

보조 공동과 간극을 갖는 원통형 공동의 음향 전달 특성

Acoustic Transmission Characteristics of the Cylindrical Cavity with an Auxiliary Cavity and a Gap

정 원 태*, 강 연 준*, 김 석 현**

(Won-Tae Jeong*, Yeon-June Kang*, Seock-Hyun Kim**)

*서울대학교 기계항공공학부, **강원대학교 기계메카트로닉스공학과

(접수일자: 2010년 1월 11일; 채택일자: 2010년 2월 16일)

본 논문에서는 원통형 공동계의 음향 전달 특성에 대하여 이론적으로 검토한다. 원통형 공동계는 성덕대왕 신종의 음향 공동을 단순화시킨 모델로, 주 공동, 보조 공동 및 간극으로 구성되어 있다. 주 공동 내부에 점음원을 주고 내부 및 외부 음장에서의 주파수 응답 특성과 음향 모드를 구하였다. 그 결과는 SYSNOISE를 이용한 경계요소 해석결과와 비교하여 타당성을 확인하였다. 제안된 이론모델을 이용하여 간극과 보조 공동이 음향계의 공명 주파수와 음향 전달 특성에 미치는 영향을 규명하였다. 마지막으로 음원 주파수를 공동 내부에서 외부로 가장 잘 전달시키는 보조 공동과 간극의 조합을 결정하였다.

핵심용어: 원통형 공동, 보조 공동, 간극, 음향 전달 특성, 음향 모드

투고분야: 구조음향 및 진동 분야 (11.1)

In this paper, acoustic transmission characteristics are theoretically considered on a cylindrical cavity system. The cylindrical cavity system is a simplified model of the acoustic cavity of King Seongdeok Divine Bell and it consists of a main cavity, a gap and an auxiliary cavity. Under a point sound source in the main cavity, acoustic frequency response property is determined and acoustic modes are analysed. The results are compared with those by the boundary element analysis using SYSNOISE. Using the proposed theoretical method, the effect of the auxiliary cavity and the gap on the resonance frequency and sound transmission characteristics is identified. Finally the best combination of the auxiliary cavity and gap is determined for the maximum transmission of the source frequency.

Keywords: Cylindrical Cavity, Auxiliary Cavity, Gap, Acoustic Transmission Characteristics, Acoustic Modes

ASK subject classification: Structural Acoustics and Vibration (11.1)

I. 서론

범종은 수려한 외관과 아름다운 소리를 자랑하는 한국의 대표적인 문화 자산으로, 그 소리의 발생 메커니즘은 음향학적으로 흥미로운 연구 대상이 되고 있다. 한국 범종의 구조 진동과 음향학적 연구로는 타격음의 평가 [1], 진동 및 음향의 가시화 [2], 음향 방사 해석 [3], 맥놀이 해석 및 맥놀이 조절 [4,5], 그리고, 명동 [6]이나 음통 [6,7]의 기능 등에 대한 다양한 연구가 수행된 바 있다. 주로 한국 범종을 대표하는 성덕대왕 신종을 대상으로

많은 연구가 진행되어 왔으나, 아직까지 풀리지 않은 음향학적 문제들이 많이 남아 있다. 본 연구에서는 명동이 간극과 함께 종소리의 전달에 어떠한 영향을 미치는가를 이론적으로 검토한다. 명동은 그림 1에서와 같이 범종의 아래를 웅덩이 모양으로 파낸 구조로, 종소리를 크게 하고 지속시간을 길게 만들려는 목적으로 시도되었다. 이론적 해석이 어려웠던 오랜 옛날에는 명동의 깊이를 경험적으로 조절해서 좋은 음향 특성을 만들었을 것으로 추측하고 있다. 명동의 기능에 관한 이론적 연구로는 종체 내부 공동과 명동을 하나의 밀폐된 원통형 공동으로 단순화시키고, 그 공명주파수를 종의 주요 진동수에 일치시키려는 연구가 보고 된 바 있다 [6]. 그러나 종은 바닥과 어느 정도의 간극을 두고 걸리므로, 종체 내부 공동과 명

동을 하나의 밀폐된 공동으로 가정하는 데에는 무리가 따른다. 또한, 간극은 내부로부터 외부로 음을 전달시키는 통로 역할을 한다. 저자들에 의하여 종체 외부의 음향 방사에 대한 이론적 연구가 보고된 바 있으나 [3], 종체의 내부 공동과 명동으로 이루어진 음장에서 간극을 통하여 외부로 음이 어떻게 전달되는지에 대한 이론적 검토는 아직까지 보고된 바 없다. 본 논문에서는 종체의 내부 공동, 종 하단과 바닥 사이의 간극 및 명동으로 구성된 음향계를 그림 2와 같이 원통형으로 단순화 시키고, 내부로부터 외부로의 음향 전달에 대한 해석 모델을 유도한다. 해석 결과는 SYSNOISE를 이용한 경계요소해석 결과와 비교하여 그 타당성을 검증한 후, 제시된 해석 모델을 사용하여 주어진 음원 주파수를 가장 잘 전달하는 명동과 간극 조건을 구하였다. 저자들은 본 연구를 통하여 범종의 주요 진동수를 가장 잘 방사시키는 명동과 간극의 조건을 구하는데 유용한 정보를 제공하고자 한다.

II. 이론적 고찰

그림 2와 같이 종체의 내부 공동을 원통형의 주 공동으로, 명동을 원통형 보조 공동으로 단순화시키고, 그 사이에 원형의 간극(gap)을 통하여 내부와 외부 음장이 연결되는 음향계를 구성하였다. 주파수 응답 해석을 위하여 내부에 하나의 점음원(point acoustic source)을 위치시키고, 공동 외부는 양단 무한 원통형 배플(infinite cylindrical baffle) 조건을 적용하였다. 음원과 간극을 제외한 원통 내/외부 면은 속도가 영인 강제 조건을 부여하였다. 외부 음장은 링 형상의 간극 상 속도가 주어지면 결정되는데, 이 때 방사임피던스(radiation impedance)

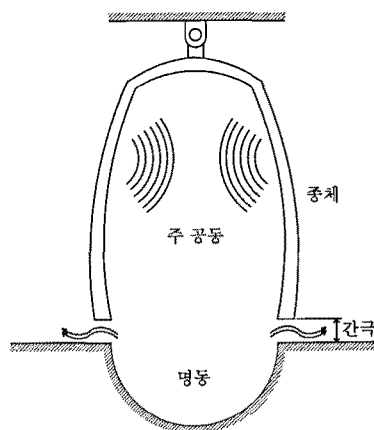


그림 1. 한국종의 음향계
Fig. 1. Acoustic system of the Korean Bell.

를 구하기 위해서 원통 축 상에 파정수(wave number)를 갖는 많은 수의 파에 대하여 무한 적분을 수행해야 하는 계산상의 번거로움이 있다 [8].

이에 관련하여 Butler [9]는 그림 3 (a)에서와 같이 배플을 갖는 유한 원통이 원통 축 상에서 주기적으로 반복

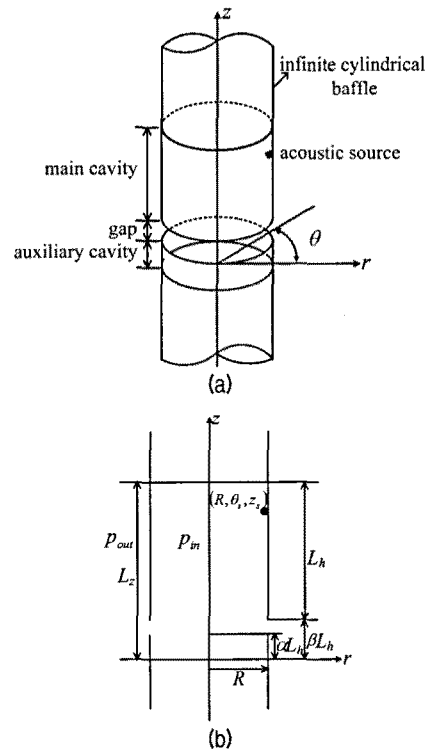


그림 2. 단순화된 음향 모델
(a) 음향계의 구조 (b) 주요 설계 변수
Fig. 2. Simplified acoustic model,
(a) Structure of the acoustic system,
(b) Main design variables.

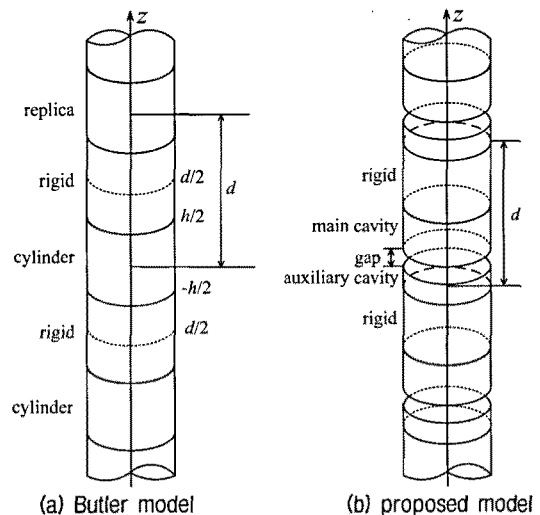


그림 3. 주기적으로 반복되는 원통 모델
Fig. 3. Periodically repeating cylinder model.

되는 모델을 사용함으로써, 한 주기에서의 유한 적분으로 방사 임피던스를 구하는 방법을 제시하였다. 본 연구에서는 단순한 원통 대신, 주 공동, 간극, 보조 공동의 음향계가 반복되는 모델을 그림 3 (b)와 같이 구성하고 간극 상에서의 속도분포를 Butler 모델에 적용하여 외부 음장을 결정하였다.

그림 2의 원통형 공동계의 내부 및 외부 음장의 지배 방정식은 다음의 헬름홀츠 방정식 (homogeneous Helmholtz equation)으로 표시된다.

$$\nabla^2 p_{in} + k^2 p_{in} = 0, (0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq L_z) \quad (1)$$

$$\nabla^2 p_{out} + k^2 p_{out} = 0, (r > R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty) \quad (2)$$

$$\text{여기서 } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, k = \frac{\omega}{c}.$$

여기서 p_{in} 은 공동 내부의 음압이고 p_{out} 은 공동 외부의 음압이다. k 는 공기 중의 파장수 (wave number), ω 는 음원 주파수, 그리고 c 는 공기 중 음속을 나타낸다.

공동 내 상하단 및 원통 면상의 음원조건 및 강체 경계 조건은 다음 식으로 표시된다.

$$\left. \frac{\partial p_{in}}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial p_{in}}{\partial z} \right|_{z=L_z} = 0, (0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial p_{in}}{\partial r} \right|_{r=R} = -jk\rho c Q \delta(\theta - \theta_s) \delta(z - z_s), \quad (4) \\ \left(0 \leq \theta \leq 2\pi, \begin{bmatrix} 0 \leq z \leq \alpha L_h \\ \beta L_h \leq z \leq L_z \end{bmatrix} \right)$$

또한, 외부 음장의 원통 면에서의 강체 경계조건으로부터, 다음 식이 성립한다.

$$\left. \frac{\partial p_{out}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \left(0 \leq \theta \leq 2\pi, \begin{bmatrix} z < \alpha L_h \\ z > \beta L_h \end{bmatrix} \right) \quad (5)$$

식 (4)에서 ρ 는 공기의 밀도이고 Q 는 (R, θ_s, z_s) 에 위치하는 점 음원의 체적 속도이다. 공동 내부와 외부가 접하는 간극 상에서는 음압 및 입자 속도의 연속 조건을 다음과 같이 적용한다.

$$p_{out}|_{r=R} = p_{in}|_{r=R}, (0 \leq \theta \leq 2\pi, \alpha L_h \leq z \leq \beta L_h) \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial p_{out}}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial p_{in}}{\partial r} \right|_{r=R}, (0 \leq \theta \leq 2\pi, \alpha L_h \leq z \leq \beta L_h) \quad (7)$$

원통형 공동의 내부 음압은 식 (1)과 경계조건 식 (3)을 만족시키는 모드해 (modal solution)로 다음과 같이 표현할 수 있다 [10].

$$p_{in}(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} J_m(k_r r) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) \quad (8)$$

여기서

$$k_r^2 + k_{zn}^2 = k^2, k_r = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_{zn}^2}, & \text{for } k^2 > k_{zn}^2 \\ -j\sqrt{k_{zn}^2 - k^2}, & \text{for } k^2 < k_{zn}^2 \end{cases} \text{ and } k_{zn} = \frac{n\pi}{L_z}.$$

여기서 A_{mn} 은 공동 음향모드 계수이고 J_m 은 제 1종 m 차 베셀함수 (1st kind Bessel function of order m)이다. k_{zn} 은 z 축 상 n 차 모드의 파장수이고 k_r 은 r 축 상의 파장수를 나타낸다. 식 (8)에 음원을 고려한 경계조건 식 (4)를 적용하면, 보조 공동과 주 공동에 대한 경계조건 식 (9), (10)을 얻는다.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_r A_{mn} J'_m(k_r R) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) = 0, (0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq \alpha L_h) \quad (9)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_r A_{mn} J'_m(k_r R) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) = -jk\rho c Q \delta(\theta - \theta_s) \delta(z - z_s), (0 \leq \theta \leq 2\pi, \beta L_h \leq z \leq L_z) \quad (10)$$

$$\text{여기서 } J'_m(x) = \partial J_m(x) / \partial x.$$

무한 배플을 갖는 원통면의 외부 방사 음장을 구하기 위하여, Butler는 그림 3 (a)와 같이 길이 h 이고 $d/2$ 길이의 배플을 갖는 길이 h 의 원통이 d 의 간격으로 주기적으로 반복되는 모델을 사용하였다. Butler 모델에 따르면, 원통 면상의 속도분포가 z 축을 따라서는 일정하고 원주 상에서는 $v(\theta)$ 로 주어질 때의 방사 음장은 다음 식 (11)로 구해진다 [9].

$$p(r, \theta, z) = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} j\omega\rho v_{nm}(R) \frac{H_m(\beta r)}{[\beta H_m(\beta R)]} \cos(\alpha z) \cos(m\theta), \\ (r > R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty) \quad (11)$$

여기서

$$v_{ml}(R) = \frac{2\epsilon_l}{d} \int_0^{h/2} v_m(R, z) \cos(\alpha_l z) dz,$$

$$v_m(R, z) = \frac{\epsilon_m}{\pi} \int_0^\pi v(R, \theta, z) \cos(m\theta) d\theta,$$

$v(R, \theta, z)$: The velocity distribution around the circumference,

$$\alpha_l = \frac{2\pi l}{d}, (l = 0, 1, 2, \dots), \beta_l = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_l^2}, & \text{for } k^2 > \alpha_l^2 \\ -j\sqrt{\alpha_l^2 - k^2}, & \text{for } k^2 < \alpha_l^2 \end{cases},$$

$$\epsilon_l = \begin{cases} 1, & \text{for } l = 0 \\ 2, & \text{for others} \end{cases}, \epsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{for } m = 0 \\ 2, & \text{for others} \end{cases},$$

$$H_m(x) = J_m(x) - jY_m(x), H'_m(x) = \partial H_m(x) / \partial x.$$

식 (11)에서 H_m 은 m 차 한켈 함수 (Hankel function of order m)이고 Y_m 은 제 2종 m 차 베셀 함수 (2nd kind Bessel function of order m)이다. l 은 공동 외부에서 z 축 상에서 형성되는 조화 함수의 차수를 나타낸다. 거리 d 는 근접 음장 (Near-field)에서 이웃하는 원통 면 사이의 간섭이 무시될 수 있을 정도로 충분히 잡아야 한다.

내부 음압 식 (8)과 간극 상에서의 연속조건 식 (7)을 이용하면 간극 상 $r = R$ 에서의 입자 속도를 모드 중첩으로 표시할 수 있고, 이를 식 (11)의 Butler 모델에 적용하면 외부 음장을 다음 식 (12)로 구할 수 있다. Butler 모델에서는 간극 상에서 z 축을 따라 음압이 일정하게 분포한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} p_{ml}(r, \theta, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^j \omega p v_{ml}(R) \frac{H_m(\beta_l r)}{[\beta_l H'_m(\beta_l R)]} C(z) \cos(m\theta) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{\epsilon_l}{d} k_r A_{mn} J'_m(k_r r) T_{nl} \frac{H_m(\beta_l r)}{[\beta_l H'_m(\beta_l R)]} C(z) \cos(m\theta), \\ &\quad (r > R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < \infty) \end{aligned} \tag{12}$$

여기서

$$v_{ml}(R) = \frac{\epsilon_l}{d} \int_{\alpha L_h}^{\beta L_h} v_m(R, z) C(z) dz,$$

$$v_m(R, z) = \frac{\epsilon_m}{\pi} \int_0^\pi v(R, \theta, z) \cos(m\theta) d\theta,$$

$$v(R, \theta, z) = -\frac{1}{j\omega p} \left. \frac{\partial p_{ln}}{\partial r} \right|_{r=R} = -\sum_{n=0}^{\infty} k_r A_{mn} J'_m(k_r R) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right),$$

$$\alpha_l = \frac{2\pi l}{d}, (l = 0, 1, 2, \dots), \beta_l = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_l^2}, & \text{for } k^2 > \alpha_l^2 \\ -j\sqrt{\alpha_l^2 - k^2}, & \text{for } k^2 < \alpha_l^2 \end{cases},$$

$$\epsilon_l = \begin{cases} 1, & \text{for } l = 0 \\ 2, & \text{for others} \end{cases}, \epsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{for } m = 0 \\ 2, & \text{for others} \end{cases},$$

$$C(z) = \cos\left[\frac{2\pi l}{d} \left(z - \alpha L_h - \frac{(\beta - \alpha)L_h}{2}\right)\right],$$

$$T_{nl} = \int_{\alpha L_h}^{\beta L_h} \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) C(z) dz.$$

내부 및 외부의 음압 식 (8)과 식 (12)에 음압 연속조건 식 (6)을 적용하면 간극 상에서 다음 식 (13)을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} J'_m(k_r R) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\theta=0}^{\infty} \frac{\epsilon_l}{d} k_r A_{mn} J'_m(k_r R) T_{nl} \frac{H_m(\beta_l R)}{[\beta_l H'_m(\beta_l R)]} \\ &\quad C(z) \cos(m\theta), (0 \leq \theta \leq 2\pi, \alpha L_h < z < \beta L_h) \end{aligned} \tag{13}$$

식 (9), (10), (13)에 모드 함수의 직교성을 적용하면 공동 내부 음압에 관여하는 각 모드의 기여도 A_{mn} 에 대한 방정식을 얻을 수 있다. 즉, 식 (9)의 양변에 $\cos(m'\theta)$ 을 곱하고 $0 \sim 2\pi$ 에서 적분한 후 다시 양변에 $\cos(k_l z)$ 을 곱하고 $0 \sim \alpha L_h$ 에서 적분하면 식 (14)를 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_r A_{mn} J'_m(k_r R) a_{ln} \epsilon_m \pi = 0 \tag{14}$$

여기서

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2, & \text{for } m = 0 \\ 1, & \text{for others} \end{cases}, k_b = \frac{b\pi}{\alpha L_h}, (b = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{lm} = \int_0^{\alpha L_h} \cos(k_l z) \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) dz.$$

동일하게 식 (10)의 양변에 $\cos(m'\theta)$ 을 곱하고 $0 \sim 2\pi$ 에서 적분하고 다시 양변에 $\cos[k_g(L_z - z)]$ 을 곱하여 $\beta L_h \sim L_z$ 에서 적분하면 식 (15)를 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_r A_{mn} J'_m(k_r R) a_{gn} \epsilon_m \pi = -jk_p c Q \cos(m\theta_s) \cos(k_g z_s) \tag{15}$$

여기서

$$k_g = \frac{g\pi}{L_h}, (g = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{gm} = \int_{\beta L_h}^{L_z} \cos[k_g(L_z - z)] \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) dz.$$

동일한 방법으로, 식 (13)의 양변에 $\cos(m'\theta)$ 을 곱하고 $0 \sim 2\pi$ 까지 적분한 후 다시 양변에 $\cos[k_h(\beta L_h - z)]$ 을 곱하고 $\alpha L_h \sim \beta L_h$ 까지 적분하면 식 (16)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} J_m(k_r R) a_{hn} \\ &= \frac{\epsilon_l}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} k_r A_{mn} J_m'(k_r R) T_{nl} \frac{H_m(\beta_l R)}{[\beta_l H_m(\beta_l R)]} a_{hl} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$k_h = \frac{h\pi}{(\beta - \alpha)L_h}, \quad (h = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_{hn} = \int_{\alpha L_h}^{\beta L_h} \cos[k_h(\beta L_h - z)] \cos\left(\frac{n\pi}{L_z} z\right) dz,$$

$$a_{hl} = \int_{\alpha L_h}^{\beta L_h} \cos[k_h(\beta L_h - z)] C(z) dz.$$

식 (14)~(16)은 미지수 A_{mn} 에 대해서 보조 공동, 주 공동, 간극이란 3개의 다른 구간에서 경계조건을 적용하여 얻어진 결과이다. 이러한 혼합 경계조건 문제와 관련하여 Y.H. Kim 등은 직교좌표계를 사용하는 2차원 사각 공동의 내외부 음장 해석을 수행한 바 있다 [11]. 원통형 공동계의 문제에서도 유사한 과정을 통하여 다음과 같이 해를 구할 수 있다.

식 (14)를 행렬식 형태로 표현하면 다음 식 (17)이 된다.

$$\begin{aligned} & [I^{(1)}]_{(B+1)(M+1) \times (M+1)(N+1)} \{A_{mn}\}_{(M+1)(N+1) \times 1} \\ &= \{\Theta^{(1)}\}_{(B+1)(M+1) \times 1} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서

$$I^{(1)}((b+1)(m+1), (m+1)(n+1)) = k_r J_m'(k_r R) a_{bn} \epsilon_m \pi,$$

$$\Theta^{(1)}((b+1)(m+1), 1) = 0,$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, M), (n = 0, 1, 2, \dots, N), (b = 0, 1, 2, \dots, B).$$

여기서 N 은 식 (8)의 모드 중첩에서 고려하는 조화함수의 수를 의미한다. 식 (15), (16)도 행렬식 형태로 표현하면 다음 식 (18), (19)로 표시 가능하다.

$$\begin{aligned} & [I^{(2)}]_{(G+1)(M+1) \times (M+1)(N+1)} \{A_{mn}\}_{(M+1)(N+1) \times 1} \\ &= \{\Theta^{(2)}\}_{(G+1)(M+1) \times 1} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서

$$I^{(2)}((g+1)(m+1), (m+1)(n+1)) = k_r J_m'(k_r R) a_{gn} \epsilon_m \pi,$$

$$\Theta^{(2)}((g+1)(m+1), 1) = -jk_r \rho c Q \cos(m\theta_s) \cos(k_y z_s),$$

$$(g = 0, 1, 2, \dots, G).$$

$$\begin{aligned} & [I^{(3)}]_{(H+1)(M+1) \times (M+1)(N+1)} \{A_{mn}\}_{(M+1)(N+1) \times 1} \\ &= \{\Theta^{(3)}\}_{(H+1)(M+1) \times 1} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} & I^{(3)}((h+1)(m+1), (m+1)(n+1)) \\ &= J_m(k_r R) a_{hn} - \sum_{l=0}^L \frac{\epsilon_l}{d} k_r J_m'(k_r R) \frac{H_m(\beta_l R)}{[\beta_l H_m(\beta_l R)]} T_{nl} a_{hl} \end{aligned}$$

$$\Theta^{(3)}((h+1)(m+1), 1) = 0, \quad (h = 0, 1, 2, \dots, H)$$

식 (17)~(19)는 다음 식 (20)과 같이 통합하여 표시할 수 있는데, 정방행렬을 구성할 때 해를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & [I]_{(M+1)(N+1) \times (M+1)(N+1)} \{A_{mn}\}_{(M+1)(N+1) \times 1} \\ &= \{\Theta\}_{(M+1)(N+1) \times 1} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\begin{aligned} & [I]_{(M+1)(N+1) \times (M+1)(N+1)} \\ &= \begin{bmatrix} [I^{(1)}]_{(B+1)(M+1) \times (M+1)(N+1)} \\ [I^{(2)}]_{(G+1)(M+1) \times (M+1)(N+1)} \\ [I^{(3)}]_{(H+1)(M+1) \times (M+1)(N+1)} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\{\Theta\}_{(M+1)(N+1) \times 1} = \begin{bmatrix} \{\Theta^{(1)}\}_{(B+1)(M+1) \times 1} \\ \{\Theta^{(2)}\}_{(G+1)(M+1) \times 1} \\ \{\Theta^{(3)}\}_{(H+1)(M+1) \times 1} \end{bmatrix}$$

식 (20)이 정방행렬이 되기 위해서는 모드 수가 다음의 관계를 만족시켜야 한다.

$$N+1 = (B+1) + (G+1) + (H+1) \quad (21)$$

III. 해석 모델의 검증

3.1. 음향계의 제원

이론 해석의 신뢰도를 검증하기 위하여 SYSNOISE를 사용한 경계요소해석을 수행하고 두 결과를 비교하였다. SYSNOISE는 다양한 형상과 경계조건을 갖는 음향 공동의 모드해석과 주파수응답 해석에서 신뢰할 만한 결과를 주는 검증된 상용 경계요소해석 프로그램이다 [12]. 여기서는 공동 내부 및 외부 점에서의 주파수응답 특성, 주파수응답 곡선 상에서 피크 주파수, 그리고 피크를 발생시키는 음향 모드의 음압 분포를 비교하였다.

표 1은 해석을 위한 원통형 공동의 제원으로, 그 치수는

성덕대왕 신종의 크기에 가깝게 주었다. 음원 주파수는 신종의 종소리에서 가장 중요한 1차 진동음 64.2 Hz와, 2차 진동음 168.5 Hz를 부여하였다. 200 Hz 범위의 주파수 응답 해석을 위하여 0~1500 Hz 범위에서 공동의 음향모드를 사용하였다. 식 (11)에서 외부 음장을 표현하기 위하여 사용하는 z축 상 모드 수 l은 거리 d에 영향을 받는데, d=200 m으로 주고, 관심 주파수 내에서 외부 음장이 충분한 수렴을 보이도록 l=0~300으로 선택하였다. 한편, SYSNOISE의 경계요소 해석에서는 실린더형 배플의 길이를 간극으로부터 양 방향 10 m로 하였는데, 그 이상의 길이에서는 외부 응답 점에서의 음압 차이가 거의 없음을 확인하였다.

3.2. 해석 결과

그림 4는 공동 내부 및 외부 음장에서의 이론과 SYSNOISE에 의한 음압해석 결과를 비교한다. 내부 응답 점으로는 간극 안쪽의 $(r, \theta, z) = (0.7, 0.0, 0.575)$ 지점을, 외부 응답 점으로는 원통 면으로부터 0.5 m 거리에서 사람의 귀 위치인 $(r, \theta, z) = (1.5, 0.0, 1.800)$ 을 선정하였다. 제시한 이론과 SYSNOISE에 의한 주파수 응답 곡선은 전반적으로 매우 접근한다. 다만 주파수가 높아지면서 두 결과는 다소의 차이를 보이며, 특히 외부 음장에서 그 차이가 커지고 있다. 그 원인에 대해서는 뒤의 음향 모드 해석 부분에서 기술한다. 한편, 음원 주파수에 가까운 70.0 Hz와 169.0 Hz의 피크에 관련된 음향모드는 주목할 필요가 있다. 간극이나 보조 공동 깊이를 조절하여 이 모드들의 공명 주파수를 음원 주파수에 일치시킨다면, 외부로의 음의 전달을 극대화시킬 수 있을 것이다.

표 2는 두 해석에 의한 피크 주파수를 보이는데, 각각

표 1. 원통형 공동계의 제원

Table 1. Dimensions and physical properties of the cylindrical cavity.

Parameters	Value
L_h	2.88 [m]
R	1.00 [m]
αL_h	0.30 [m]
βL_h	0.85 [m]
θ_s	0 [radian]
z_s	$(\beta + 0.90)L_h$ [m]
Q	1×10^{-3} [m^3/s]
c	343 [m/s]
ρ	1.225 [kg/m^3]
d	200 [m]

의 피크 주파수는 주 공동-간극-보조 공동 연성계의 음향모드가 공명함으로써 발생한다. 음향모드의 구분은 r축 상에서의 절점 수 n_r , 반원주상에서의 절점 수 n_θ , z축 상에서의 절점 수 n_z 를 순서대로 나열하여 (n_r, n_θ, n_z) 의 형태로 표기하였다. 음압 분포를 표시한 평면의 좌표축은 Appendix 1에 표시된 직교 좌표축에 따른다. 이론과 SYSNOISE 해석에 의한 피크 주파수는 거의 일치한다. 다만, (0,0,3) 및 (0,1,3) 모드에서 약간의 오차가 발생하

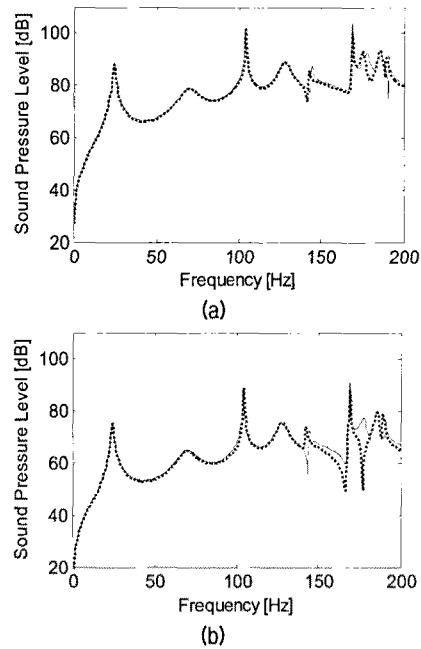


그림 4. 주파수 응답 특성 : (—) 이론 (.....) SYSNOISE

(a) 공동 내부 응답 점 $(r, \theta, z) = (0.7, 0.0, 0.575)$

(b) 공동 외부 응답 점 $(r, \theta, z) = (1.5, 0.0, 1.800)$

Fig. 4. Frequency response characteristics :

(—) theory, (.....) SYSNOISE,

(a) response point in the inside of a cavity

$(r, \theta, z) = (0.7, 0.0, 0.575)$,

(b) response point in the outside of a cavity

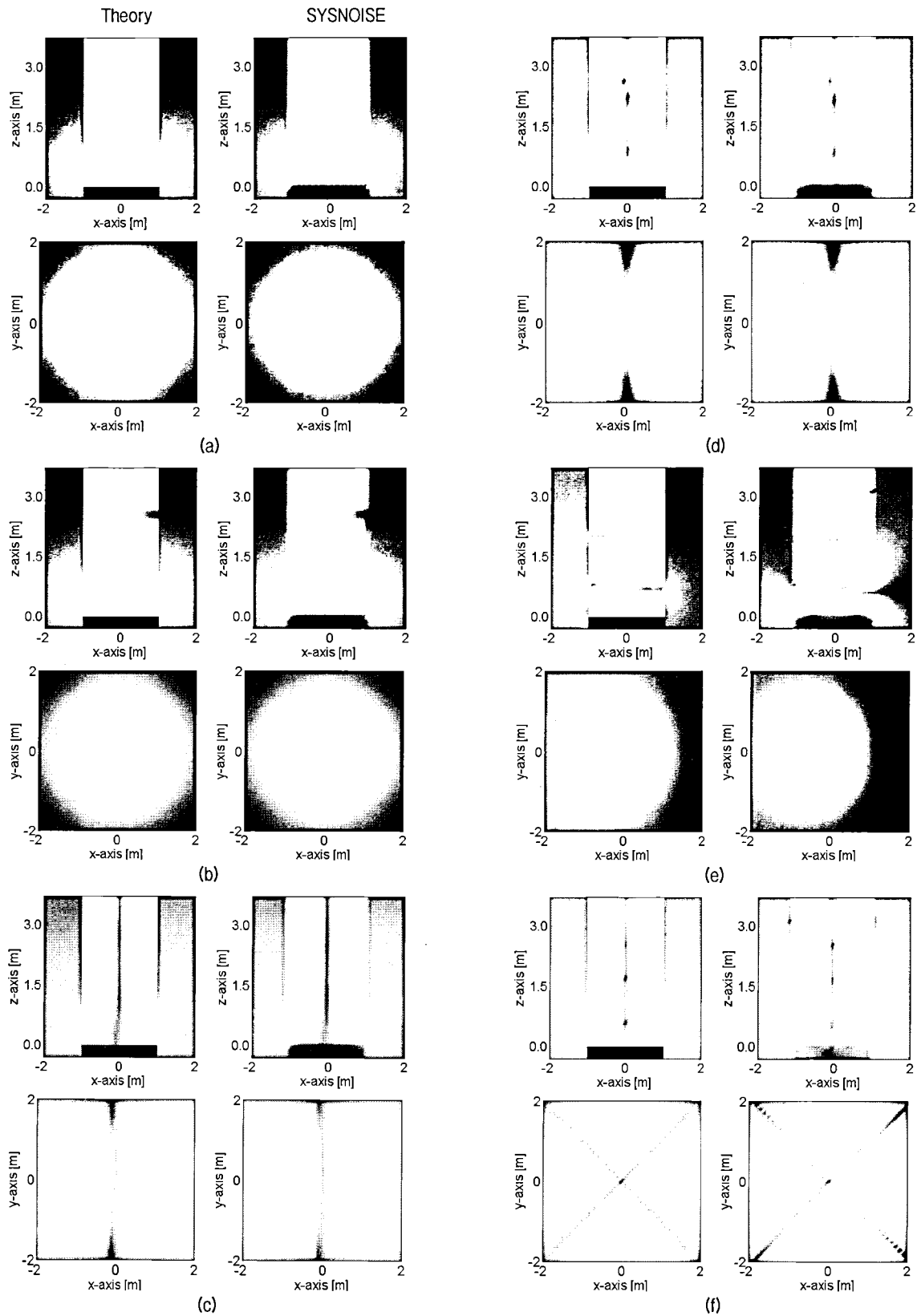
$(r, \theta, z) = (1.5, 0.0, 1.800)$.

표 2. 제안된 이론 해석과 SYSNOISE 해석에 의한 공명 주파수
Table 2. Resonance frequencies by proposed theory and SYSNOISE.

Mode (r, m, n)	Peak frequencies [Hz]		Difference (%)
	Proposed	BEM	
(0,0,0)	24.0	24.0	0.00
(0,0,1)	70.0	70.0	0.00
(0,1,0)	104.0	104.5	0.48
(0,1,1)	127.5	128.0	0.39
(0,0,3)	144.5	142.5	1.40
(0,2,0)	169.0	169.0	0.00
(0,1,3)	177.5	175.5	1.13
(0,2,1)	186.0	186.0	0.00
(0,0,4)	191.0	189.5	0.79

는데, 이에 대해서는 다음의 음향 모드 해석 부분에서 기술한다. 그림 5는 각각의 피크를 발생시키는 음향모드의 음압 분포를 그린 결과이다.

음압 분포를 그리기 위해서, 평면을 0.1 m 간격의 격자로 나누는 후, 각 절점에서의 음압으로부터 정규화 된 음압 레벨을 식 (22)를 이용해서 구하고 격자별로 평균화 시킨



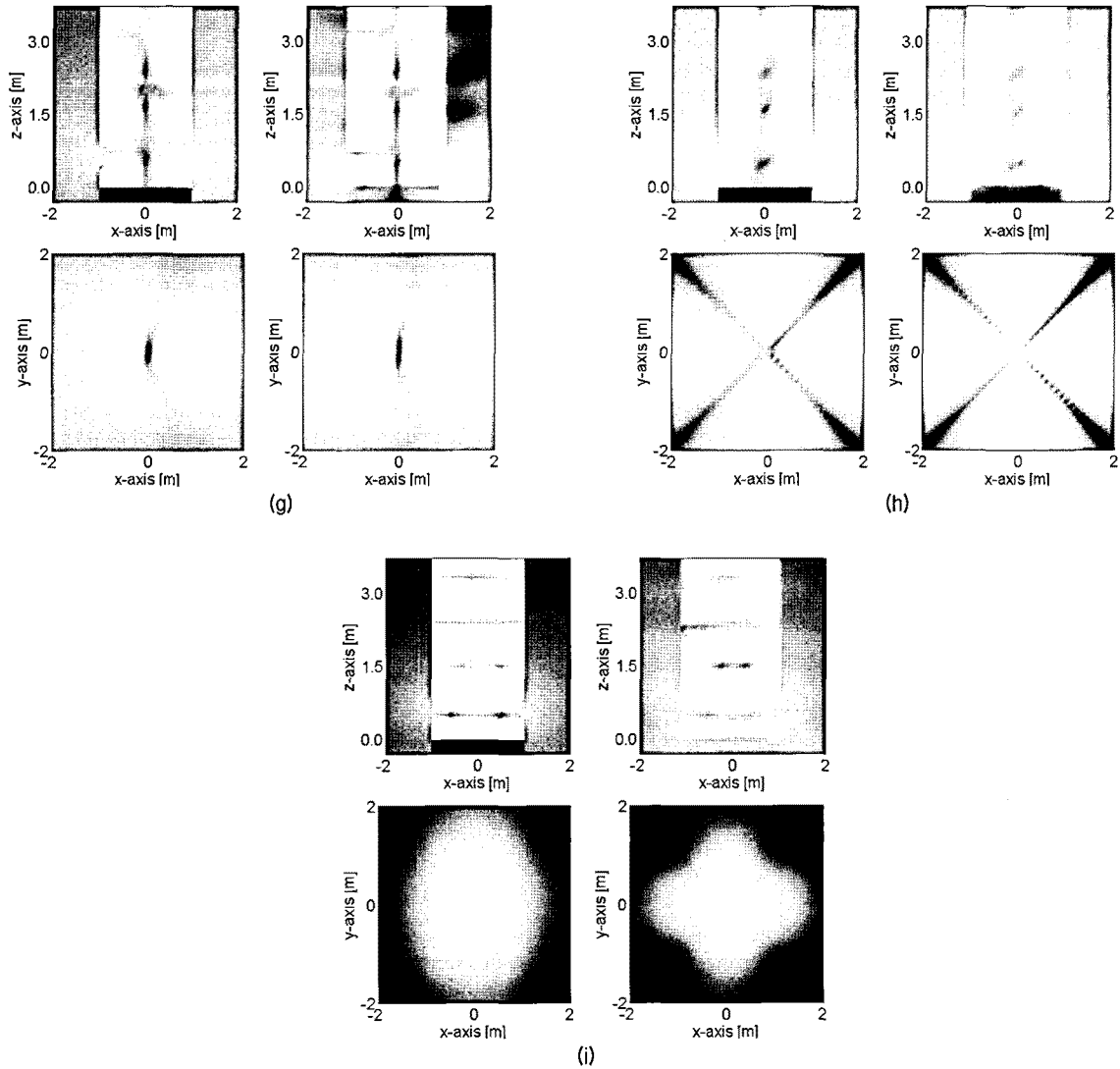


그림 5. 모드별 음압 분포. 이론 vs. SYSNOISE : 정규화 된 음압 0 ~ 1
 (a) 헬름홀츠 모드 (b) (0,0,1) 모드 (c) (0,1,0) 모드 (d) (0,1,1) 모드 (e) (0,0,3) 모드 (f) (0,2,0) 모드 (g) (0,1,3) 모드
 (h) (0,2,1) 모드 (i) (0,0,4) 모드

Fig. 5. Pressure distribution of each mode, theory vs. SYSNOISE : Normalized pressure 0 ~ 1,
 (a) Helmholtz mode, (b) (0,0,1) mode, (c) (0,1,0) mode, (d) (0,1,1) mode, (e) (0,0,3) mode, (f) (0,2,0) mode,
 (g) (0,1,3) mode, (h) (0,2,1) mode, (i) (0,0,4) mode.

후, 해당 격자를 명암으로 그래픽 처리하였다. 검은 부분은 음압이 가장 낮은 절선을 의미한다.

$$NP_{ij} = \frac{P_{ij} - P_{Min}}{P_{Max} - P_{Min}} \quad (22)$$

여기서

P_{ij} : Sound pressure level (SPL) in the point (i, j),

P_{Min} : Minimum SPL in the acoustic field,

P_{Max} : Maximum SPL in the acoustic field,

전반적으로 이론과 경계요소해석 결과가 매우 유사한 음압 분포를 보이는 것은 이론 모델의 타당성을 반영한다. 그런데, 앞에서 이론과 SYSNOISE 해석에 의한 주파수 응답과 피크 주파수 비교에서, 주파수가 높아지면서 두 결과에 약간의 차이가 발생하였다. 이러한 차이의 원인은 (e), (g), (i)의 (0,0,3), (0,1,3), (0,0,4) 세 모드에 기인한다. 다른 모드들과는 달리, 이 세 개의 모드들은 그림 5의 (e), (g), (i)와 같이 간극 상에 절선이 발생한다. 그 결과 간극 상에서 z축을 따라 음압이 일정하다는 이론 모델상의 가정이 오차를 발생시킨다. 이러한 문제는 향

후 간극 상에서의 음압 변화를 고려함으로써 해결이 가능할 것으로 보인다. 한편, 64.2 Hz 부근에는 (0,0,1)모드가 위치하고, 168.5 Hz의 음원 주파수 부근에는 (0,2,0)와 (0,1,3) 모드가 존재한다. 이 모드들은 보조 공동과 간극을 조절함으로써, 음원 주파수에 정확히 일치시킬 수 있는 가능성이 높으므로 주목할 필요가 있다.

IV. 음 전달에 대한 간극과 보조 공동의 영향

범중 소리의 울림을 좋게 하기 위하여 명동을 어떠한 형상으로 어느 정도 깊게 파야하는지는 매우 궁금한 사항이다. 주 공동-간극-보조 공동으로 구성된 음향계에 제시된 이론 모델을 사용하면, 간극 및 보조 공동을 적절히 조합하여 음원 주파수를 외부로 가장 잘 전달되도록 만들 수 있다. 본 연구에서는 음원 주파수를 성덕대왕 신종의 1, 2차 고유 진동수 64.2 Hz와 168.5 Hz로 설정하고, 간극과 보조 공동의 크기를 변화시키면서 그 전달 특성을 검토한다.

4.1. 보조공동의 영향

간극의 크기는 고정시키고 보조 공동의 깊이만을 변화시킨 상태에서 공명 주파수와 외부로 전달되는 음압의 변화를 검토한다. 간극 값으로는, 성덕대왕 신종의 간극에 가까운 0.55 m과 이보다 훨씬 작은 0.20 m의 두 경우를 비교 분석하였다.

그림 6 (a)는 (0,0,1) 모드 공명주파수의 변화를 보인다. 보조 공동이 깊어지면서 전체 공동이 길어지므로 공명 주파수는 감소한다. 0.55 m 간극에서 보조 공동의 깊이가 0.53 m일 때 공명주파수는 1차 진동수 64.2 Hz에 일치한다. 기존의 연구 [6]에서는 주 공동, 간극, 보조 공동을 하나의 밀폐된 공동으로 모델링하였다. 이 경우 (0,0,1)모드의 공명 주파수는 43.3 Hz로 계산된다. 따라서 0.55 m의 간극에 의한 개방 경계는 밀폐된 공동의 공명주파수를 20 Hz 정도 크게 높이는 방향으로 작용한다. 결과적으로 간극을 밀폐된 것으로 가정하고 공명주파수를 계산하면 상당한 오차가 발생하게 된다. 한편, 0.2 m 간극에서는 조금 작은 0.45 m에서 (0,0,1) 모드의 공명 주파수가 1차 진동수에 일치한다. 이는 명동을 깊이 파는 대신 간극을 줄여 공명 주파수를 음원 주파수에 튜닝시킬 수 있음을 의미하는 흥미로운 결과이다. 한편, 그림 6 (b)에서 (0,2,0) 모드는 당초 168.5 Hz의 음원 2차 주파수에

가까워서 쉽게 튜닝 될 것으로 예상되었으나, z축 상에서 절선을 갖지 않는 모드의 특성 때문에 보조 공동의 깊이를 변화시켜도 공명 주파수가 변화하지 않는다. 결국, 이 모드의 주파수를 간극이나 명동의 깊이로 조절하여 음원 주파수에 일치시키는 것은 어렵다. 그러나 그림 6 (c)에서 당초 음원 주파수와 떨어져 있었던 (0,1,3) 모드의 공명주파수가, 보조 공동이 깊어지면서 계속 감소하여 음원 2차 주파수인 168.5 Hz에 일치하는 것을 볼 수 있다.

궁극적으로 음원 주파수 64.2 Hz 또는 168.5 Hz를 외부로 가장 잘 전달하는 간극-명동 조건을 찾는 것이 관심사이다. 험 (hum)으로 불리는 64.2 Hz 음은 성덕대왕 신종에서 가장 오래 지속되는 낮은 음이고, 기본음 (fundamental) 168.5 Hz 성분은 타격음을 웅장하게 하는 가장 중요한 성분이다. 그림 7은 이 두 개의 주파수에서 보조 공동의 깊이에 따른 외부 음압을 구한 결과이다. 그림 7

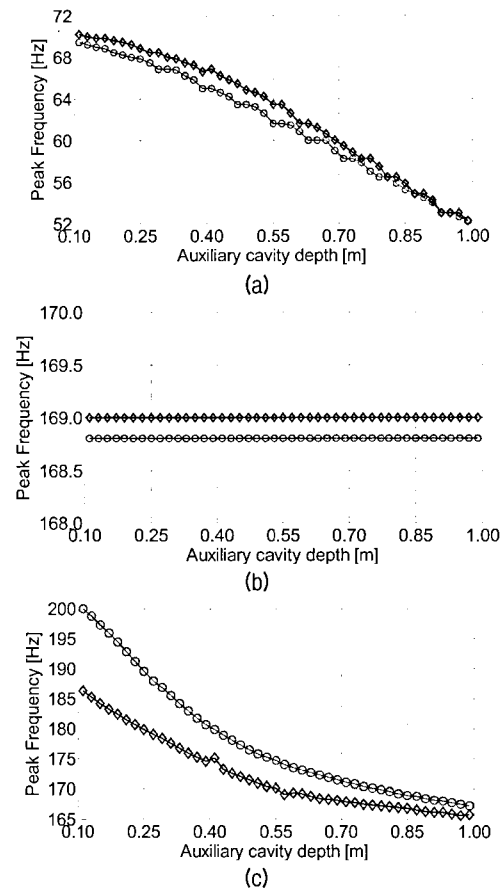


그림 6. 보조공동의 크기에 따른 공명 주파수 :
 ○- 간극 = 0.20 m ◇- 간극 = 0.55 m
 (a) (0,0,1) 모드 (b) (0,2,0) 모드 (c) (0,1,3) 모드
 Fig. 6. Resonance frequencies of an each mode with the auxiliary cavity size increment :
 ○- gap size = 0.20 m, ◇- gap size = 0.55 m,
 (a) (0,0,1) mode, (b) (0,2,0) mode, (c) (0,1,3) mode.

(a)에서 64.2 Hz의 음원 주파수는 0.55 m 간극에 0.53 m 보조 공동의 조합과, 0.20 m 간극에 0.45 m 보조 공동의 조합에서 외부로 가장 잘 전달되고 있다. 이 조합에서 (0,0,1) 모드 음이 음원에 의하여 강하게 공명되면서 간극을 통하여 외부로 잘 전달된다. 그림 7 (b)의 168.5 Hz 음의 경우에는 0.55 m 간극에 0.60 m 보조 공동의 조합과, 0.20 m 간극에 0.85 m 보조 공동의 조합에서 음이 가장 잘 전달되는 것으로 나타난다. 이러한 조합은 그림 6 (c)에서 (0,1,3) 모드의 주파수를 음원 주파수 168.5 Hz에 일치하게 만들어 강한 공명음을 발생시킨다. 이러한 결과는, 보조 공동의 깊이를 조절하여 음향공명 주파수를 음원의 주파수와 일치시킬 때 울림이 가장 좋을 것이라는 기존의 추측을 이론적으로 뒷받침한다. 특히, 본 연구에서는 간극이 공명주파수에 상당한 영향을 준다는 사실을 처음으로 규명하고 있다. 한편, 그림 7을 보면, 0.20 m의 간극에서 0.55 m 간극에서보다 외부 음압이 더 크게 발생한다. 간극이 크면 음 방사 면적이 증가하나 공동내부 공명음의 음압이 낮아지는 것으로 확인 되었다. 결국 두 가지 요인이 복합적으로 작용하여 외부 음장을 결정하게 된다. 그러나 이 현상은 단순한 점 음원 하에서의 결과이므로, 실제 범종에 적용하는 데에는 아직 한계가 있다. 향후 종체의 진동 모드를 고려하여 주 공동 내면의 속도

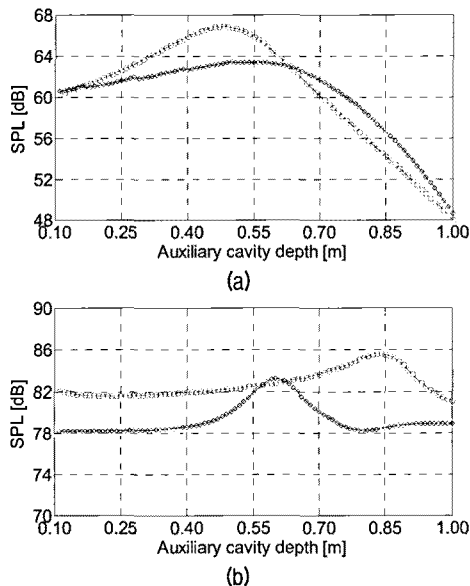


그림 7. 보조 공동의 깊이에 따른 음압 레벨 :
 ○ 간극=0.20 m ◇ 간극=0.55 m
 (a) 64.2 Hz (b) 168.5 Hz
 Fig. 7. Sound pressure level under the auxiliary cavity size variation :
 ○ gap size=0.20 m, ◇ gap size=0.55 m,
 (a) 64.2 Hz, (b) 168.5 Hz.

분포와 위상을 갖는 면 음원 모델을 검토한다면 보다 상세한 결과를 얻을 수 있을 것이다.

4.2. 간극과 보조 공동의 음 전달 효과

보조 공동과 간극의 두 효과를 동시에 파악하기 위하여, 명동과 간극의 크기를 동시에 변화시키면서 64.2 Hz와 168.5 Hz에서의 공동 외부 음압을 이론 모델을 통하여 검토하였다. 외부 음압을 식 (22)에 따라 정규화시켜 그래픽 처리한 결과를 그림 8에 보인다. 그림에서 검은수룩 음압이 높고 외부로 음이 잘 전달됨을 의미한다. 그림 8 (a)에서 64.2 Hz의 음압 변화를 보면, 수평축을 따르는 간극의 변화보다는 수직축을 따르는 보조 공동 깊이에 따른 음압의 변화가 크다. 이는 음의 전달에서 간극 효과보다는 명동 효과가 크며, 간극보다는 보조 공동으로 표

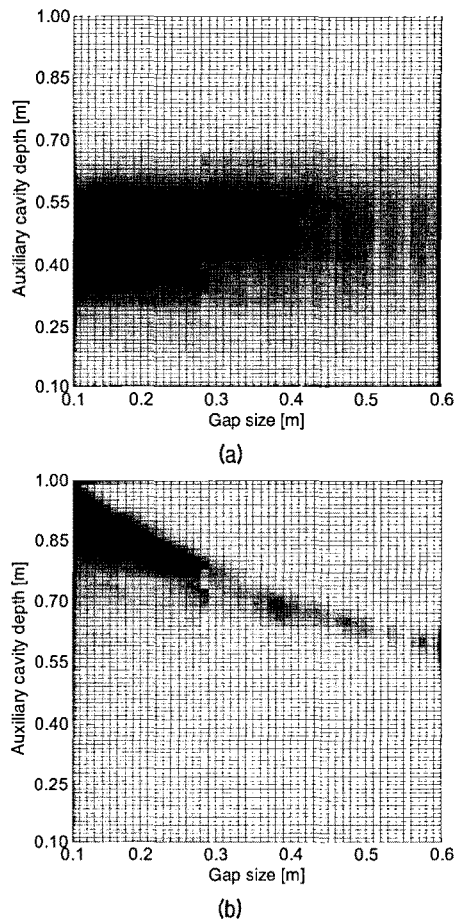


그림 8. 보조 공동과 간극의 크기에 따른 외부 음장에서의 음압 : 정규화 된 음압 0 ~ 1
 (a) 주파수 64.2 Hz (b) 주파수 168.5 Hz
 Fig. 8. Pressure response in the exterior field with the different combinations of an auxiliary cavity and a gap : Normalized pressure 0 ~ 1 ,
 (a) frequency 64.2 Hz, (b) frequency 168.5 Hz.

시되는 명동의 깊이를 조절하는 것이 효과적임을 의미한다. 이러한 경향은 그림 8 (b)의 168.5 Hz 음에서도 유사하다. 고차음의 공명을 위하여 더 깊은 보조 공동이 필요한 것은 전술한 바와 같이 고차의 음향 모드로 튜닝 하여야 하기 때문이다. 하나의 간극과 보조 공동의 조합으로 중요한 1, 2차 음원 주파수를 모두 공명시킬 수 있다면 좋으나, 이러한 조건이 맞아 떨어지는 것은 쉽지 않을 것이다. 흥미로운 점으로, 그림 8에서 0.55 m 간극에서 0.60 m 깊이의 보조 공동 조합은 168.5 Hz 음을 공명시킬 뿐만 아니라, 1차 음원 주파수인 64.2 Hz 음도 잘 전달시키는 것을 볼 수 있다. 이는 그림 7의 음압레벨을 보면 확인된다. 이러한 결과는 간극과 보조 공동을 함께 조합함으로써 범중에서 가장 중요한 1,2차 고유진동수를 모두 잘 방출시키는 최적의 조합이 존재할 가능성을 시사한다.

V. 결 론

주 공동-간극-보조 공동으로 구성된 원통형 음향계의 음 전달의 해석 모델을 유도하였다. 성덕대왕신종을 단순화시킨 원통형 음향계를 대상으로, 주파수응답 특성 및 음향 모드 해석을 수행한 결과는 SYSNOISE에 의한 경계요소해석 결과에 매우 근접하였다. 성덕대왕 신종의 1, 2차 고유 진동수인 64.2 Hz와 168.5 Hz를 음원 주파수로 하여 음의 전달 특성을 검토한 결과, 주 공동, 간극, 보조 공동으로 구성된 음향계의 공명주파수가 음원 주파수에 일치하는 조건에서 음이 외부로 가장 잘 전달됨을 확인하였다. 특히, 간극의 존재는 공명주파수를 크게 증가시키므로, 음원 주파수에 일치시키기 위해서는 반드시 보조 공동과 간극의 효과를 동시에 고려해야함을 확인하였다.

0.55 m 간극과 0.53 m 깊이의 보조 공동 조합은 (0,0,1) 모드의 주파수를 64.2 Hz에 일치시킴으로써, 외부로 음을 가장 잘 전달하였다. 또한, 0.55 m 간극에 0.60 m 보조 공동 조합은 (0,1,3) 모드의 주파수를 168.5 Hz에 일치시켜 최대로 방사시킬 뿐만 아니라, 64.2 Hz 음도 매우 잘 방사시키는 것으로 확인되었다. 이러한 결과는 원통형 단순 모델에 대한 해석결과이므로, 성덕대왕 신종에 직접 적용하는 데에는 아직 한계가 있다. 그러나 향후, 신종의 정확한 제원을 대상으로 하는 SYSNOISE 해석이나 실험적 평가를 위하여 매우 유용한 사전 정보를 제공한다.

감사의 글

본 연구는 교육부의 두뇌한국21 (Brain Korea 21) 사업의 지원으로 수행 되었습니다.

참 고 문 헌

1. 이병호, "한국범종의 음향학적 해석," *한국음향학회지*, 1권, 1호, 6-18쪽, 1982.
2. 김양한, 김시문, "원통형 음향 홀로그래피를 이용한 성덕대왕 신종의 방사음장 특성분석," *한국음향학회지*, 16권, 4호, 94-100쪽, 1997.
3. 안성중, 강연준, 김석현, 박성용, "미소 비대칭 원통셀의 음향 맥놀이 해석," *한국음향학회지*, 27권, 4호, 183-190쪽, 2008.
4. Seock-Hyun Kim, Chi-Wook Lee, Jang-Moo Lee, "Beat characteristics and beat maps of the King Seong-deok Divine Bell," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 281, pp. 21-44, 2005.
5. H.G.Park, Y.J.Kang, and S.H.Kim, "Dual mode tuning strategy of a slightly asymmetric ring," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123, no. 3, pp. 1383-1391, 2008.
6. 이병호, "한국 범종의 음관과 명동," *한국음향학회지*, 2권, 1호, 1-10쪽, 1983.
7. 윤두병, 김양한, "실험적 분석을 통하여 본 성덕대왕신종 음등의 음향학적 분석," *한국음향학회지*, 16권, 6호, 19-24쪽, 1997.
8. Donald H. Robey, "On the radiation impedance of an array of finite cylinders," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 27, no. 4, pp. 706-710, 1954.
9. John L. Butler and Alexander L. Butler, "A Fourier series solution for the radiation impedance of a finite cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 104, no. 5, pp. 2773-2778, 1998.
10. Frank Fahy, *Foundation of Engineering Acoustics*, Elsevier Ltd., 2005, pp. 218-220.
11. Y.H. Kim, S.M. Kim, "Solution of coupled acoustic problems: A Partially opened cavity coupled with a membrane and a semi-infinite exterior field," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 254, no. 2, pp. 231-244, 2002.
12. LMS international, *SYSNOISE Users Manual*, Revision 5.5, 2000.

저자 약력

•정 원 태 (Won-Tae Jeong)

2004년: 고려대학교 기계공학과 (학사)
 2004년~현재: 서울대학교 기계항공공학부 석박 통합과정
 ※주관심 분야: 구조-음향 연성 및 진동



•강 연 준 (Yeon-June Kang)

한국음향학회지 27권 4호 참조

•김 석 현 (Seock-Hyun Kim)

한국음향학회지 27권 4호 참조