

국부적 불연속을 가진 도파관의 고주파수 대역 파동 반사 및 투과 해석 기법

A Numerical Method for Wave Reflection and Transmission Due to Local Non-Uniformities in Waveguides at High Frequencies

유 정 수*
(Jungsoo Ryue*)

*울산대학교 조선해양공학부
(접수일자: 2010년 4월 1일; 채택일자: 2010년 5월 27일)

도파관 (waveguide structures)에 지사구조 또는 균열과 같은 국부적 불연속이 존재하는 경우, 도파관을 따라 전파되는 파동은 이러한 국부적 불연속으로 인해 반사가 발생한다. 빔과 같이 단면의 형상이 단순한 도파관에서는 국부적 불연속에 의한 저주파수 대역 반사 및 투과 특성을 스펙트럴요소(spectral element, SE)와 유한요소(finite element, FE)를 연결한 스펙트럴요소/유한요소법(SE/FE method)으로 해석 할 수 있다. 그러나 도파관의 단면 형상이 복잡하거나 또는 고주파수 대역 해석에서는 빔 이론에 근거한 스펙트럴 요소를 이용하는 것이 부적합하다. 본 논문에서는 고주파수 대역 파동 반사 및 투과 특성 해석을 위해 스펙트럴요소 대신 스펙트럴수퍼요소(spectral super element, SSE)를 도입하고, 이를 유한요소와 결합시킨 SSE/FE 방법을 제안한다. 이 방법은 도파관 모델링에 스펙트럴 수퍼요소를 이용하므로 레일과 같이 단면의 형상이 복잡한 도파관의 고주파수 대역 해석에 적합하다. 본 논문에서는 SSE/FE 해석에 필요한 반무한 SSE(semi-infinite spectral super element)에 대한 정식화를 먼저 수행하고, 이를 FEM로 모델링한 국부적 불연속 구간과 연결하여 SSE/FE 모델을 구성하였다. 이 방법의 적용 예로써 단순 형상의 국부적 결함이 존재하는 직교 레일에 대하여 고주파수 대역 파동 반사 및 투과 계수를 계산하고 그 결과를 살펴보았다. 또한, 입사된 파워가 보존되어야 한다는 조건을 이용해 SSE/FE 방법의 수치오차를 추정하였다.

핵심용어: 파동 전파, 도파관, 스펙트럴수퍼요소법 (spectral super element method), 스펙트럴수퍼요소/유한요소법 (combined SSE/FE method)

투고분야: 구조음향 및 진동 분야 (11,2)

In waveguide structures, waves may be partially reflected by local non-uniformities. The effects of local non-uniformities has been previously investigated by means of a combined spectral element and finite element (SE/FE) method at relatively low frequencies. However, since the SE is formulated based on a beam theory, the SE/FE method is not appropriated for analysis at higher frequencies where complex deformation of the waveguide occurs. So it is necessary to extend this approach for high frequencies. For the wave propagation at higher frequencies, a combined spectral super element and finite element (SSE/FE) method is introduced in this paper. As an example of the application of this method, wave reflection and transmission due to a local defect in a rail are simulated at frequencies between 20kHz and 30kHz. Also numerical errors are evaluated by means of the conservation of the incident power.

Keywords: Wave Propagation, Waveguides, Spectral Super Element Method, Combined Spectral Super Element and Finite Element Method

ASK subject classification: Structural Acoustic and Vibration (11,2)

I. 서론

결합을 조기에 찾기 위한 구조물 상태진단 (structural health monitoring)은 구조물의 안전 유지를 위해 대단히 중요한 분야이다. 이러한 상태진단 분야에 응용하기 위한 연구의 하나로 파이프, 레일 등과 같이 단면의 형상이 길이방향으로 일정한 도파관 (waveguide structure) 구조물에서 발생하는 고주파수 대역 파동전파가 최근 활발히 연구되고 있다. 도파관을 따라 전파되는 파동이 플랜지 (flange), 균열 등과 같은 국부적 불연속을 만나게 되면 입사파의 일부는 반사되고 그 나머지는 투과될 것이다. 따라서 국부적 불연속에 의한 파동의 반사 및 투과 특성은 도파관 내에 존재하는 결함의 위치와 크기를 추정하는 인자로 사용되어 질 수 있다. 특히, 도파관을 따라 장거리 전파되는 파동을 사용하여 반사 및 투과 특성을 해석한다면 짧은 시간에 긴 구간을 검사하는 것이 가능할 수 있다.

Mace [1]는 단순 빔에 대하여 조인트 (joint)나 지지구조 (support)에 의해 발생하는 반사 및 투과계수를 이론적으로 유도하였다. Doyle 등 [2-4]은 빔 구조물에서의 파동 전파를 스펙트럴요소법 (spectral element method, SEM)으로 해석하였는데, 이 방법은 동적강성법 (dynamic stiffness method, DSM)이라고도 칭한다. Gopalakrishnan 등 [5]은 무한길이의 빔 구조물에 존재하는 국부적 불연속 (local non-uniformities) 구간을 유한요소 (FE)로 모델링하고 이를 반무한 (semi-infinite) 스펙트럴요소 (SE)와 연결함으로써 SE 방법을 확장한 SE/FE 방법을 제안하였다. 즉, 빔을 국부적 불연속이 없는 두 개의 반무한 구간과 국부적 불연속이 포함된 짧은 길이의 구간으로 나누어 각각을 스펙트럴요소와 유한요소로 모델링 한 후 이들을 연결하여 전체 모델을 구성하였다. 이 방법에서는 유한요소를 이용함으로써 국부적 불연속 구간에 대한 상세한 모델링이 가능하다는 장점이 있다. 한편, Shone 등 [6,7]은 SF/FE 모델에 외력을 가하여 해석하는 참고문

헌 [5]의 방법 대신 정상상태 입사파를 만들어 반사 및 투과계수를 계산하였다.

빔 이론에 기반하는 스펙트럴요소법은 경계면 (boundary surface)에서 하나의 노드만 가지므로 SE와 연결되는 유한요소 모델도 경계면의 노드 수를 하나로 줄여야 한다. 이를 유한요소 모델의 노드압축 (node condensation)이라 칭한다 [5]. 따라서 스펙트럴요소는 단면의 변형이 고려되어야 하는 고주파수 대역 해석에는 부적합하다.

위의 단면 형상을 가진 무한길이의 도파관에 대해서는 도파관유한요소법 (waveguide finite element method, WFEM)이 개발되어 고주파수 대역 해석에 활발히 이용되고 있다 [8-11]. WFEM은 분현에 따라 파수유한요소법 (wavenumber finite element method) [12] 또는 반해석적 유한요소법 (semi-analytical finite element method, SAFEM) [13,14]이라고도 불린다. 한편 Finnveden [15]은 변분원리 (variational principle)을 이용하여 길이가 유한한 빔 구조물을 해석할 수 있는 스펙트럴유한요소법 (spectral finite element method, SFEM)을 제안하였다. 위의 SFEM과 WFE를 결합하여 Birgersson 등 [16]은 스펙트럴수퍼요소 (spectral super element, SSE)을 제안하고, 이를 이용해 유한 길이의 평판에 대한 진동 해석을 수행하였다. SSE 방법은 도파관의 단면을 유한요소 모델링하여 길이방향 파동 전파를 해석하므로, 단면의 격자 구조가 같다면 SSE를 유한요소로 모델링된 국부적 불연속 구간과 노드압축 없이 손쉽게 연결할 수 있다는 장점이 있다.

참고문헌 [16]은 유한 길이를 가진 평판만을 다루고 있으므로 그 결과를 본 연구에 직접 적용하기에는 부적합하다. 따라서, 본 연구에서는 참고문헌 [16]에 제시된 방법을 확장하여 고체요소 (solid element)로 모델링된 반무한 (semi-infinite) 도파관을 정식화하였다. 즉, 임의 단면형상을 가지는 반무한 도파관에 대한 스펙트럴수퍼요소를 유도하고, 이를 유한요소로 모델링된 국부적 불연속 구간과 연결하여 무한 길이 도파관 모델을 구성하였다 (그림 1). 본 논문에서는 이 방법을 SSE/FE 방법이라 칭하였다.

SSE/FE 방법의 유용성을 확인하기 위한 적용 예로서, 본 논문에서는 철로 레일에 단순형상의 불연속이 있을 때의 고주파수 대역 파동 반사 및 투과 특성을 계산하고 그 결과를 살펴보았다. 본 해석에 이용한 파동은 철로를 따라 가장 멀리 전파하는 것으로 파악된 '레일 머리'를 따라 진행되는 수직방향 굽힘파이며, 이 파는 20 kHz에서 30 kHz 주파수 대역에서 가장 멀리까지 전파한다



그림 1. 두 개의 반무한 스펙트럴 수퍼요소(SSE)와 유한요소 (FE)로 구성된 국부적 불연속을 가진 무한 길이 도파관 SSE/FE 모델

Fig. 1. An SSE/FE model for an infinite waveguide with a local non-uniformity constructed by connected two semi-infinite spectral super elements and a finite element.

[17,18]. 이를 이용해 본 해석 예에서는 20 kHz에서 30 kHz 대역에서 국부적 불연속에 의해 발생하는 파워반사 및 투과계수를 계산하였다. 수치해석 결과를 실험으로 검증하기 위해서는 모델링 된 것파 동일한 형태의 결함을 가진 충분히 긴 레일이 있어야 하지만, 이를 확보하기는 현실적으로 어렵다. 따라서, 본 연구에서는 입사파가 가진 파워가 반사 및 투과를 통해 보존되는지를 수치해석 결과로부터 확인함으로써 해석 결과의 신뢰성을 간접적으로 검증하고자 하였다.

II. 스펙트럴수퍼요소 (Spectral Super Element)

스펙트럴수퍼요소법 (SSEM)은 Birgersson 등 [16]에 의해 제안되었으며, 그들은 이 방법을 이용해 평판의 진동해석을 수행하고 유한요소 해석 결과와 비교하였다. SSE 방법은 기존의 WFE 방법과 SFE 방법을 결합하여, 임의 단면을 가지는 길이가 유한한 도파관의 진동을 해석할 수 있다. 본 장에서는 참고문헌 [16]에 제시된 관계식들을 토대로 그 개념을 확장하여 반무한 도파관에 대한 SSE를 제안한다.

2.1. 도파관유한요소법

(Waveguide Finite Element Method)

WFE 방법은 길이가 무한히 긴 도파관을 따라 전파되는 파동 특성을 해석하는 수치해석 기법으로, 도파관의 단면만을 유한요소 모델링하여 길이방향 파동 전파를 해석한다. WFE 운동방정식에 대한 상세한 유도는 참고문헌 [9, 11, 12]에 소개되어 있으므로, 본 논문에서는 이를 생략하였다.

도파관을 따라 전파되는 파동은 길이방향 (x 방향)으로 조화운동을 한다고 가정하면, 변위 (u, v, w)는

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \chi(y, z) \tilde{u} e^{-jkx} e^{j\omega t} \\ v(x, y, z, t) &= \psi(y, z) \tilde{v} e^{-jkx} e^{j\omega t} \\ w(x, y, z, t) &= \xi(y, z) \tilde{w} e^{-jkx} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1)$$

와 같이 변수분리하여 쓸 수 있다. 여기서 χ, ψ, ξ 는 도파관 단면의 x, y 그리고 z 방향 변위이며, \tilde{u}, \tilde{v} 그리고 \tilde{w} 는 임의 상수 (scaling constant), ω 와 k 는 각주파수 (angular frequency)와 파수 (wavenumber)이다. 도파관의 2차원 단면을 FE 모델링하고 식 (1)의 해를 대입하여

표현한 WFE 지배방정식은 다음과 같다.

$$\{K_2(-jk)^2 + K_1(-jk) + K_0 - \omega^2 M\} \tilde{U} = 0 \quad (2)$$

여기서 K_2, K_1 그리고 K_0 는 구조물의 강성과 관련된 행렬이며, M 은 질량행렬 그리고 \tilde{U} 는 변위벡터로 단면의 모드형상 (mode shape)을 나타낸다. 식 (2)에 표현된 지배방정식은 파수 k 와 주파수 ω 를 변수로 가진 고유치문제 (eigenvalue problem)가 되며 두 변수 중 하나가 주어지면 해를 구할 수 있다. 즉, 주어진 파수에서 주파수를 구하는 고유치문제 (eigenvalue problem), 또는 주어진 주파수에서 파수를 구하는 다항고유치문제 (polynomial eigenvalue problem)가 되는 것이다. 위 두 가지 방법 중 어떤 방법으로 지배방정식을 풀 것인가는 어떤 해석결과가 필요한가에 따라 결정된다. 즉, 전파되는 파동의 분산선도를 얻고자 한다면 파수를 주고 주파수를 구하는 고유치문제로 풀어야 할 것이며, 만약 가진력에 대한 주파수별 응답특성을 얻고자 한다면 주파수를 주고 파수를 구하는 다항고유치문제로 해석해야 한다. 본 논문에서는 주파수별 응답특성이 필요하므로 식 (2)를 다항고유치문제로 해석한다.

식 (2)에서 구한 파수에는 양의 x 방향으로 진행하는 파와 음의 x 방향으로 진행하는 파가 쌍 (pair)으로 나타난다. 예를 들어, 단면의 유한요소 모델이 N 개의 자유도를 가지는 경우, 각각의 주파수에서 $2N$ 개의 파수가 구해진다. 파수는 복소수 (complex)로 표현되는데, 복소평면에서 실수축에 위치한 파수는 거리에 따른 감쇠 없이 전파되는 파동을 나타내며, 나머지는 거리에 따라 지수적으로 감쇠하는 근접장 파동 (near-field wave)을 나타낸다. 파동이 cut-on 되기 전에는 근접장 파동으로 존재하므로 해석 모델에 감쇠 (damping)를 고려하지 않더라도 이들 근접장 파동은 항상 존재한다.

2.2. 반무한 스펙트럴수퍼요소

(semi-infinite spectral super element)

먼저, 반무한 도파관에 대한 스펙트럴수퍼요소를 유도하기에 앞서, 유한 길이의 도파관에 대해 참고문헌 [16]에서 제시된 관계식들을 살펴본다. 길이가 유한한 도파관의 변위 (displacement)는 식 (2)에서 구한 파동해 (wave solution)의 중첩으로 표현할 수 있다. 예를 들어, 길이가 $2l$, ($-l \leq x \leq l$)인 도파관의 WFE 모델이 N 자유도를 가진다고 가정하면 변위벡터 $V(x)$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{V}(x) = \sum_{m=1}^{2N} a_m \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_m e^{-jk_m x} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(x) \mathbf{a} \quad (3)$$

여기서 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_m$ 은 k_m 에 대한 모드형상 (mode shape) 벡터, $\boldsymbol{\Phi}$ 는 각 파동의 모드형태가 포함되어 있는 크기 $N \times 2N$ 의 행렬, \mathbf{a} 는 $2N \times 1$ 의 파동크기 벡터, $\mathbf{E}(x)$ 는 $e^{-jk_m x}$ 항을 담고 있는 $2N \times 2N$ 의 행렬이다. 양 끝단 $x = \pm l_r$ 에서 근접장 파동의 크기가 증가하여 발생하는 수치오차를 없애기 위해 $\mathbf{E}(x)$ 를 아래와 같이 수정하여 사용한다 [10,16].

$$\mathbf{E}_{\text{num}} = e^{-jk_m(x-l_r)} \quad \text{for } \text{Im}(k_m) > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_{\text{num}} = e^{-jk_m(x+l_r)} \quad \text{for } \text{Im}(k_m) < 0. \quad (5)$$

식 (3)에서, 미지변수 \mathbf{a} 는 양 끝단에서 정의되는 경계 조건을 이용해 구할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{V}(-l_r) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(-l_r) \mathbf{a} = \mathbf{W}_1, \quad (6)$$

$$\mathbf{V}(+l_r) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(+l_r) \mathbf{a} = \mathbf{W}_2, \quad (7)$$

여기서 \mathbf{W}_1 과 \mathbf{W}_2 는 각각 $x = \mp l_r$ 에서 정의되는 변위 벡터이다. 식 (6), (7)로부터 \mathbf{a} 는

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(-l_r) \\ \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(+l_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{W}, \quad (8)$$

로 표현된다. 따라서 변위벡터 $\mathbf{V}(x)$ 는

$$\mathbf{V}(x) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(x) \mathbf{A} \mathbf{W} \quad (9)$$

이며, 식 (9)에서 미지변수는 \mathbf{W} 이다.

아래 반무한 도파관의 경우를 살펴보면, 유한 길이 도파관의 경우와 달리 양의 x 방향 또는 음의 x 방향으로 진행하는 파동만이 존재한다. 예를 들어, 양의 x 방향으로 무한히 긴 도파관 ($0 < x < \infty$)에서, 변위 벡터 $\mathbf{V}(x)$ 는

$$\mathbf{V}(x) = \sum_{m=1}^N a_{1,m} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{1,m} e^{-jk_+ x} = \boldsymbol{\Phi}_+ \mathbf{E}_+ \mathbf{a}_+ \quad (10)$$

로 표현되며, 여기서 하첨자 '+'는 양의 방향으로 진행

하는 파동을 나타낸다. 따라서, 식 (10)은 양의 방향으로 진행하는 N 개의 파동만을 포함한다. $x=0$ 에서 경계조건이 \mathbf{W}_0 으로 주어지면, \mathbf{a}_+ 는

$$\mathbf{a}_+ = [\boldsymbol{\Phi} \mathbf{E}(-l_r)]_+^{-1} \mathbf{W}_0 = \mathbf{A}_+ \mathbf{W}_0 \quad (11)$$

따라서, 식 (10)의 $\mathbf{V}(x)$ 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{V}(x) = \boldsymbol{\Phi}_+ \mathbf{E}_+ \mathbf{A}_+ \mathbf{W}_0 \quad (12)$$

2.3. 스펙트럴 유한요소법

(Spectral Finite Element Method)

반무한 도파관의 경계에서 입력 하중벡터 \mathbf{F}_0 가 정의된다면, \mathbf{W}_0 는 스펙트럴 유한요소법 (SFEM)에서 얻어지는 동적강성행렬 (dynamic stiffness matrix)을 이용해 구할 수 있다. 반무한 도파관에 대한 동적강성행렬 (\mathbf{D}_\pm)는

$$\mathbf{D}_\pm = \mathbf{A}_\pm^{-1} (\boldsymbol{\Theta}_\pm \otimes \mathbf{G}_\pm) \mathbf{A}_\pm \quad (13)$$

로 표현된다 [16]. 여기서 하첨자 ' \pm '는 반무한 도파관이 어느 방향 (양의 x 또는 음의 x 방향)으로 무한한지를 나타내며, 상첨자 ' T '는 전치행렬, \mathbf{G}_\pm 는 크기 $N \times N$ 행렬로써 그 원소들은 아래와 같다.

$$(\mathbf{G}_\pm)_{mn} = \frac{\pm 1}{j(k_m + k_n)} \quad (14)$$

식 (13)에서 \otimes 는 두 행렬의 Hadamard 곱 (Hadamard product)으로,

$$\boldsymbol{\Theta}_\pm = \left(\sum_p \sum_q \kappa_\pm^p (\boldsymbol{\Phi}_\pm^T \boldsymbol{\epsilon}_{pq} \boldsymbol{\Phi}_\pm) \kappa_\pm^q - \omega^2 (\boldsymbol{\Phi}_\pm^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_\pm) \right) \quad (15)$$

이다 [16]. $\boldsymbol{\epsilon}_{pq}$ 는 식 (2)의 강성행렬을 구성하는데 이용되는 $N \times N$ 의 변형률 행렬이며, \mathbf{k}_\pm 는 양의 x 방향 또는 음의 x 방향으로 진행하는 파수로 구성된 $N \times N$ 의 대각 행렬이다. 따라서, 식 (13)의 동적강성행렬은 WFE 해석 결과를 이용해 얻을 수 있으며 $x=0$ 에서 입력 하중 \mathbf{F}_0 만 주어진다면 경계에서의 변위 \mathbf{W}_0 는 $\mathbf{W}_0 = (\mathbf{D}_\pm)^{-1} \mathbf{F}_0$ 를 이용해 얻을 수 있다. 최종적으로 \mathbf{W}_0 를 알면, 식 (12)로부터 변위벡터 $\mathbf{V}(x)$ 를 구할 수 있다.

III. 스펙트럴수퍼요소/유한요소법 (SSE/FE Method)

본 장에서는 국부적 불연속을 갖는 도파관에서 발생하는 파동 반사 및 투과를 해석하기 위해 스펙트럴수퍼요소 (SSE)와 유한요소 (FE)를 결합한 SSE/FE 방법에 대해 소개한다. SSE/FE 방법에서는 국부적 불연속을 가진 무한 길이 도파관을 그림 1에 나타난 것과 같이 세 영역으로 나눈다: SSE 방법으로 모델링되는 두 개의 반무한 도파관, 그리고 FE 방법으로 모델링되는 국부적 불연속을 가지는 유한 길이의 도파관. 이 세 요소가 연결되는 경계면에서 SSE와 FE가 동일한 격자를 가진다면 이들은 노드 압축 없이 손쉬게 연결될 수 있으며, 이는 SSE/FE 방법이 가지는 장점 중 하나이다.

3.1. SSE와 FE 연결

SSE로 모델링된 부분과 FE로 모델링된 부분을 연결하기 위해서는 FE로 모델링된 부분의 동적강성행렬이 경계면 (boundary)에 위치한 노드의 자유도 (nodal degree of freedom)로 표현될 수 있도록 변환되어야 한다. 유한요소 모델의 경계면에 위치한 노드에 외력이 작용한다고 가정하면 동적강성행렬 $D_f = K_f - \omega^2 M_f$ 는 다음과 같이 분할될 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_b \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{f,bb} & D_{f,bi} \\ D_{f,ib} & D_{f,ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_b \\ W_i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

여기서 하첨자 b 와 i 는 각각 경계면과 모델 내부에 위치한 노드를 나타낸다. 식 (17)에서 얻어지는 축약 동적강성행렬 (condensed dynamics stiffness matrix), D_f 는 아래와 같다.

$$D_f = D_{f,bb} - D_{f,ib} D_{f,ii}^{-1} D_{f,ib} \quad (18)$$

그림 1에 보인 SSE와 FE가 결합된 모델의 경우, 세 영역의 동적강성행렬, D_s 와 D_f 는 일반적인 유한요소해석에서 행해지는 방식대로 결합되어 새로운 조합행렬 (combined matrix) D_c 가 얻어진다. 강성행렬 D_c 가 구해지고 외력 F 가 주어진다면 세 영역이 연결되는 두 경계면의 노드 변위 W 는

$$D_c W = F \quad (19)$$

로부터 구할 수 있다. 따라서, 최종적으로 얻고자 하는 SSE 영역의 변위 $V(x)$ 는 식 (19)와 식 (12)로부터 얻을 수 있다.

3.2. 입사파 모델링

앞 절에서 나타난 것과 같이 파동의 반사와 투과 특성을 살펴보기 위해서는 해석 모델에 입사파가 존재해야 한다. 그러나, 반사 및 투과 특성 해석을 위해서는 그림 2 (a)에 나타난 것과 같이 외력이 없는 정상상태에서 입사파, 반사파 및 투과파가 두 개의 반무한 SSE에 존재해야 한다. 본 논문에서는 참고문헌 [6,7]에 제안된 방법을 이용해 SSE/FE 모델에 정상상태 (steady-state) 입사파를 구현하였다. 이 해석 모델은 그림 2 (b)에 보인 것과 같이 크기는 같고 방향이 반대인 두 블록힘 (blocked force)을 중첩하는 등가 시스템으로 표현될 수 있다.

그림 2 (b)의 블록힘, f_b 는 두 개의 반무한 SSE를 연결한 무한 도파관 모델에서 얻을 수 있다. 두 반무한 SSE가 연결되는 경계(x_0)에서 입사파(I)에 의해 발생하는 변위가 W_0 라고 가정하면, 이 값은 식 (1)에서 얻는 입사파의 모드형상 벡터가 될 것이다. 따라서, 두 반무한 SSE를 연결해 얻은 동적강성으로부터 아래와 같이 x_0 에서의 변

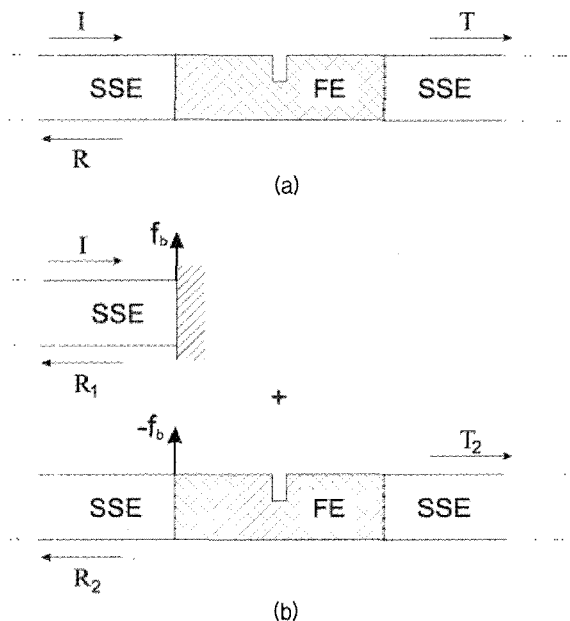


그림 2. (a) 국부적 불연속을 가진 무한길이 도파관 SSE/FE 모델. (b) 파동 반사 및 투과계수를 해석하기 위해 블록힘을 이용해 표현한 등가 모델

Fig. 2. (a) Combined SSE/FE model for an infinite waveguide with a local non-uniformity, (b) equivalent model with blocked forces to predict wave reflection and transmission.

위 $-W_0$ 를 만드는 힘 벡터 f_0 를 얻을 수 있다.

$$f_0 = -(D + D_1)W_0 \quad (20)$$

입사파에 의해 만들어지는 변위 W_0 에 힘 f_0 에 의해 만들어지는 반대 위상의 변위 $-W_0$ 가 더해지면 $x \geq x_0$ 인 구간에서는 변형이 발생하지 않으므로, f_0 는 그림 2(b)에 필요한 블록힘이 된다.

3.3. 파워반사 및 투과계수

파워반사 및 투과계수 r_{ij} 와 t_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.

$$r_{ij} = \frac{H_{ref}^j}{H_{inc}^j}, \quad t_{ij} = \frac{H_{tra}^j}{H_{inc}^j} \quad (21)$$

여기서 H_{inc}^j 는 입사되는 파동 j 의 파워, H_{ref}^j 와 H_{tra}^j 는 반사 및 투과되는 파동 i 의 파워를 나타내며, 이들 파워는 변위 벡터 $V(x)$ 를 이용해 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} H_{inc}^j &= \frac{1}{2N} \rho S \omega^2 c_{g,inc}^j \sum_S |V(x)_{inc}^j|^2 \\ H_{ref}^i &= \frac{1}{2N} \rho S \omega^2 c_{g,ref}^i \sum_S |V(x)_{ref}^i|^2 \\ H_{tra}^i &= \frac{1}{2N} \rho S \omega^2 c_{g,tra}^i \sum_S |V(x)_{tra}^i|^2 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 $\rho S \omega^2$ 는 단면적 S 를 가진 도파관의 단위길이당 질량, c_g 는 그룹속도 (group velocity), \sum_S 는 단면에 대한 합산을 의미한다. 본 연구에서는 도파관의 감쇠 (damping)를 고려하지 않으므로, 파수가 순 실수 (pure real)인 파동만이 길이방향으로 손실 없이 파워를 전달한다. 따라서, 이들 파동에 대해서만 파워를 계산하였으며, $|V(x)_{inc}^j|^2$, $|V(x)_{ref}^i|^2$ 그리고 $|V(x)_{tra}^i|^2$ 은 모두 거리 x 에 관계없이 일정한 값을 가진다.

IV. 해석 예: 철로 레일에서의 반사 및 투과계수

본 장에서는 앞서 기술한 SSE/FE 방법의 유용성을 확인하고 그 해석오차를 검토하기 위해 단순 형상의 결함 (defect)을 가진 철로 레일에 대해 SSE/FE 방법을 적용하

여 파워반사 및 투과계수를 계산하였다. SSE/FE 방법의 수치오차는 입사된 파워가 반사 및 투과된 파워를 통해 보존되는지를 검토하여 산출하였다.

4.1. 철로 (railway track) 모델링

본 연구에서 이용한 철로 레일은 UIC60이다. 이 레일은 단면이 좌우 대칭이므로 그림 3에 보인 것과 같이 단면의 반만을 모델링하고 중앙면 (mid-plane)에 '대칭 (symmetric)', '반대칭 (antisymmetric)' 경계조건을 부여하였다. 대칭 경계조건에서는 대칭면의 y 방향 변위가 구속되므로, 수직방향 파동 (vertical wave)과 좌우대칭 길이방향 파동 (symmetric longitudinal wave)이 발생한다. 반면, 반대칭 경계조건에서는 대칭면의 x 와 z 방향 변위가 구속되어, 횡방향 파동 (lateral wave), 비틀림 파동 (torsional wave) 그리고 좌우 반대칭의 길이방향 파동 (antisymmetric longitudinal wave)이 얻어진다.

철로 구성 요소 중 침목 (sleeper)과 도상 (ballast)은 1 kHz 이하의 저주파수 대역 기동에만 기여하므로 본 연구에서는 레일과 레일 패드만으로 철로 모델을 구성하였다 [19]. 레일과 침목 사이에 설치되는 레일 패드는 일반적으로 이산지지 (discrete support) 요소이지만, 20 kHz 이상에서는 연속지지 (continuous support) 요소로 가정할 수 있다 [20]. 그림 3에 나타낸 철로 모델은 80 kHz 까지의 고주파수 대역 해석을 위해 참고문헌 [17,18]에서 이용된 것으로, 철로의 파동 전파 특성 실험을 통해 고주파수 대역 해석에 대한 적합성이 검증되었다. 그림 3의 철로 모델에 대한 보다 자세한 사항은 참고문헌 [17,18]에 기술되어 있다.

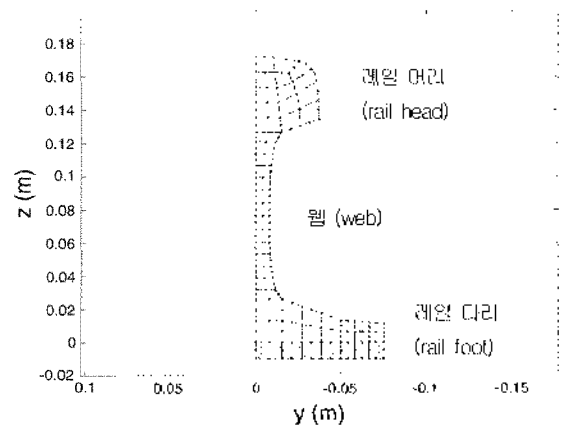


그림 3. 레일과 레일패드에 대한 단면 모델. (음영 부분: 레일 패드)
Fig. 3. Cross-sectional model of a rail on foundation. The shaded area represents the rail pad.

본 모델에 사용된 레일 패드의 정적 강성 (static stiffness)은 수직방향으로 150 MN/m, 횡방향으로 20 MN/m을 설정하였다. 그러나, 고주파수 대역에서는 레일 패드 내부에 발생하는 수직방향 파동 (internal wave)의 영향으로 강성이 크게 증가한다. 본 해석에 이용된 레일 패드의 경우, 20 kHz 이상에서 이러한 강성의 변화가 고려되어야 하며, 그 값으로 정적 강성보다 10배 증가한 1500 MN/m (수직방향)과 200 MN/m (횡방향)을 각각 이용하였다 [18]. 본 절에서는 극부적 불연속에 의한 파동 반사 및 투과계수를 해석하므로 감쇠 (damping)는 고려하지 않았다.

본 해석 에에서는 레일 머리를 따라 전파하는 수직방향 굽힘파를 입사파로 설정하였으며, 그림 3의 철로 모델 중앙면에 '대칭' 경계조건을 부여하여 구한 파동의 분산선

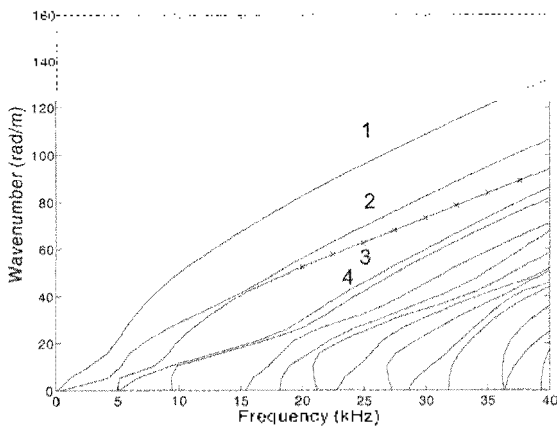


그림 4. 그림 3의 철로 모델에서 구한 수직방향 파동 및 좌우대칭 길이방향 파동의 분산선도. ×, 레일 머리의 수직방향 굽힘파

Fig. 4. Dispersion curves of the vertical and symmetric longitudinal waves predicted from the rail shown in Fig. 3. ×, the vertical bending wave in the rail head.

도를 그림 4에 나타내었다. 본 논문에서 중앙면이 '비대칭' 경계조건을 가질 때 얻어지는 파동을 고려하지 않았으며, '비대칭' 경계조건에서 발생하는 파동의 분산선도는 참고문헌 [17]에 기술되어 있다. 그림 4의 분산선도를 보면, 선들이 서로 교차하지 않는 것을 확인할 수 있으며, 이러한 특성을 curve veering 이라 부른다 [21]. 파동이 서로 교차하지 않으므로 비분산파 (non-dispersive wave)인 길이방향 파동 (longitudinal wave)의 경우 여러 파동들이 그 형태를 바꾸어가며 구간별로 비분산 특성을 구성하고 있는 것을 볼 수 있다. 다시 말해, 그림 4의 파동들은 서로 교차하지 않는 대신 파동의 형태를 교환하며 분산선도를 구성하고 있다.

본 논문에서 파동들은 그림 4에 나타낸 것처럼 파수가 높은 파동에서 낮은 파동 순으로 번호를 부여해 기술하였다. 해석에 이용한 주파수 대역은 관심 파동인 레일 머리의 수직방향 굽힘파가 가장 밀리까지 전파하는 것으로 파악된 20 kHz에서 30 kHz의 구간으로 설정하였다. 이 구간 중 25 kHz에서 파동 1, 2, 4는 레일 다리의 수직방향 굽힘파, 파동 3은 레일 머리의 수직방향 굽힘파이다. 한편, 파동 5는 웹과 레일 다리의 길이방향 변형과 레일 다리의 수직방향 굽힘이, 파동 6은 레일 머리와 웹의 길이방향 변형과 레일 다리의 굽힘이, 파동 7은 웹의 길이방향 변형과 레일 다리의 수직방향 굽힘이 동시에 일어나는 파동이며, 파동 8은 웹과 레일 다리의 길이방향 변형을 가지며, 마지막으로 파동 9는 레일 전체의 길이방향 변형과 레일 다리의 수직방향 굽힘이 동시에 발생하는 파동이다. 다시 말해 파동 5, 6, 7, 8과 9는 전체변형 (global deformation)을 가지는 파동이라 할 수 있다. 약 25 kHz 부근에서 파동1부터 5까지의 모드형태는 그림 5에 나타내었다.

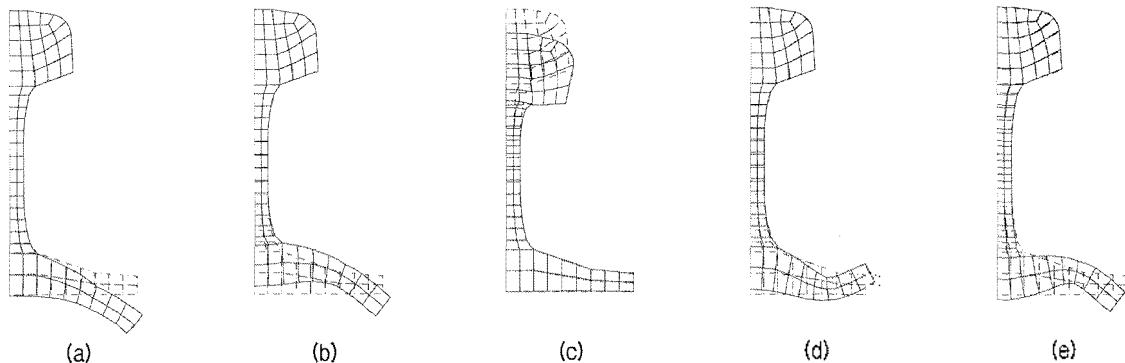


그림 5. 그림 4의 파동 1부터 5가 약 25 kHz 부근에서 가지는 변형 모습. (a) 1번 파동, (b) 2번 파동, (c) 3번 파동, (d) 4번 파동, (e) 5번 파동

Fig. 5. Deformation shapes of the waves 1 to 5 in Fig. 4 at around 25 kHz. (a) wave 1, (b) wave 2, (c) wave 3, (d) wave 4, (e) wave 5.

철로 레일에 존재하는 국부적 불연속은 그림 6에 나타난 것과 같이 단순화하여 모델링하였다. 즉, FE로 모델링된 구간의 중앙에서 레일 머리 부분의 유한요소 한 열을 제거함으로써 국부적 불연속을 모델링하였다. 본 결합 모델은 흔히 'V'형태의 노치(notch)로 다루어지는 균열(crack)을 신뢰성 있게 모사하기 위한 모델로는 미흡하다. 그러나 본 논문에서는 철로의 일부가 파손, 망실되거나 또는 용접, 천공(hole) 등으로 발생할 수 있는 일반적인 형태의 국부적 단면 변화를 가정하고 이를 손쉽게 모델링하기 위해 한 방법으로 그림 6과 같은 결합 모델을 채택하였다. 그림 5에 보인 것과 같이 레일의 절반만이 모델링되므로, 본 해석에서는 좌우 대칭 형태의 결합만이 고려된다.

파동의 장거리 전파라는 관점에서 볼 때 레일 다리를 따라 진행하는 파동은 레일 다리에 연결된 레일 패드의 높은 감쇠로 인해 장거리 전파가 불가능하므로 관심 파동이 되지 못한다. (일반적으로 레일 패드의 감쇠계수는 레일의 감쇠계수 보다 10^3 배 정도 크다). 즉, 레일 다리의 진동은 필연적으로 레일 패드의 진동을 수반하므로 레일 다리의 진동이 동반된 파동은 레일 다리의 진동이 수반되지 않는 파동에 비해 멀리까지 전파되지 못한다. 이러한 이유로 본 논문에서는 레일 머리를 따라 전파되는 파동에 영향을 줄 수 있도록 그림 6과 같이 레일 머리에 존재하는 결함을 가정하였다.

4.2. 반사 및 투과계수 해석

본 절에서는 철로 레일에 존재하는 그림 6의 국부적 불연속에 대해 파워반사계수와 투과계수를 계산하였다. 해석에 이용한 입사파, 반사파 및 투과파로는 철로 레일

을 따라 가장 멀리 전파하는 것으로 파악된 레일 머리를 따라 전파되는 수직방향 굽힘파(vertical bending wave)를 선택하였으며, 이 파동의 분산선도는 그림 4에 기호로 나타내었다. 레일 머리를 따라 전파되는 수직방향 굽힘파는 20 kHz ~ 30 kHz 대역에서 가장 멀리까지 전파하는 것으로 알려져 있다 [18]. 따라서, 본 해석에서는 20 kHz에서 30 kHz 까지의 주파수 대역에 대해 파워반사 및 투과계수를 산출하였다.

먼저 반부한 스펙트럼수퍼요소와 유한요소가 연결된 SSE/FE 방법의 수치오차를 살펴보기 위하여 국부적 불연속이 없는 균일 단면의 레일을 SSE/FE 방법으로 모델링하고 그 때의 파워반사 및 투과계수를 계산하였다. 국부적 불연속이 없는 경우이므로, 이론적으로 파워반사계수 r_{ij} 와 투과계수 t_{ij} 는 파동의 형태에 관계없이 각각 0과 1이 되어야 하며, $i \neq j$ 일 때 $r_{ij} = t_{ij} = 0$ 이 되어야 한다. 그림 6에는 그림 4에 표시된 파동 중 25 kHz에 존재하는 9개의 탄성파에 대한 파워반사 및 투과계수를 나타내었다. 해석된 파워반사계수(그림 6(a))는 모두 -45 dB 이하로 충분히 작은 오차를 보이고 있으며, 그림 6(b)에서 파워투과계수는 모두 거의 1(0 dB)로 나타남을 알 수 있다. 그림 7의 결과를 통해, SSE/FE 방법의 수치오차가 약 10^{-5} 이하의 아주 작은 수준임을 확인할 수 있다.

본 해석에서는 철로 모델에 감쇠를 고려하지 않았으므로 그림 6과 같은 국부적 불연속이 있는 경우에도 입사파의 파워는 보존되어야 한다. 그러나, 국부적 불연속에 의해 파동의 모드변환(mode conversion)이 발생하여 주어진 입사파가 여러 형태의 파동으로 변환되어 반사 및 투과된다. 따라서, 입사된 전체 파워는 보존되지만 이로부터 개별 파동이 가지는 수치오차를 계산해 낼 수 없다.

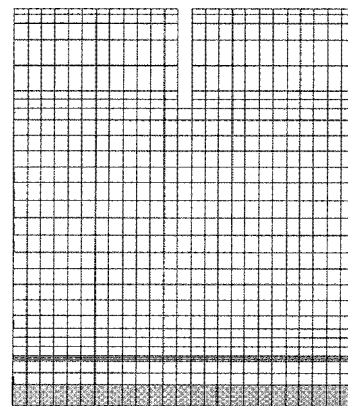
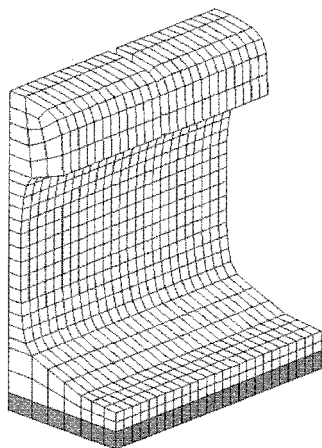


그림 6. 유한요소로 모델링된 국부적 결함

Fig. 6. A crack modelled by finite elements seen by two different angles.

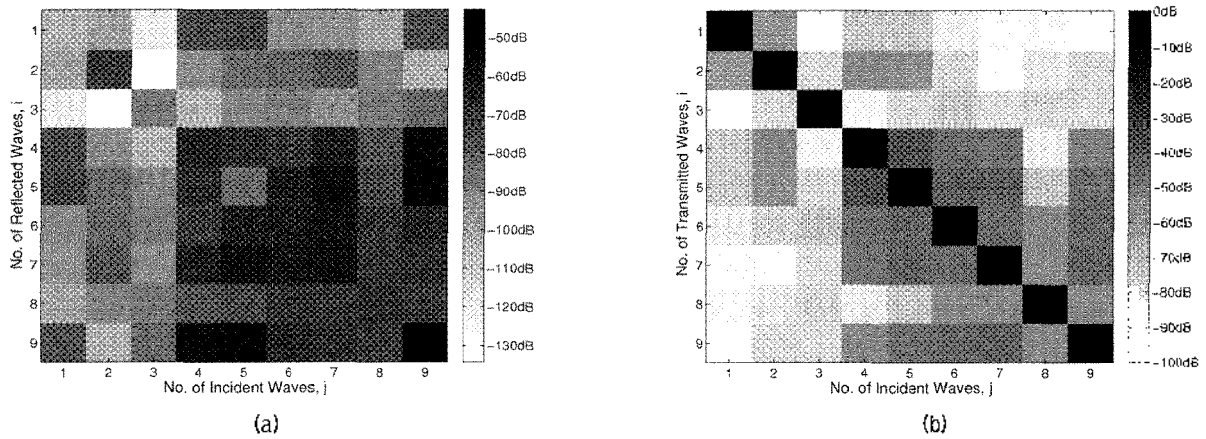


그림 7. 결합이 없는 균일한 레일에 대해 SSE/FE 방법으로 구한 25 kHz 파워반사 및 투과계수. (a) 파워반사계수, (b) 파워투과계수
 Fig. 7. Power reflection and transmission coefficients predicted from the combined SSE/FE method for a homogeneous rail at 25 kHz. (a) Power reflection coefficients, (b) power transmission coefficients.

본 연구에서는 개별 파동이 가지는 수치오차를 모두 유사한 수준으로 가정하고 입사 파워 보존을 이용해 국부적 불연속이 있을 때의 SSE/FE 방법 수치오차를 추정하였다. 입사된 파워는 반사 및 투과된 파워와 같아야 하므로 식 (23)을 만족하여야 한다.

$$\sum |r_{ij}| + \sum |t_{ij}| = 1 \quad (23)$$

그림 8에는 그림 6의 국부적 불연속에 대한 SSE/FE 모델의 수치오차를 나타내었다. 오차의 수준은 약 10^{-1} 정도로 균일한 레일에서 얻은 결과보다는 조금 높지만 여전히 낮은 수준임을 확인하였다.

그림 6에 보인 국부적 불연속의 경우, 파워 보존을 통해 예측된 SSE/FE 방법의 수치오차가 10^{-1} 정도 수준임

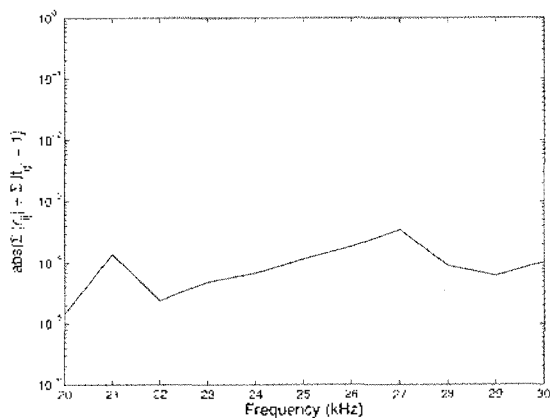


그림 8. 그림 6의 국부적 불연속이 있는 레일에 대해 예측된 SSE/FE 방법의 수치 오차
 Fig. 8. Errors predicted from the SSE/FE method for the connected rail model with the local-nonuniformity shown in Fig. 6.

을 확인하였으므로 다음으로는 개별 파동별로 파워반사 및 투과계수를 해석하였다. 앞서 언급한 것과 같이 개별 파동에 대한 반사 및 투과계수의 해석오차는 예측할 수 없으나, 개별 파동에 대한 해석오차의 합산이라고 볼 수 있는 그림 8의 결과보다는 낮을 것으로 가정하였다. 그림 6의 국부적 불연속은 레일 머리에만 존재하므로, 레일 머리를 따라서 전파되는 파동에서 가장 큰 반사가 발생할 것이며 웹 또는 레일 다리를 따라 전파되는 파동은 반사 없이 대부분 투과될 것으로 예상할 수 있다. 그림 9에는 25 kHz에서 예측된 파동 별 파워반사 및 투과계수를 나타내었으며, 수치오차를 고려하여 10^{-1} (-40 dB)보다 큰 계수만을 표현하였다. 그림 9 (a)의 반사계수를 보면, r_{33} 과 r_{66} 에서 상대적으로 높은 값을 가짐을 알 수 있으며 이는 파동 3과 파동 6이 상대적으로 큰 레일 머리의 변형을 가지기 때문이다. 한편 그림 9 (b)에서는 파동 3과 6을 제외한 파동들, 즉 레일 머리의 변형이 크지 않은 파동들에서 높은 투과계수가 일어짐을 알 수 있으며, 이러한 해석 결과는 예상과 잘 부합함을 확인할 수 있다.

그림 6의 국부적 불연속에 대한 SSE/FE 방법의 수치오차가 10^{-1} 정도 수준임을 확인하였으므로, 레일 머리를 따라 전파되는 수직방향 굽힘파 (그림 4의 파동 '3')가 가지는 20 kHz부터 30 kHz 대역 파워반사 및 투과계수를 해석하고 그 결과를 그림 9에 나타내었다. 국부적 불연속이 레일 머리에 존재하므로 레일 머리를 따라 전파되는 수직방향 굽힘파는 반사가 크고 투과는 적은 것이다. 그림 10의 결과는 이러한 경향을 잘 반영하고 있다. 다만, 21 kHz와 27 kHz에서 갑작스런 반사계수의 감소가 발생하고 있는데 그 원인은 새로운 파동의 'cut-on'에서 찾을

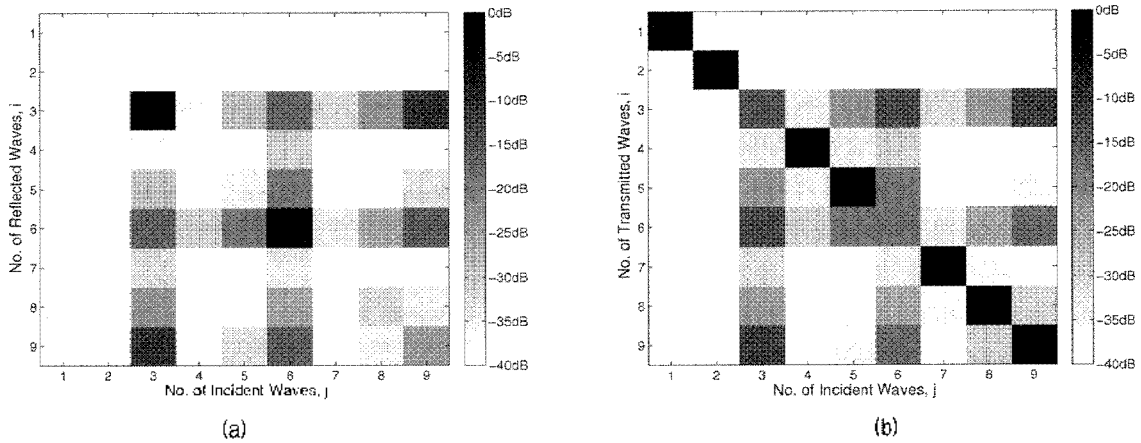


그림 9. 국부적 결함 (그림 6)이 있는 레일에 대해 SSE/FE 방법으로 구한 25 kHz 파워반사 및 투과계수 (a) 파워반사계수, (b) 파워투과계수
 Fig. 9. Power reflection and transmission coefficients at 25 kHz predicted from the SSE/FE method for a rail with a local non-uniformity shown in Fig. 6. (a) Power reflection coefficients, (b) power transmission coefficients.

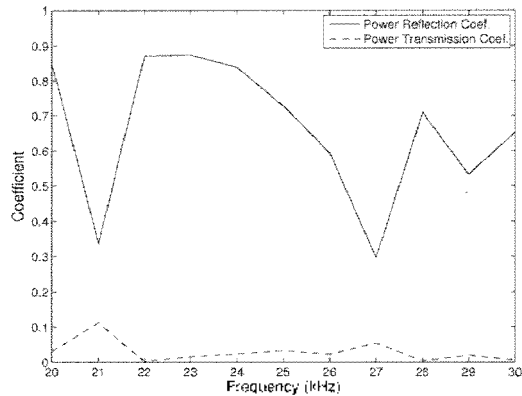


그림 10. 국부적 불연속(그림 6)이 있는 레일에 대해 SSE/FE 방법으로 구한 레일 머리를 따라 전파하는 수직방향 굽힘파의 파워반사 및 투과계수
 Fig. 10. Power reflection and transmission coefficients of the vertical bending wave in the rail head, predicted by the SSE/FE method for a rail with a local non-uniformity shown in Fig. 6.

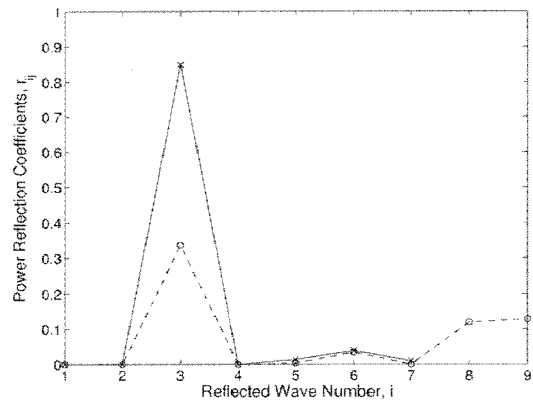


그림 11. 레일 머리를 따라 전파되는 수직방향 굽힘파가 입사되었을 때 예측된 반사파의 파워반사계수. x, 20 kHz; o, 21 kHz
 Fig. 11. Power reflection coefficients of all reflected waves propagating for the incident vertical bending wave in the rail head. x, at 20 kHz; o, at 21 kHz.

수 있다. 그림 4에서 확인할 수 있는 것처럼, 20 kHz와 21 kHz 사이에서 두 개의 파동 (그림 11의 파동 '8'과 '9')이 cut-on된다. 이로 인해 입사파가 지닌 파워 중 일부가 새롭게 cut-on된 파동에 실려 반사되므로 수직방향 굽힘파 (파동 '3')의 반사계수가 낮아짐을 그림 11에서 알 수 있다. 그럼에도 불구하고, 대부분의 입사된 파워는 입사파의 동일한 형태의 파동 '3'으로 가장 크게 반사됨을 확인할 수 있다. 그림 4의 분산선도로부터 27 kHz 부근에서도 동일한 현상이 발생함을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 무한 길이의 도파관에 국부적 불연속이

있을 때 발생하는 파동의 고주파수 내역 반사 및 투과를 해석하기 위한 수치해석 기법인 스펙트럴수요요소/유한요소 방법 (SSE/FE 방법)을 제안하였다. 이 방법에서는 스펙트럴수요요소 (SSE)를 이용해 반부한 도파관을, 그리고 유한요소 (FE)를 이용해 국부적 불연속 구간을 모델링하여 결합함으로써 국부적 불연속이 있는 무한 길이 도파관을 구성하였다. SSE는 단면만을 FE 모델링하여 해석하므로 레일과 같이 단면의 형상이 복잡한 도파관 모델링이 가능하다. 더욱이, SSE와 FE로 모델링되는 구간이 같은 단면 각지구조를 갖는다면 두 모델이 연결되는 경계면에서 자유도의 축약 없이 손쉽게 연결할 수 있다는 장점이 있다.

이 SSE/FE 방법의 유용성을 확인하기 위해 레일 머리

를 따라 전파되는 파동이 단순형상의 국부적 불연속에 의해 반사/투과되는 특성을 20 kHz에서 30 kHz까지의 주파수에 대해 살펴보았다. 국부적 불연속은 모델링의 용이성을 위해 레일 머리의 단순한 수직방향 단면 변화로 가정하였다. 먼저, SSE/FE 방법이 가지는 수치오차를 파워 보존 조건을 이용해 살펴보았으며, 예측된 수치오차는 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 수준이었다. 또한, 레일을 따라 가장 멀리까지 전파하는 레일 머리의 수직방향 굽힘파에 대해 파워 반사계수와 투과계수를 계산하고 그 결과를 검토하였다. 이러한 해석 예를 통해 SSE/FE 방법이 국부적 불연속을 가진 도파관의 고주파수 대역 파동 전파 특성을 해석하는데 유용함을 간접 확인하였다. 차후 단순한 형상의 적용 모델을 선정하여 실험을 통해 SSE/FE 방법을 검증하는 후속 연구가 수행되어야 할 것으로 판단된다.

참고 문헌

1. B. R. Mace, "Wave reflection and transmission in beams," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 97, pp. 237-246, 1984.
2. J. F. Doyle and S. Kamle, "An experimental study of the reflection and transmission of flexural waves at discontinuities," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp. 669-673, 1985.
3. J. F. Doyle and S. Kamle, "An experimental study of the reflection and transmission of flexural waves at an arbitrary T-joint," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pp. 136-140, 1987.
4. J. F. Doyle, *Wave Propagation in Structures: Spectral analysis using fast discrete Fourier transforms*, Springer, New York, 1997.
5. S. Gopalakrishnan and J. F. Doyle, "Spectral super-elements for wave propagation in structures with local non-uniformities," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 121, pp. 77-90, 1995.
6. S. P. Shone, B. R. Mace and T. P. Waters, "Reflection and transmission coefficients using the spectral element method: application to crack modelling in beams," in *Proceedings of the Institute of Acoustics Spring Conference*, pp. 115-128, March 2004.
7. S. P. Shone, B. R. Mace and T. P. Waters, "Reflection of waves from cracks in beams," in *Proceedings of ISMA2004*, Sep. 2004.
8. L. Gavric, "Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 183, pp. 531-543, 1995.
9. S. Finnveden, "Spectral finite element analysis of the vibration of straight fluid-filled pipes with flanges," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 199, pp. 125-154, 1997.
10. C.-M. Nilsson, "Waveguide finite elements applied on a car tyre," Ph.D. thesis, KTH, Stockholm, 2004.
11. S. Finnveden, "Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 273, pp. 51-75, 2004.
12. X. Sheng, C. J. C. Jones and D. J. Thompson, "Modelling ground vibration from railways using wavenumber finite- and boundary-element methods," *Proceedings of The Royal Society A*, vol. 461, pp. 2043-2070, 2005.
13. T. Hayashi, W.-J. Song and J. L. Rose, "Guide wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example," *Ultrasonics*, vol. 41, pp. 175-183, 2003.
14. I. Bartoli, A. Marzani, F. Lanza di Scalea and E. Viola, "Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 295, pp. 685-707, 2006.
15. S. Finnveden, "Exact spectral finite element analysis of stationary vibrations in a railway car structure," *Acta Acustica*, vol. 2, pp. 461-482, 1994.
16. F. Birgersson, S. Finnveden and C.-M. Nilsson, "A spectral super element for modelling of plate vibration. Part 1: general theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 287, pp. 297-314, 2005.
17. J. Ryue, D. J. Thompson, P. R. White and D. R. Thompson, "Investigation of propagating wave types in railway tracks at high frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 315, pp. 157-175, 2008.
18. J. Ryue, D. J. Thompson, P. R. White and D. R. Thompson, "Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 320, pp. 955-976, 2009.
19. K. Knothe and S. L. Grassie, "Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies," *Vehicle System Dynamics*, vol. 22, pp. 209-262, 1993.
20. J. Ryue, "Wave propagation in railway tracks at high frequencies," Ph.D. thesis, University of Southampton, 2008.
21. N. C. Perkins and C. D. Mote, Jr., "Comments on curve veering in eigenvalue problems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 106, pp. 451-463, 1986.

저자 약력

•유 정 수 (Ryue, Jungsoo)

1995년: 부산대학교 기계설계공학과 (학사)
 1997년: 한국과학기술원 기계공학과 (석사)
 2005년: ISVR at University of Southampton (석사)
 2008년: ISVR at University of Southampton (박사)
 2008-2009년: Research fellow at ISVR
 2009년~현재: 울산대학교 조선해양공학부 조교수
 주 관심 분야: Waveguide에서의 파동 전파, 구조음향, 신호처리