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_L] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{B}}_m)_{\alpha\beta} + \xi \bar{\mathbf{B}}_{\alpha 1} & \xi \bar{\mathbf{B}}_{\alpha 1} \\ (\bar{\mathbf{B}}_s)_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{m\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{C}}_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{B}}_m)_{\alpha\beta} + \xi \bar{\mathbf{B}}_{\alpha 1} & \xi \bar{\mathbf{B}}_{\alpha 1} \\ (\bar{\mathbf{B}}_s)_{\alpha\beta} & (\bar{\mathbf{B}}_s)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} d\xi dA \\ &= \int \begin{bmatrix} \mathbf{K}_L^{11} & \mathbf{K}_L^{12} \\ \mathbf{K}_L^{21} & \mathbf{K}_L^{22} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (25)$$

기하 강성행렬은 식(26)으로 나타낼 수 있다,

$$\mathbf{K}_G = \int \bar{\mathbf{G}}^T \mathbf{s} \bar{\mathbf{G}} dV \quad (26)$$

식(26)은 식(27)과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K}_G = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_1^T & \bar{\mathbf{G}}_2^T & 0 \\ \xi \bar{\mathbf{G}}_1^T & \xi \bar{\mathbf{G}}_2^T & \bar{\mathbf{G}}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} I_1 & S_{12} I_1 & S_{13} I_1 \\ S_{21} I_1 & S_{22} I_1 & S_{23} I_1 \\ S_{31} I_1 & S_{32} I_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_1 & \xi \bar{\mathbf{G}}_2 \\ \bar{\mathbf{G}}_3 & \xi \bar{\mathbf{G}}_1 \\ 0 & \bar{\mathbf{G}}_3 \end{bmatrix} d\xi dA \quad (27)$$

국부 회전 좌표계에서 식(27)은 해석적으로 두께 방향으로 적분을 통해 식(28)의 형태로 구할 수 있다.

$$[\mathbf{K}_G] = \int \begin{bmatrix} \mathbf{K}_G^{11} & \mathbf{K}_G^{12} \\ \mathbf{K}_G^{21} & \mathbf{K}_G^{22} \end{bmatrix}_{6 \times 6} dA \quad (28)$$

증분 비선형 평형방정식은 식(29)와 같다.

$$([\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_G]) \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \bar{\mathbf{F}} - \mathbf{F} \quad (29)$$

여기서 $\bar{\mathbf{F}}$ 는 외력 벡터 그리고 \mathbf{F} 는 내력 벡터이다.

7. 수치 예제

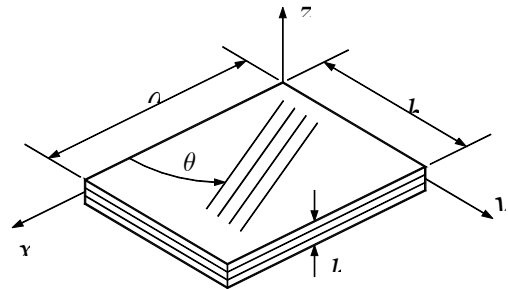
선형해석과 비선형해석의 결과들을 비교하기 위하여 몇 개의 예제들을 선택하였다. 예제들은 참고문헌의 결과와 비교하기 위한 등방성 예제와 향후 연구들에 비교자료로 제시하기 위한 비등방성 복합재료 예제들로 구성하였다. 첫번째 예제는 손상된 적층복합판의 변위를 해석적 방법으로 구한 결과와 비교하였다. 두번째 예제는 L-형 판의 비선형 해석을 수행하였고, 마지막으로는 적층판의 비선형 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 FEAP을 개선하여 적용하였다[11, 12].

7.1 적층복합판의 선형해석

복합재료의 물성치는 표 1과 같다.

[표 1] 강섬유와 매트릭스의 물성치

	E (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
강섬유	84.0	33.6	0.27
매트릭스	3.2	1.26	0.27



[그림 3] 단순지지된 사각형 적층복합판

표 2에는 실험결과와 본 연구에서 유도한 적층요소 초기 물성치를 나타내었다.

[표 2] 본 연구와 참고문헌의 초기 물성치 비교

		E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Duan과	실험값	41.7	13.0	3.4	0.3
Yao[2]	예측값	39.6	12.9	5.13	0.26
본 연구		39.56	12.99	5.13	0.27

그림 3의 단순지지된 4각형 판($a/h=100$)의 1/4을 4×4로 요소분할 하였고, 재료의 물성치는 표 2와 같으며, 기하학적 성질은 그림 3과 같다. 강섬유의 체적은 $V^f=0.45$, 재료의 계수 $\xi=4.12$ 로 가정하였다. 4층으로 적층된 역대칭 앵글-플라이 적층복합판의 손상정도에 따른 해석결과를 해석적 방법과 비교하여 표 3에 나타내었다. 해석적 방법의 결과와 본 연구의 결과는 매우 잘 일치하였다.

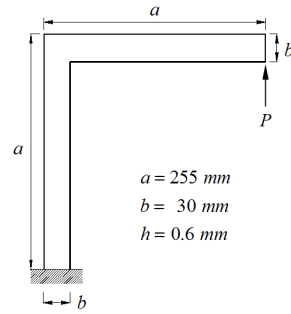
[표 3] 손상된 적층합판과 손상되지 않은 적층복합판의 변위 ($\theta/\theta_0/\theta_1/\theta$)

손상계수 (T)	각도 (θ)		5	15	30	45
	해석방법					
손상되지 않은 경우	FEM (본연구)	4×4	2.3640	2.2405	1.9973	1.8833
	Navier (해석적방법)		2.3736	2.2541	2.0082	1.8955
0.1	FEM (본연구)	4×4	2.4356	2.3200	2.0671	1.9464
	Navier (해석적방법)		2.4546	2.3304	2.0738	1.9565
0.2	FEM (본연구)	4×4	2.6489	2.5114	2.2236	2.0991
	Navier (해석적방법)		2.6588	2.5222	2.2351	2.1044
0.3	FEM (본연구)	4×4	2.9029	2.7426	2.4113	2.2655
	Navier (해석적방법)		2.9147	2.7615	2.4270	2.2750
0.5	FEM (본연구)	4×4	3.3829	3.2102	2.7466	2.5404
	Navier (해석적방법)		3.4000	3.2166	2.7567	2.5502

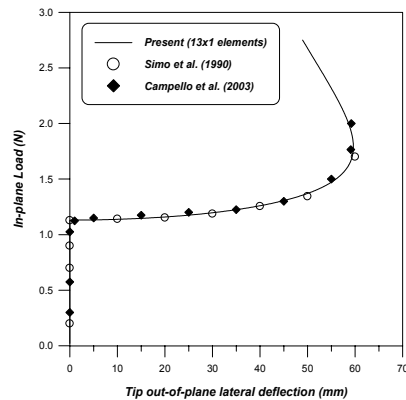
7.2 L-형 판의 비선형 해석

한단은 고정되고 자유단에 면내하중이 작용하는 L-형 판을 그림 4에 나타내었다. 재료의 특성은 $E=71,240\text{ N/mm}^2$ 그리고 $\nu=0.31$ 이다. 13×1의 요소로 분할하여 비선형 해석을 수행하였고, 그림 5에 참고문헌의 결과들과 비교하여 나타내었다.

[13]은 6절점 삼각형 요소를 68×2로 분할하여 해석하였고, [14]도 4절점 사각형 요소를 68개 사용하였다. 본 연구에서는 13개의 요소 만으로도 참고문헌의 결과들과 매우 유사한 해석결과를 얻을 수 있었다.

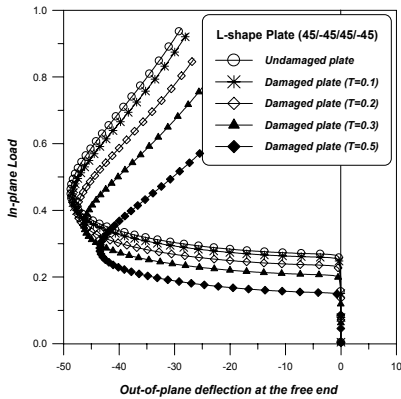


[그림 4] 한단은 고정되고 자유단에 면내 하중이 작용하는 L-형 판



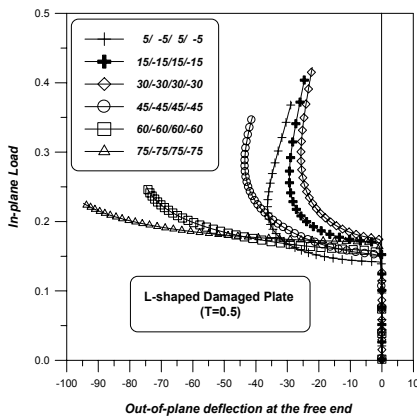
[그림 5] L-형 판 자유단의 면외 변위

손상된 적층복합판의 물성치는 표 2의 값을 사용하였고, 강섬유의 체적은 $V^f=0.45$, 재료의 계수 $\xi=4.12$ 를 적용하였다. L-형 적층복합판의 전체 두께는 $h=0.6\text{ mm}$ 이고 각각의 적층판은 동일한 두께로 구성하였다. 그림 6에서 하중 증가에 따른 좌굴 후의 거동을 확인할 수 있다. 적층복합판은 ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$)로 적층되어 있고 손상정도에 따른 후좌굴 거동을 분석하였다. 손상계수의 변화에 따른 후좌굴 거동은 유사한 모양을 나타내었고, 손상계수의 증가에 따라 극한하중이 감소하였다. 이러한 현상은 손상의 정도가 구조물의 강성을 저하시킴으로 인한 결과로 예측할 수 있다. 주목할 만한 점은 ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$)로 적층된 L-형 적층복합판의 경우, 손상에 따른 강성의 저하정도가 약 20~30% 정도 된다는 것이다.



[그림 6] L-형 적층복합판의 손상정도에 따른 자유단 면의 변위

그림 7은 손상계수가 0.5인 경우에 4층으로 적층된 ($\theta/-\theta/\theta/-\theta$) L-형 적층복합판의 각도 변화에 따른 후좌굴 거동을 나타낸 것이다. θ 가 5에서부터 30까지 변화하는 동안에는 극한하중이 증가하였다. 하지만 θ 가 45에서부터 75까지 변화하는 동안에는 상이한 거동을 나타내었다. 이러한 현상은 보강방향은 물론 구조물의 형상 또한 후좌굴 거동에 영향을 주는 것으로 판단된다. 4층으로 적층된 ($\theta/-\theta/\theta/-\theta$) L-형 적층복합판의 각도가 ($23^\circ/-23^\circ/23^\circ/-23^\circ$)으로 적층되었을 때 가장 큰 극한하중을 나타내었지만 ($30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ$)의 경우와 거의 차이가 없어 그림 6에 표현하지는 않았다.



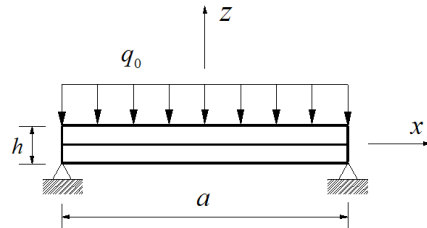
[그림 7] 손상된 L-형 적층복합판의 보강방향의 변화 따른 자유단 면의 변위

7.3 적층복합판의 비선형 해석

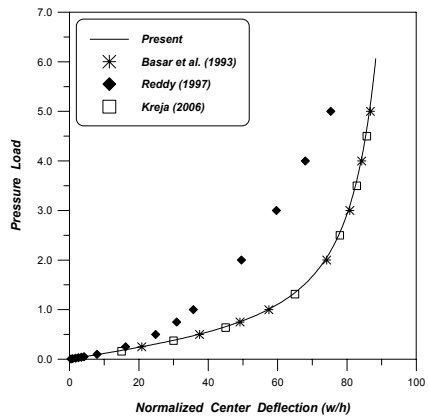
단순지지된 역대칭($0^\circ/90^\circ$)적층복합판을 그림 8에 나타내었다. [15, 16]과 [17]은 고차전단변형, 3차 전단변형 이론을 이용하여 해석하였다. 적층복합판의 기하학적 특성 및 재료적 특성은 식(30)과 같다.

$$\begin{aligned}
 a &= 9.0 \text{ in}, b = 1.5 \text{ in}, h = 0.04 \text{ in}, E_1 = 2.0 \times 10^7 \text{ lb/in}^2, \\
 E_2 &= 1.4 \times 10^6 \text{ lb/in}^2, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.7 \times 10^6 \text{ lb/in}^2, \\
 \nu_{12} &= 0.3
 \end{aligned} \tag{30}$$

대칭조건을 이용하여 적층복합판의 1/4만 9개의 요소로 분할하여 해석하였다. 하중의 증가에 따른 적층복합판의 처짐을 참고문헌과 비교하여 그림 9에 나타내었다.



[그림 8] 등분포 하중을 받는 적층복합판

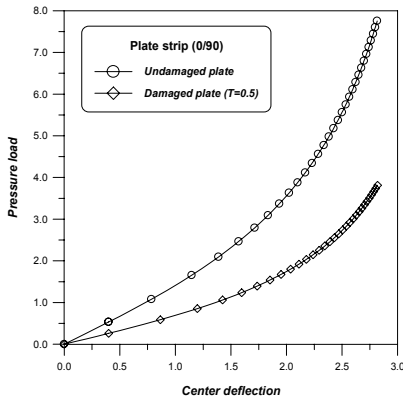


[그림 9] 등분포 하중을 받는 적층복합판의 하중-변위 관계 곡선

본 연구의 결과는 [17]과 [18]의 연구결과와 유사한 결과를 나타내었다. 그림 9로부터 고차전단변형 이론이 얇은 구조에서는 개선효과가 매우 작다는 것을 알 수 있었다. [14, 15]의 결과는 $w/h \le 10$ 의 범위에서만 수렴되었고, 이러한 결과는 [15]의 비선형 이론을 적용하였기 때

문으로 판단된다. 본 연구에서는 Green 변형률을 적용하여 정확한 비선형 거동을 추적할 수 있었다.

손상된 적층복합판과 손상되지 않은 적층복합판의 하중 증가에 따른 중앙점 처짐을 그림 10에 나타내었다. 재료의 물성치는 표 2와 같고 강섬유의 체적 계수는 $V^f = 0.45$, 재료의 계수는 $\xi = 4.12$ 를 사용하였다. 2개층이 역대칭 ($0^\circ/90^\circ$)으로 적층되고 손상된 적층복합판의 경우에 중앙점 처짐이 현저히 증가됨을 알 수 있었다.



[그림 10] 손상된 적층복합판의 하중-변위 관계 곡선

8. 결론

적층복합판은 구조물의 형상, 기하학적 비선형성, 비등방성 재료의 혼합 등이 복잡하게 얽혀있어 다방향 강성저하를 정확하게 예측하는 것은 매우 어려운 일이다. 이러한 강성저하를 간단하게 유도하기 위하여 파괴역학에 기초하여 매트릭스 손상으로 인한 적층복합판의 강성저하 모델을 연구하였다. 여기서 강성저하 상수는 손상계수 T 로 정의하였다. 기하학적 비선형 해석을 위한 요소기저 라그랑지안 요소를 사용하였고, 전단변형 효과를 고려하기 위해 일차전단변형 이론을 적용하였다. 면내 잠김과 전단 잠김현상을 피하기 위해 가정 자연변형률을 사용하였다.

손상된 적층복합판의 비선형 해석에서 손상계수와 구조물의 기하학적 형상 등이 매우 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었으며 특히, L-형 적층복합판과 같은 구조물에서 극한하중의 변화가 구조물의 형상에 따라 예측하기 힘든 상황이 발생할 수도 있다는 것은 주목할 일이다.

본 연구의 결과는 향후 적층복합구조의 강성저하 연구자들을 위한 참고자료로 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

다. 하지만 본 연구의 결과들은 하나의 예제일 뿐이며 다양한 분야로 연구가 진행되어야 할 것으로 판단된다.

참고문헌

- [1] R. Talerja, "Fatigue of composite materials", Technomic Publishing Co., Inc, 1987.
- [2] X. Duan and W. X. Yao, "Multi-directional stiffness degradation induced by matrix cracking in composite laminates", International Journal of Fatigue, Vol.24, pp.119-125, 2002.
- [3] H. C. Huang and E. Hinton E, "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 22, pp. 73-92, 1986.
- [4] S. W. Yoo and C. K. Choi, "Geometrically nonlinear analysis of laminated composite by an improved degenerated shell element", Struct. Eng. Mech., Vol.9(1), pp. 99-110, 2000.
- [5] H. Ma and W. Kanok-Nukulchai, "On the application of assumed strained methods", In: Kanok-Nukulchai et al., editors. Structural engineering and construction, achievement, trends and challenges, AIT, Bangkok, 1989.
- [6] S. C. Han, K. D. Kim and W. Kanok-Nukulchai, "An element-based 9-node resultant shell element for large deformation analysis of laminated composite plates and shells", Structural Engineering and Mechanics, Vol.18(6), pp.807-829, 2004.
- [7] 한성천, 최삼열, "변형률 보간 9절점 쉘 요소를 이용한 적층복합판 과 쉘의 선형 정적 해석 및 자유진동 해석", 한국전산구조공학회논문집, 제17권 제4호, pp. 279-293, 2004.
- [8] 한봉구, 김덕현, 김세원, "3차원 복합재료 구조물의 해석", 한국강구조학회 학술발표대회논문집, 2005.
- [9] 이원홍, 한성천, 박원태, "점진기능재료(FGM)판의 휨, 진동 및 좌굴해석", 한국산학기술학회논문집, 제9권 제4호, pp. 1043-1049, 2008.
- [10] S. W. Tsai, "Composite design", 4th edition. Think Composites: Dayton, Ohio, 1988.
- [11] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, 1989.
- [12] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, "The Finite Element Method". Butterworth-Heinemann, London, 2000.

[13] E. M. B. Campello, P. M. Pimenta and P. Wriggers, "A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation", Computational Mechanics Vol. 31, pp. 505-518, 2003.

[14] J. C. Simo, D. D. Fox and M. S. Rifai, "On a stress resultant geometrically exact shell model", Part III: Computational aspects of the nonlinear theory, Computer Method sin Applied Mechanicsand Engineering, Vol. 79, pp. 21-70, 1990.

[15] J. N. Reddy, "A general nonlinear 3rd-order theory of plates with moderate thickness", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.25(6), pp. 677-686, 1990.

[16] J. N. Reddy, "Mechanics of laminated composite plates and shells", CRC Press: Florida, 2004.

[17] Y. Başar, Y. Ding and R. Schultz, "Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations", International Journal of Solidsand Structures, Vol.30, pp.2611-2638, 1993.

[18] I. Kreja and R. Schmidt, "Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells", International Journal of Non-linear Mechanics, Vol.41(1), pp.101-123, 2006.

한 성 천(Sung-Cheon Han)

[정회원]



- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 (공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학 철도건설과 부교수

<관심분야>

동적 구조해석, 유한요소법, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과 (공학박사)
- 2005년 10월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>

구조공학, 강구조공학, 복합재료

이 원 흥(Won-Hong Lee)

[정회원]



- 1987년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학석사)
- 1994년 2월 : 건국대학교 대학원 농공학과 (농학박사)
- 1997년 3월 ~ 현재 : 진주산업대학교 토목공학과 정교수

<관심분야>

복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 복합구조 설계