Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers (2010) 24(9) : 44~48
DOI : 10.5207/JIEIE.2010.24.9.044

폴리토픽 모델을 갖는 시스템을 위한 적분 슬라이딩 모드 제어기의 LMI 기반 설계

(LMI-based Design of Integral Sliding Mode Controllers for Polytopic Models)

최한호*
(Han-Ho Choi)

Abstract

This paper presents an LMI-based method to design an integral sliding mode controller for an uncertain system with a polytopic model. The uncertain system under consideration may have mismatched parameter uncertainties in the state matrix as well as in the input matrix. Using LMIs we derive an existence condition of a sliding surface. And we give a switching feedback control law.

Key Words : Linear Matrix Inequality(LMI), Uncertain System, Sliding Mode, Polytopic Model

1. 서 론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실성의 놈 크기가 알려진 시스템을 위한 강인한 궤환 제어기 설계에 성공적으로 적용되었다[1-4]. 대부분의 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 동작이 시작된 후에 원하는 성능을 제공하는데 즉 리칭모드가 슬라이딩모드 이전에 존재하는데 만약 슬라이딩 모드가 시작부터 존재한다면 리칭모드가 존재하는 일반적인 슬라이딩 모드 제어기보다 더 강인한 특성을 보일 것이다. [5]에서는 리칭모드가 존재하지 않고 시작시간부터 슬라이딩 모드가 존재하는 적분 슬라이딩 모드 제어기를 설계하는 방법이 제시되었다. 그 이후 [6]과 [12], [13]에서는 비정합 불확실성이 존재하는 시스템으로 확장되었다. [11]에서는 시간지연 시스템으로 확장되었다. [6], [11], [12], [13]의 방법들에 주어진 안정도 조건들은 보수성(conservativeness)이 존재하며 폴리토픽 모델처럼 불확실성을 구조적으로 모델링한 시스템에 적용할 경우 보수성이 크게 된다는 단점을 가지고 있다. 그러한 점을 고려하여 본 논문에서는 폴리토픽 모델로 주어지는 시스템을 대상으로 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안한다. LMI를 사용하여 슬라이딩 평면의 존재조건을 구하고 스위칭 궤환 제어기 알고리즘을 제시한다.

* 주저자 : 동국대학교 교수
Tel : 02-2260-3777, Fax : 02-2275-0162
E-mail : hhchoi@dongguk.edu
접수일자 : 2010년 3월 25일
1차심사 : 2010년 3월 26일, 2차심사 : 2010년 6월 7일
심사완료 : 2010년 6월 18일

2. 문제 설정

본 논문에서는 다음과 같은 폴리토픽 모델로 표현 가능한 시스템을 다룬다[7].

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\beta_i\left(A_i x(t) + B_i[u(t)+h(t)]\right) \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m$로 각각 상태, 입력을 가리키며 $h(t)\in R^m$는 외란 입력을 나타낸다. β_i는 미지의 변수로 다음을 만족시킨다.

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i = 1, \quad 1 \geqq \beta_i \geqq 0 \tag{2}$$

시스템 (1)은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $B = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}B_i$는 $\mathrm{rank}(B) = m < n$를 만족시킨다.

A2: $\|h(t)\| \leqq \phi\|u\| + \rho(x,t)$을 만족시키는 상수 $\phi < 1$, 함수 $\rho_f(x,t)$가 알려져 있다.

다음의 보조정리는 제안된 방법을 유도하고 이와 비교를 위해 논술하는 것이다.

보조정리 1 : 임의의 적절한 차원을 갖는 행렬 X, Y와 양수 δ에 대하여 다음이 항상 성립한다.

$$2X^TY \leqq \delta X^TX + \frac{1}{\delta}Y^TY$$

3. 주요 결과

다음과 같은 행렬 $H, F(\beta)$를 정의하자.

$$H = \frac{1}{2}[(B-B_1),\cdots,(B-B_r)],$$
$$F(\beta) = [(1-2\beta_1)I,\cdots,(1-2\beta_r)I]^T$$

위의 정의를 이용하여 식 (1)을 다음처럼 쓸 수 있다.

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r}\beta_i A_i x + [B + HF(\beta)][u+h] \tag{3}$$

또한 (2)를 이용해 다음 식이 성립함을 보일 수 있다.

$$F^T(\beta)F(\beta) = \sum_{i=1}^{r}(1-2\beta_i)^2 I \leqq rI \tag{4}$$

정리 1 : 시스템 (1)을 고려하자. $\psi + \psi\phi + \phi < 1$가 성립하고 다음 LMI (5)를 만족시키는 해 $X > 0$, Y, δ가 존재한다고 가정하자.

$$\begin{bmatrix} \Phi\Phi^T A_i X - BY + * & * & * & 0 \\ H^T\Phi\Phi^T & -(1-\delta)I & 0 & 0 \\ B_g A_i X + Y & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & \sqrt{r}H^TB_g^T & -\delta I \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

여기에서 $X\in R^{n\times n}, Y\in R^{m\times n}, \delta\in R$는 결정변수이며 $*$는 행렬의 대칭성에 의해 구해질 수 있는 블록행렬을 의미하고 $B_g = (B^TB)^{-1}B^T$, $\psi = \sqrt{r}\|B_gH\|$, Φ는 $B^T\Phi = 0, \Phi^T\Phi = I$를 만족시키는 임의의 $n\times(n-m)$ 행렬이다. 다음의 스위칭 제어기를 고려하자.

$$u = -\varrho(t)\frac{\sigma}{\|\sigma\|} \tag{6}$$

여기에서 슬라이딩 평면은 다음처럼 정의된다.

$$\sigma = B_g x + z \tag{7}$$

$z\in R^m$은 다음의 동역학을 만족하며

$$\dot{z} = Kx, \quad z(0) = -B_g x(0) \tag{8}$$

$\rho(t)$는 다음처럼 정의된다.

$$\varrho(t) = \frac{1}{1-\varphi}[(\eta + \|K\|)\|x\| + (1+\psi)\rho + \epsilon] \tag{9}$$

그리고 $\epsilon > 0, K = YX^{-1}, \eta = \sum\|B_gA_i\|$, $\varphi = \psi + \psi\phi + \phi$을 만족시킨다. 그러면 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 처음부터 즉 $t = 0$에서부터 시작된다.

증명 : [7]의 Schur complement 보조정리를 사용하면 (5)의 LMI는 다음을 의미함을 알 수 있다.

$$0<\delta<1,\ \delta I-rB_gHH^TB_g^T>0 \tag{10}$$

식 (4)와 식 (10)은 $I>B_gHF(\beta)F^T(\beta)H^TB_g^T$를 의미하고 이는 $\psi<1$과 $I+B_gHF(\beta)$는 항상 역행렬이 존재함을 보장한다. (3), (7), (8)을 이용하여 다음 동역학을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot\sigma &= B_g\dot x+\dot z \\ &= B_g\sum\beta_iA_ix+(I+B_gHF(\beta))(u+h)+Kx\end{aligned} \tag{11}$$

결국 [1-2]를 참조하여 다음과 같은 n차의 슬라이딩 모드 동역학을 구할 수 있다.

$$\dot x=A_1(t)x+A_2(t)x \tag{12}$$

여기에서 $A_1(t),A_2(t)$는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned}&A_1(t)=\sum\beta_i(\Phi\Phi^TA_i-BK),\\ &A_2(t)=-\Phi\Phi^THF(\beta)[I+B_gHF(\beta)]^{-1}[B_g\sum\beta_iA_i+K]\end{aligned} \tag{13}$$

(12)의 동역학식은 다음 부등식을 만족시키는 리아푸노프 행렬 $P>0$가 존재하면 안정하다.

$$[A_1(t)+A_2(t)]P+P[A_1(t)+A_2(t)]^T\ <\ 0 \tag{14}$$

보조정리 1을 이용하여 다음 식이 $0<\delta<1$에 대하여 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}&A_2(t)P+PA_2^T(t)\\ &\le\frac{1}{1-\delta}\Phi\Phi^THH^T\Phi\Phi^T\\ &\quad+P[\sum\beta_iB_gA_i+K]^T(I-\frac{r}{\delta}B_gHH^TB_g^T)^{-1}[\sum\beta_iB_gA_i+K]P\end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)와 [7]의 Schur complement 보조정리는 다음 식이 성립하면 식 (14)가 만족됨을 의미한다.

$$\begin{bmatrix}\Phi\Phi^TA_iP-BKP+* & * & * & 0\\ H^T\Phi\Phi^T & -(1-\delta)I & 0 & 0\\ B_gA_iP+KP & 0 & -I & *\\ 0 & 0 & \sqrt{r}H^TB_g^T & -\delta I\end{bmatrix}<0$$

위 식은 (5)가 성립하면 $P=X$에 의해 만족됨을 의미한다. 즉 슬라이딩 모드 동역학 (15)는 안정함을 의미한다. $t=0$에서부터 슬라이딩모드가 존재함을 보이기 위해 $\sigma(0)=0$이며 $\sigma^T\dot\sigma<0$이 0이 아닌 σ에 대하여 성립함을 보이기만 하면 된다. (7)과 (8)은 $\sigma(0)=0$을 의미하므로 $\sigma^T\dot\sigma<0$만 보이면 된다. 식 (11)에 스위칭 입력 (6)을 대입하고 가정 A2와 $\varphi<1$을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\sigma^T\dot\sigma &\le -\varrho\|\sigma\|+\|\sigma\|[\varphi\varrho+(1+\psi)\rho+(\eta+\|K\|)\|x\|]\\ &\le -\epsilon\|\sigma\|<0\end{aligned} \tag{16}$$

결국 슬라이딩 모드 동역학은 안정하며 슬라이딩 모드는 $t=0$에서 시작된다.

주 1 : [7]의 결과를 이용하면 (A_i,B)쌍이 안정가능하지 않으면 LMI (2)의 해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

4. 수치적인 예

정경채 등 [9]과 배상욱 등 [10]은 크레인 모델의 제어에 관하여 다루었다. 이들의 결과를 참조하여 다음의 크레인 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\dot x_1=x_2\\ &\dot x_2=-\frac{1}{1+\sin^2x_1}\{19.6\sin x_1+\cos x_1[u+x_2^2\sin x_1]\}\\ &\dot x_3=x_4\\ &\dot x_4=\frac{1}{1+\sin^2x_1}\{4.9\sin2x_1+u+x_2^2\sin x_1\}\end{aligned} \tag{17}$$

여기에서 x_1은 화물의 진동각이며, x_3는 목표점까지

의 거리이다. 이전 결과 [8]을 이용하여 (17)을 다음의 데이터를 갖는 (1)의 모델로 표현할 수 있다.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -19.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -14.973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6.484 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.693 \\ 0 \\ 0.800 \end{bmatrix}$$

$$h(t) = x_2^2 \sin x_1$$

위의 데이터는 $\phi = 0, \rho(x,t) = \|x\|^2$로 정할 수 있음을 의미한다. 결국 LMI (5)를 풀어 다음의 제어기를 얻을 수 있다.

$$u = -(1 + 56.92\|x\| + 1.337\|x\|^2)\frac{\sigma}{|\sigma|} \tag{19}$$

여기에서 σ, z는 다음처럼 주어진다.

$$\sigma = B_g x + z, \quad \dot{z} = Kx, \quad z(0) = -B_g x(0),$$

$$B_g = [0, \quad -0.555, \quad 0, \quad 0.590],$$

$$K = [-19.36, \quad 0.3339, \quad 2.157, \quad 4.257]$$

그림 1은 $x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0, x_3(0) = 5[\mathrm{m}]$ 로 하였을 때 시뮬레이션 결과를 보여주고 있다. 이전 방법들 [5], [6], [11], [12], [13]은 위의 데이터 (24)에는 적용이 불가능함에 유의해야 한다.

5. 결 론

본 논문에서는 이전의 결과를 보조하고 대체할 수 있는 적분 슬라이딩 모드 제어기 설계법을 제안하였다. 수치적인 예를 제시하여 이전 방법들 [5], [6], [11], [12]는 적용하지 못하는 시스템에도 적용 가능할 수 있음을 보였다.

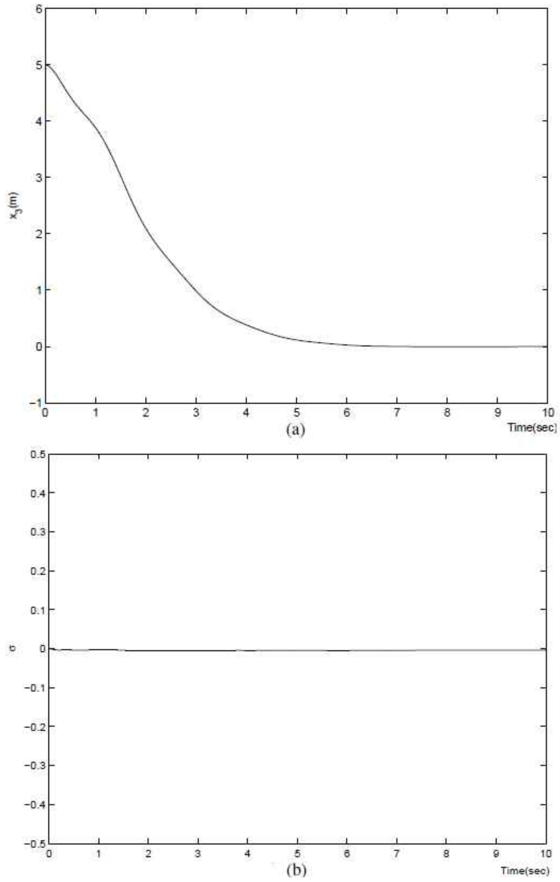

그림 1. 크레인 시뮬레이션 결과 (a) x_3, (b) σ
Fig. 1. Crane simulation results (a) x_3, (b) σ

References

[1] R.A. DeCarlo, S.H. Zak, and G.P. Mathews, Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial, IEEE Proceedings, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
[2] V.I. Utkin, Variable structure systems with sliding modes, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 22, pp. 212-222, 1977.
[3] C. Edwards, A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalites, Automatica., vol. 40, pp. 1761-1769, 2004.
[4] C. Edwards, A. Akoachere, and S. K. Spurgeon, Sliding mode output feedback controller design using linear matrix inequalities, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 46, pp. 115-119, 2001.
[5] J. Ackermann and V.I. Utkin, Sliding mode control design based on Ackermann's formula, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 43, no. 2, pp. 234-237, 1998.
[6] H.H. Choi, LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 52. no. 4, pp. 736-742, 2007.

〔7〕 S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994.
〔8〕 M.C.M. Teixeira, and S.H. Zak, Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models, IEEE Trans. Fuzzy Syst., vol. 7, pp. 133-142, 1999.
〔9〕 K.-C. Jeong, D.-H. Lee, and H.-Y. Lee, A study on simulator for designing controllers of anti-swing in overhead crane, Journal of KIIEE, vol. 10, no.2 , pp. 78-86, 1996.
〔10〕 S.-W. Bae, C.-K. Rho, Y.-H. Bae, and D.-K. Lee, Anti-swing control algorithm for the automation of overhead crane, Journal of KIIEE, vol. 17, no. 2, pp. 49-57, 2003.
〔11〕 V.Y. Glizer, L.M. Fridman, and V. Turetsky, Cheap suboptimal control of an integral sliding mode for uncertain systems with delays, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 52, no. 10, pp. 1892-1898, 2007.
〔12〕 W.-J. Cao and J.-X. Xu, Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems, IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 49, pp. 1355-1360, 2004.
〔13〕 H.H. Choi, Adaptive controller design for uncertain fuzzy systems using variable structure control approach, Automatica, vol. 45, no.11, pp. 2646-2650, 2009.

◇ 저자소개 ◇

최한호(崔漢浩)
1966년 8월 25일생. 1988년 서울대학교 제어계측 공학과 졸업. 1994년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(박사). 2003년～현재 동국대학교 교수.
Tel : (02)2260-3777
Fax : (02)2275-6013
E-mail : hhchoi@dongguk.edu