韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 2호, 2010. 5. 475-502

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 2, May. 2010. 475-502

수학 문제 해결에서 학업성취도에 따른 표상 활용 능력과 특징 분석

김 민 경 (고려대학교 대학원)
권 혁 진 (고려대학교)

본 연구에서는 고등학교 1학년 113명을 대상으로 수학 문제 해결에서 표상 활용 능력을 학업성취도에 따라 분석하고, 학업성취도에 따른 표상 활용의 특징에 대하여 알아보았다. 이를 위해서 학생들에게 다양한 표상을 사용하여 해결할 수 있는 문제를 제시하고, 이를 최대 세 가지방법을 이용하여 풀도록 하였다. 또한 지필 평가의 비교분석 결과를 토대로 6명의 학생을 선발하여 인터뷰를 실시하고 학업성취도에 따라 표상 활용에 차이가 나는 원인을 분석해 보았다.
그 결과 상위권 학생들은 50%이상이 모든 문항에서 두 가지 이상의 표상을 활용해 문제를 해결하였지만, 중위권 학생들은 문항의 난이도에 따라 편차가 있었고, 하위권 학생들은 문제 해결에 표상을 다양하게 활용하지 못하였다. 표상 활용의 특징으로, 상위권 학생들은 수식사용을 선호하였고 문제 해결과정에서 수학적 기호를 효율적으로 사용하였다. 이에 반해 중・하위권 학생들은 표나 그림을 이용하는 경우가 대다수였고, 같은 표상 양식이라 할지라도 상위권 학생이 중・하위권 학생보다 더 구조적이고 세련되게 표현하고 있었다.

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

산업화, 정보화로 야기된 급격한 기술적, 사회적, 문화적 발전으로 인해 현대 사회는 더욱 복잡해지고 예측 불가능하게 변해가고 있다. 이러한 사회에서 학생들은 뜻하지 않은 문제 상황에 직면하게 될 수 있고, 이때 학생들에게는 창의적으로 대처해나갈 수 있는 능력이 요구되어 진다. 따라서 연산기술이나 공식 암기보다는 자기 주도적 사고와 추론을 통한 학생들의 문제해결력 신장은 수학교육에서 강조되어야할 가장 중요한 요소 중의 하나이다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000).

문제를 해결하기 위한 필수적인 과정으로 학습자는 문제에서 주어진 조건, 목표들에 대해서 인식

* 접수일(2010년 2월 24일), 심사(수정)일(1차: 2010년 3월 21일, 2차: 4월 12일), 게재확정일자(2010년 4월 14일)
* ZDM분류 : C34
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 수학적 표상, 수학적 문제 해결.

하고 이해하여 이를 해결전략으로 사용할 수 있어야 한다. Greeno(1978)는 문제 이해의 단계를 정보를 표상하는 것으로 보았다. 학습자가 문제를 이해하는 것은 문제 요소들 간의 관계에 대한 표상구조를 형성하는 것이고, 교사는 학생들의 표상을 관찰함으로써 학습자가 문제를 잘 이해하고 있는지를 알 수 있다. 또한, Goldin(2008)은 수학은 실세계의 본질적인 부분을 개념화하는 역할을 하며, 이 과정에서 필수적인 부분은 실세계를 구조적으로 준 동형이 되는 구조로 축소하여 광범위하게 사용할 수 있도록 하는 과정이라고 설명하였다. 그리고 구문론적인 풍부함과 다양성, 보편성에 따른 상징적 체계의 사용이 수학에서 매우 중요하며 이를 포괄할 수 있는 표상은 수학 교수-학습에서 필수적인 요소라고 강조하고 있다.

표상(representation)은 수학교육에서 중요한 요소로서 표상과 문제 해결은 수학적 사고의 중심에 있다. 그래서 최근에 이르기까지 표상에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다(Cobb, 2000; Dreyfus, 1991; Goldin, 2008; Goldin & Janvier, 1998a, 1998b; Izsák, 2003; Kiczek et al. 2001; Pugalee, 2004). 최근 NCTM(2000)의 학교수학과 원리를 위한 규준에서 표상을 의사소통의 한 부분이 아닌 수학적 과정 영역의 한 부분으로 따로 분리하였고, 표상에 대한 학습 목표를 다음과 같이 제시하고 있다.

> 첫째, 학생들은 수학적인 개념을 조직하고 기록하며 의사소통을 하기 위해서 표상을 창조하고 사용할 수 있어야 한다. 둘째, 문제 해결에 적절하고 효율적인 표상을 선택하고 적용하며, 표상 유형들 간에 자유로운 전환을 할 수 있어야 한다. 셋째, 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하고 해석하기 위해서 표상을 활용할 수 있어야 한다(NCTM, 2000, p. 67).

수학적 개념을 이해하고 발달시키는데 있어서도 표상의 작용은 다양하게 이루어지고 있다. 특히 같은 개념에 대한 서로 다른 표상을 이해하는 것은 수학적 개념 이해에 있어서 중요하며, 여러 시스템의 상호작용으로부터 충분한 내적 표상의 발달을 이루는 것은 필수적이다(Goldin & Steingold, 2001). 개념 이해뿐만 아니라 문제 해결에 있어서도 한 문제에 대해 다양한 표상을 생각해 보는 것은 중요하다. 이는 문제 해결 방법에 대해 여러 가지 측면에서 생각해볼 수 있는 기회를 제공할 뿐만 아니라 다양한 해법을 익히게 한다. 그리고 다양한 표상을 경험해 본 학생들은 좀 더 수월하게 문제 해결 전략을 제시할 수 있다. 왜냐하면 학생들이 문제를 해결할 때 이전에 풀어본 방법을 적용하여서 해결해 나가는 경우가 많은데 여기에서 결정적인 역할을 하는 것이 과거에 사용했던 표상을 기억해 내는 것이기 때문이다.

여러 가지 표상들은 각자 장단점이 있기 때문에 학생들의 개인적인 사고 스타일에 맞게 교육되어야 한다(Friedlender & Tabach, 2001). 이에 대해 NCTM(2000)은 표상은 학생들이 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델링하는 것을 포함하여, 문제를 해결할 때 여러 수학적 표현 방법을 사용하도록 기회를 제공하는 것이 중요하다고 강조하고 있다. 그러기 위해서 교사는 폭넓게 표현을 사용하는 경험을 제공하고, 특정한 문제를 해결하는 데 유용한 새로운 표현 양식을 소개해야 한다. 특히 함수를 학습할 때, 학생들은 대수 문제의 해결을 위해 한 표상에서 다른 표상으로 옮겨갈 수 있다. 학생들은

숫자 데이터 테이블을 일차 함수로 바꾸어 생각할 수 있어야 하고, 일차 방정식과 그 형식을 동치의 형태로 유연하게 인식할 수 있어야 한다. 이러한 유연성은 문장제 문제에서 여러 가지 방법으로 표상해보는 경험을 통해 형성할 수 있다.

표현의 선택에 대한 민감도가 문제 해결의 결정적인 요인임은 이미 널리 알려진 이야기이다(김선화, 1992). 이에 따라 수학적 문제 해결 과정에서 내적, 외적 표상의 전략적 구조에 대한 연구들이 이루어져 왔다(Goldin & Janvier, 1998a, 1998b; Goldin & Shteingold, 2001; Swarfford & Langrall, 2000; Pyke, 2003). 이들 연구에 따르면 학생들이 어떤 표현을 선택하는 지에 따라 문제 해결의 성공 여부가 달라진다. 따라서 성공적인 수학적 문제 해결을 위해서 표상의 명확한 사용은 절대적이다. 자신의 생각을 정확히 표현하기 위해서는 한 가지 표현법만으로는 부족하다. 다양한 표상을 알고, 이들 사이의 관계를 정확히 파악하여 한 표상에서 다른 표상으로의 전이가 자유로운 학생이 문제 해결 능력 면에서 그렇지 못한 학생에 비해 우위에 있을 것이다. 이를 검증하기 위해서는 여러 가지 표상을 사용할 수 있는 학생들이 실제로 수학적 문제 해결을 함에 있어서 우월한 능력과 성적을 보여주고 있는 것 인지에 대한 연구가 필요하다.

본 연구는 수학교육에서 표상의 중요성과 필요성에서 출발하여, 수학적 문제 해결 과정에서 학생들이 학업성취도에 따라 다양한 표상을 사용하는 능력과 그 표현 양식에 차이가 있는지 살펴보겠다. 또한, 인터뷰와 학생 관찰을 통해 학생들이 문제 해결에서 다양한 표상을 사용하는데 있어서 학생들 간에 차이가 나는 원인을 살펴보겠다. 이를 통하여 최종적으로 학생의 수학적 표상과 다양한 전이 능력이 가지는 의의를 이해하고, 이를 적용해 수학 학습 지도를 위한 시사점을 얻는 데 목적이 있다.

이를 위한 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

가. 학생들의 학업성취도에 따라 수학적 문제 해결에서 다양한 표상 활용 능력에 차이가 있는가?

나. 학생들의 학업성취도에 따라 수학적 문제 해결에서 학생들이 사용하는 표상 유형에 차이가 있는가?

다. 수학 문제 해결에서 학습자 간 표상 활용 능력 및 표상 유형의 차이에 대한 원인은 무엇인가?

2. 용어의 정의

(1) 표상

인간의 내적인 정신 활동이 구체화된 양식으로, 내적표상과 외적표상을 모두 포함하는 의미이다.

(2) 표상양식

본 연구에서는 Lesh(1987)와 장혜원(1997)의 모델을 바탕으로 표상양식을 정의하였다. 활동지를 통하여 분석되는 표상양식은 시각적 표현(그림, 다이어그램, 그래프), 수식, 표(목록), 언어적 묘사로 제한한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 문제 해결

문제 해결의 정의에 대해서는 학자들마다 다른 견해를 보이고 있지만, 대체적으로 '목표지향적인 인지적 조작 과정'으로 정의하고 있다. 또한 문제 해결에서의 '문제'는 목표(구하고자 하는 것), 주어진 상태(주어진 조건), 장애 요인이 포함되어 있고 해결방법이 즉각적으로 얻어지지 않는 것을 뜻한다. 학생들은 문제를 해결하려는 의지가 있고 그 목표를 달성하기를 원하지만 구체적이고 확실한 해결방법을 즉시 알고 있지 못하는 상태로, 목표 상태에 도달하기 위해서는 학생들의 깊은 사고가 필요로 하는 것이다(Polya, 2004).

수학적 문제 해결을 위해서 학생들은 적절한 절차와 과정을 따라가게 된다. Polya는 수학적 문제 해결 과정을 문제에 대한 이해 단계(Understanding the problem), 궁극적으로 풀이에 대한 계획을 작성하는 계획 작성 단계(Devising a plan), 계획 실행 단계(Carrying out the plan), 이전 단계에서 얻은 풀이를 점검하는 검토하기 단계(Looking back)의 4단계로 설명한다. 한국교육개발원(1985)은 Polya의 4단계를 기본으로 하여 문제 해결 단계를 문제의식, 문제 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성의 5단계로 제안하고 있다.

많은 학자들이 수학적 문제 해결 과정 중에서 문제 이해의 단계를 문제 해결의 첫 단계로 보고 있다(Schoenfeld, 1992; Polya, 2004; 한국교육개발원, 1985). 학생들은 문제 이해 단계에서 제일 먼저 주어진 문제가 무엇인지를 이해하기 위한 문제 표상을 하게 되는데, 이때 이루어지는 올바른 초기 표상은 관련된 지식을 활성화시키고, 적절한 계획 수립이 가능케 함으로 문제해결에 있어 매우 중요하다. Polya는 문제 이해의 단계에서의 표상 활동으로 그림을 그려보거나 기호를 붙이는 과정을 제안하였다. 특히 그림은 문제의 이해를 쉽게 해주고, 조건을 다루고 분리하여 재결합할 수 있게 해준다고 보았다. 그 외에 문제를 자신의 말로 표현하거나 핵심적인 단어를 파악하는 것도 효과적인 표상 방법이라 하겠다. 이처럼 표상에 대한 여러 연구가 문제 해결과 연결되어 이루어지고 있는 것은 표상이 문제 해결 전략과 연관이 깊기 때문이다. 그래서 표상에 대한 관점의 변화와 함께 문제 해결에 대한 관점도 변하고 있다.

2. 표상

1) 표상의 정의

표상은 그 무언가를 어떤 방식을 이용하여 나타내고 있는 형태이다(Goldin, 2008). 실세계의 물건을 표현하는 단어, 집합의 순서를 표현하는 수, 수직선 위의 위치를 나타내는 수 등이 수학교육에서 사용하고 있는 표상의 예이다.

수학교육에서의 표상은 인간의 정신적 활동에 대한 구체화로 보기도 한다. 김선화(1992)는 '표현'이라는 말은 그림이나 언어뿐만 아니라 인간의 인지적 구성 체계도 포괄하는 것으로 설명하고 있다. 학습에서 언어의 중요성을 강조한 Vygotsky(1987)는 글로 표현해 놓은 것은 인간의 내면의 생각을 담고 있으며, 이를 통해 현재의 지식과 새로운 지식 사이의 관계를 형성할 수 있다고 하였다.

학자들마다 표상에 대해 조금씩 다른 관점으로 접근하고 있기 때문에 Goldin & Janvier(1998a, 1998b)는 표상에 대한 다양한 해석이 있음을 서술하면서, 그 해석에는 다음과 같은 내용이 포함되어 있다고 하였다.

1. 수학적으로 묘사하거나 수학적인 아이디어로 구체화하는 과정인 외적이고 물리적 상황구조
2. 구문론적이고 어의론적인 구조적 특징을 강조하여 문제를 제기하고 수학적으로 논의할 때 나타나는 언어적 구체물이나 언어체계
3. 상징이나 상징체계를 통하여 표현하는 형식적인 수학적 구조
4. 수학적 사고와 문제 해결 과정의 몇몇 현상을 묘사, 행동을 통해 추론하는 내적이고 개인적인 인지형태

일반적으로 표상은 내적표상과 외적표상으로 구분하여 생각한다(장혜원, 1997; Goldin & Shteingold, 2001; Miura, 2001). 숫자나 데카르트 좌표는 우리가 수학에서 외적표상이라고 부르는 대표적인 예이다. 학생들은 이러한 외적 표상을 교실에서 사용하며, 때로는 새로운 외적 표상을 만들어 내거나 그것에 대하여 토의하기도 한다. 외적 표상은 수학의 형식적인 상징체계로 주로 기호와 형식화에 관한 것들이며, 숫자체계, 대수적 표현과 방정식, 함수, 미분, LOGO와 같은 컴퓨터 언어를 포함한다. 구어와 문어에서 사용되는 언어와 문장도 외적 표상이다. 또한, 수직선, 데카르트 좌표계, 극좌표 또는 데이터의 박스플롯(Box Plot), 기하학적 다이어그램과 같이 시각적, 공간적인 관계를 디자인하는 외적 표상도 있다. 외적 표상의 형태와 관계는 상황에 따라 만들어지기도 하지만, 일반적으로 개인적 발견과 협의를 통하여 오랜 기간에 걸쳐 형성된다. 그래서 Izsák(2003)는 외적표상을 정보를 생각하고 전달하기 위해 인간이 만들어낸 가공물로 정의하였다.

내적표상과 외적표상의 구분은 연구자의 관점에 따라 그 정의를 조금씩 달리한다. Miura(2001)은 외적표상을 교육에서의 표상이라 명명하고 있다. 교육에서의 표상은 교수자와 학습자 사이의 커뮤니케이션을 통한 의미공유로 형성되며, 정의, 예, 모델을 예로 들었다. 내적 표상은 수학적 개념이나 문제 해결법의 발견에 대해 스스로 구축하는 과정으로 다른 사람과 공유하지 않고 학생 안에서 일어나는 작용으로 보고, 이를 인지적 표상이라 부른다. 장혜원(1997)은 그의 연구에서 내적 표상은 '표상'으로, 외적 표상은 '표현'으로 용어를 달리하여 설명하고 있지만 이 둘을 포괄하는 의미로 '표상'이라는 용어를 사용하여 '표상 모델'을 개발하였다. Goldin(2008)은 외적 표상은 '행동주의'의 관점에서 본 것이고, 이 관점을 가진 교사는 학생들의 기술, 규칙, 알고리즘에서 보다 복잡한 체계로 발전해 나가는 것에 관심이 있다고 하였다. 이에 반해 '모든 지식은 개인적인 경험의 세계에 의하여 구조된다.'라고 본 구조주의자들은 내적표상을 강조한다.

학습자의 내적 표상 발달을 강조한 Goldin(2008)은 학생들이 수학적이든 수학적이 아니든 표상을 사용하여 이야기할 때, 그 표상은 내적 표상 안에 있는 넓은 체계에 속해 있다고 이야기한다. 내적 표상이란 학생의 개인적인 상징 구조와 수학적 기호의 의미를 이해하는 것뿐만 아니라 그들의 모국어와 시각적 이미지, 공간적 표상, 문제 해결 전략과 발견법, 그리고 수학적 관계에 대한 사고 작용까지도 포함한다. 학생들이 외적표상을 어떻게 개인적으로 이해하고 있느냐에 초점을 두고, 내적표상을 학생들의 '정신적 표상(mental representation)'이라고 부르기도 한다.

표상은 수학을 수행하는 학생들의 마음속에서 '내적으로' 발생하는 과정 및 결과뿐 아니라 외적으로 관찰 가능한 과정 및 결과에도 적용된다. 이는 '과정과 산출'을 모두 포함하여 이해한다는 것을 의미한다(MCTM, 2000). 학자들마다 표상의 정의를 다르게 하고 연구자들마다 강조하는 점이 차이가 나지만, 수학 교육의 많은 연구들과 NCTM 규준 집에서 '표상'이라는 용어를 가장 보편적으로 사용하고 있으므로 본 연구에서도 학습자의 인지적인 사고 과정인 내적표상과 그림, 식, 표, 그래프 등의 수학적 표현인 외적표상을 둘 다 표상이라 하겠다.

2) 표상 유형

Friedlender & Tabach(2001)는 표상에 대해 다음과 같은 네 가지 유형을 제시하고 그에 대한 장단점을 설명하고 있다. 첫째, 언어적 표상(verbal representation)은 문제 해결에서 문맥을 이해하고 해결방법을 의사소통하는 자연스러운 환경을 만들어 준다. 언어적 표상은 문제해결의 도구이며, 수학과 다른 학문적 영역과 일상 생활간의 연결을 해주는 것을 강조한다. 하지만 언어적 표상은 개인적 스타일에 의존하여 수학적 의사소통에 장애가 될 수 있다. 둘째, 숫자 표상(numerical representation)은 대수에서 다른 어떤 표상과도 편리하고 효과적으로 연결해주는 다리역할을 한다. 그러나 일반적으로 그림이 주어졌을 때 효과적이지 못하고, 중요한 문제 해결 방법을 놓치거나 일반화를 어렵게 할 수 있다. 셋째, 그래프 표상(graphical representation)은 실변수에서 실함수를 명확한 그림으로 주어졌을 때 효과적이다. 그래프는 시각적인 접근을 좋아하는 학생에게는 직관적이고 개별적인 매력이 있지만 손으로 그래프를 그리는 경우에는 정확도가 떨어질 수 있다. 넷째, 대수적 표상(algebraic representation)은 패턴과 수학적 모델의 표상에서 간결하고 효과적이다. 일반적인 진술을 증명하거나 정당화 방법을 위한 대수적 조작을 위해 사용된다. 하지만 어떤 학습 단계에서는 수학적인 의미나 본질이 흐려지거나 장애가 될 수 있고 학생에 따라서는 결과에 대해 상호작용하는데 어려움을 느낄 수 있다.

Swarfford & Langrall(2000)은 표상의 유형을 다이어그램, 표, 그래프, 언어적 묘사, 방정식과 같이 다섯 가지로 보았다. 각 표상 유형에 대한 정의를 살펴보면, 다이어그램(Diagram)은 하나 또는 그 이상의 특정한 경우에 대해서 그림으로 나타낸 것이고, 표(Table)는 특정한 경우의 나열을 조직적으로 표상한 것이다. 그래프(Graphical)는 점별 적인 관점에서 특정한 경우를 나타낼 수도 있고, 일반화에 대해 나타낼 수도 있는 표상이다. 언어적 묘사(Narrative description)는 일반화된 상황을 언어적으로

나타낸 것이며, 방정식(Equations)은 대표적인 상징적 표상으로 변수를 이용해 나타낸 것이다.

이와 같이 각각의 표상에는 장단점이 있기 때문에 학생들은 개인적인 사고 스타일에 맞는 표상을 사용할 줄 아는 것이 필요하다. 이를 위해 교육과정과 교사는 문제와 그 해결방법의 표상을 여러 가지 방법으로 접근하는 다양한 표상(multiple representation)을 사용할 수 있는 환경을 만들어 주어야 한다.

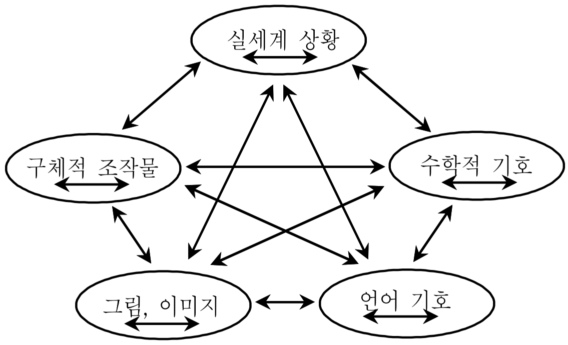
3) 표상 체계

표상 체계에 대한 이론의 가장 대표적인 출발점을 Bruner(1967)의 EIS이론으로 볼 수 있다. Bruner(1967)는 표현을 활동적 표현(Enactive representation), 영상적 표현(Iconic representation), 상징적 표현(Symbolic representation)으로 구분하고 있으며, 아동의 인지적 발달에 따라 알맞은 표현 방식을 사용하여 가르쳐야 한다고 주장하였다. 활동적 표현은 이미지나 언어를 사용하지 않고 행동으로만 표현하는 것이다. 하지만 이렇게 학습하는 것은 매우 어렵기 때문에 이를 보완하기 위해서 시각화나 다른 감각기관을 통한 영상적 표현을 이용할 수 있다. 하지만 영상적 표현 역시 이미지의 사용에 의존한다는 한계를 가지고 있다. 상징적 표현은 앞의 두 표현에 비해 높은 수준의 산출로 언어와 상징체계를 이용한 표현이다. 이와 같은 세 가지 표현 방법은 서로 위계가 있어서 Bruner는 상징적 표현을 가장 상위 단계의 표현으로 보았고, 활동적 표현 - 영상적 표현 - 상징적 표현을 거쳐서 최종적으로 상징적 표현에 능통해 지는 것을 지적 발달로 보았다.

Bruner(1967) 이론의 제한점을 보완한 표상체계에 대한 이론으로 Lesh(1987)의 연구를 들 수 있다. Lesh (1987)는 Bruner(1967)의 EIS이론의 세 단계를 확장시켜 표상 유형을 다섯 가지로 분류하였고, 이들 사이의 관계를 <그림 Ⅱ-1>과 같이 나타내었다. 실세계 표상은 현실세계의 대상을 사용하여 표현한 것이고, 조작적 표상은 퀴즈네르 색 막대 또는 수직선처럼 수학 학습에 사용되는 모델과 같은 구체 물을 의미한다. 이미지는 그림, 다이어그램과 같은 심상(image)을 의미하고, 수학 기호는 수식이나 기호 등의 구문적 기호를 사용하여 기록하고 써놓은 표상을 의미한다. 마지막으로 언어 기호는 모국어를 사용한 언어적 표상을 의미한다. Lesh(1987)는 이 표상 체계 자체도 중요하지만, 표현 체계들 간에 전환이 한 방향이 아닌 각 표현 양식들 사이의 상호작용이 이루어지고 있으며 더 나아가 표현 체계 안에서도 변환할 수 있다는 점을 강조하고 있다.

Lesh(1987)은 표상 체계와 더불어 '모델링'과정에 대해 이야기하면서 모델링의 중요한 특징을 다음과 같이 다섯 가지로 보고 있다. 모델링은 적절하고 관계있는 요소를 이용해 단순화하는 과정이며, 실제 상황과 모델 사이의 관계 대응(mapping)이 성립한다. 모델의 특성을 조사하면 원래 상황에 대한 예측을 할 수 있고, 예측을 원래 상황으로 변환할 수도 있다. 또한, 모델링을 통해 변환된 예측이 유용하고 실용성이 있는지 확인할 수 있다. 그리고 Lesh(1987)은 'pizza'문제의 예를 통해 다양한 표상 사용의 중요성에 대해 강조하면서 모델을 사용할 때 다중모델(multi-model)의 사용을 권유하고 있다. 좋은 문제 해결 자가 되기 위해서는 다양한 표상 시스템을 유연하게 변경할 수 있어야 하며,

문제 해결 과정에서 편리한 표상으로 무의식적으로 전환해 갈 수 있어야 하기 때문이다.



<그림 Ⅱ-1> Lesh의 표상 변환 모델(Lesh, 1987)

Nakahara(1994)는 표상을 실제적 표상, 조작적 표상, 그림 표상, 언어적 표상, 기호적 표상 다섯 가지로 분류하였는데 기호적 표현을 이들 중 최상의 위치에 놓았다. Nakahara(1994)는 Bruner의 주장처럼 수학 기호를 사용한 표상 방법을 최상위에 두고 다른 표현들은 그 목표에 도달하기 위한 도구적 역할로 간주하였다(장혜원, 1997에서 재인용).

장혜원(1997)의 표상모델은 Bruner와 Lesh의 모델을 참고하여 표현을 실제적 표현, 조작적 표현, 시각적 표현, 언어적 표현, 기호적 표현으로 분류하였다. 실제적 표현은 실세계의 대상에 대한 것이고, 조작적 표현은 수학학습을 위해 실제적 대상을 변형한 교육 자료이다. 시각적 표현은 그림, 다이어그램, 도형, 그래프나 표를 의미하고, 언어적 표현은 일상적인 언어의 사용을 의미한다. 기호적 표현은 수학 기호, 숫자, 문자를 포함한다. 이전의 모델들과는 다르게 장혜원은 각 표현 체계는 상위 표현을 위한 도구가 되기도 하지만 표현 양식 자체가 최종 목표가 될 수 있다는 입장을 가지고 있다. 그래서 표상 모델에서 상하관계를 고려하지 않고 표상 간의 대등 성을 평면적으로 나타내었다.

내적 표상 체계에 관심이 많았던 Goldin(2008)은 5가지 내적 표상 체계를 개발하였다. 첫째는 구어적-구문론적 체계로 언어사용 능력에 대한 것이다. 둘째는 이미지 체계로 시각적/공간적, 촉각적/운동 감각적, 그리고 청각적/운율적인 부호화를 포함한다. 셋째는 형식적인 기호체계로 수학의 상징체계나 관습적인 상징체계에 대응하는 내적 형태이다. 넷째는 문제 해결을 계획하고 모니터하며 실행하는 조절 체계로 메타인지에 대한 것이다. 마지막은 정서 체계로 일반적인 태도나 신념뿐만 아니라 문제를 해결하는 동안 감정의 변화 상태를 포함한다.

본 연구에서는 지금까지 여러 연구에서 표상 양식을 구분하는데 있어서 기반이 된 이론인 Lesh(1987)의 이론과 장혜원(1997)의 표상체계를 이용해 표상 양식을 구분하였다. 두 이론은 공통적으로 실체적 표상, 조작적 표상, 이미지, 언어적 표상, 기호적 표상의 다섯 가지로 표상 양식을 구분하고 있다. 하지만 본 연구의 실험과정과 분석에서는 지필을 통해 분석할 수 있는 표상만을 대상으로 삼고 있기 때문에 실제적 표상과 조작적 표상은 제외하고 표상 양식을 시각적 표상, 기호적 표상, 언어

적 표상으로 제한하였다. 지필에서 관찰할 수 있는 그림, 표, 그래프를 시각적 표상의 하위영역으로 두었고, 기호적 표상은 수식을 사용하여 문제를 해결한 경우를 의미하고, 언어적 표상은 구문으로 풀어서 문제를 푼 경우로 보았다.

4) 문제 해결과 표상의 관계

현재 수학교육 연구들을 살펴보면 문제 해결 과정이나 문제 해결 전략에서 '문제 표상'을 공통적으로 강조하고 있다(심은영, 2006 ; 이양미・전평국, 2005; 장혜원, 1997; Diezmann & English, 2001; Goldin, 1990; Izsák, 2003; Lesh et al., 1983; Mayer, 1987). 전통적인 관점에서의 문제 해결은 기계적이고 선형적인 과정으로 보았지만, 최근의 문제 해결은 역동적이고 상호작용이 중요한 과정임을 강조하면서 문제 해결과정에서의 '표상'의 중요성이 점점 더 커지고 있다. NCTM(2000)에서도 지난 수년간 교수 학습의 방법으로 표상의 중요성을 제기해 왔고, 특히 학생들의 다양한 표상 사용 능력과 문제 해결과의 관계에 대해 관심을 두었다. 'Standard 2000'에서는 문제 해결 전략을 논하는 부분에서 교사는 학습자가 효과적으로 표상을 할 수 있도록 지원해 주어야 한다고 서술하고 있다. 그리고 학생들은 수학문제를 해결하고 개념을 이해할 때 문맥적 표상, 수학적 표상, 도형적 표상, 도표식 표상과의 연계를 통해야 한다고 주장하고 있다.

수학적 문제 해결에 대한 심도 있는 연구를 한 Polya는 발견술의 한 부분으로 그림, 기호, 방정식 세우기의 방법을 제시하고 있다. 특히 단순하지 않은 수학 문제에서 적당한 표기법과 기하학적 그림의 사용은 없어서는 안 되는 도움을 준다고 보았다. 발견술 중에서 식 세우기 방법은 한 언어에서 다른 언어로 번역하는 것과 같은데, 이는 말로 서술된 언어를 수학적 기호로 표현하는 표상 간의 전환의 과정으로 볼 수 있기 때문이다.

문제 이해 단계에서 구성한 표상을 해결 과정이 진행됨에 따라 수정되어 결과를 구할 수 있는 표상까지로 변화하는데, 이 문제 해결과정은 '문제 해결자의 표상에서의 일련의 구조적 변화'로 묘사된다(장혜원, 1997). Pyke(2003)는 문제 해결에서 읽기 능력, 공간 능력, 표현 능력의 영향의 중계자로서 전략적 표상(표상 전략, strategic representation)을 강조하였다. Swarfford & Langrall(2000)도 문제 상황의 일반화에는 변수를 사용한 언어적, 상징적 표현이 필요하고 이 경우에 문제 상황에 대한 표상이 고려되어야 한다고 하였다. 이는 문제 해결의 과정에서 문제를 이해하고 결론까지의 과정 전반에서 표상이 중요하게 작용하고 있음을 시사해 준다.

수학적 문제 해결에서 표상의 중요성을 바탕으로 Mayer(1987)는 문제 표상 훈련이 필요하다고 보았다. 숙련된 문제 해결 자는 문제를 범주화하여 해당 범주의 해결방법을 적용하여 문제를 해결하지만, 초보자들은 종종 범주에 의한 표면적인 양상만 이용한다. 이러한 어려움은 문제의 문장을 내적 표상으로 전환하는 훈련(translation training)을 통해 해결할 수 있는데, 전환 훈련 과정은 조건을 다른 단어로 변환, 목적을 다른 단어로 재진술, 그림이나 다이어그램으로 표현, 방정식으로 표현해 보는 것들이 있다.

Lesh(1987)은 수학 문제 해결에서의 인지 모델을 설정하고 동일한 수학 구조를 갖지만 표현을 달

리한 여러 개의 문제에 대한 학생들의 반응을 분석하고, 번역 능력에 근거하여 학생의 개념 이해 수준을 평가하였다. 그의 표현 분류에 따르면 전자를 위해서는 조작적 도구, 실세계 상황, 수학 기호, 문장을 이용하고, 후자의 경우에는 기호, 구문적 언어, 그림 표현을 사용하였다.

장혜원(1997)은 주어진 표현을 다른 표현으로 번역함으로써 그 개념에 대한 의미가 충실해지고 문제의 정보를 잘 이해하여 해결의 실마리를 찾을 수 있다는 사실은 표현 간의 번역이 개념 학습 및 수학 문제 해결에 중요한 부분임을 알 수 있다고 표상간의 전이를 강조하였다. Polya도 어떤 이론적 결과의 타당성을 서로 다른 두 가지 방법으로 유도하여 확신하는 것은 물체를 두 가지 감각을 통해 지각하기를 원하는 것처럼 인간의 당연한 욕구로 보았다.

Dreyfus(1991)는 여러 가지 표상을 병행하여 사용할 수 있도록 학습하는 과정을 다음 4단계로 제안하였다.

· 하나의 표상 이용하기
· 하나 이상의 표상을 병행하여 사용하기
· 함께 이용된 표상들 사이의 연결 고리 만들기
· 표상들의 통합과 그들 사이의 유연한 전환

이와 같은 과정을 통하여 학생들은 여러 가지 표상들 사이를 통합하고, 이용하고자 하는 표상에 대한 통제가 가능하게 된다.

Swarfford & Langrall(2000)은 일반화나 언어적 표현 등의 다양한 상황에 대한 풍부한 경험을 해야 하며, 이는 문제 해결에 있어서 다양한 표상을 통해 같은 문제를 해결하는 경험의 필요하다고 보았다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구에서는 경기도의 G고등학교 학생 64명과 경기도 S고등학교 학생 49명, 총 113명을 연구대상으로 선정하였다. 각 학교에 대한 특성을 살펴보면, 경기도 A시에 위치한 G고등학교는 전 학년이 47학급인 규모가 큰 학교이며, 학교 주변이 아파트 단지들로 둘러싸여있고 생활수준은 중상위권 정도이다. 학생들의 학업성취도는 주변의 다른 학교들에 비해 높은 편이고 학부모들의 교육열도 높은 편이다. 경기도의 S시에 위치한 S고등학교는 한 학년이 14학급으로 구성된 학교이다. 한 반에서 선행학습을 하거나 학원을 다니는 학생이 절반 정도에 불과하며, 상위권 학생부터 중·하위권 학생까지 한 반에 편성되어 있다. 두 학교 모두 남녀 공학 고등학교이나 반 편성은 남학생과 여학생이 따로 구성되어 있다. 그리고 남학생과 여학생 간의 성적은 크게 차이 나지 않는 편이다.

연구문제 1과 연구문제 2를 조사하기 위해서 우선 113명의 학생들을 대상으로 검사문항 다섯 개를

제시해 주고 푸는 과정을 관찰하였다. 그리고 학생들에게 회수한 답안지를 바탕으로 학생들이 구성한 표상을 유형별로 분류하여 이 분석 결과와 학업성취도, 성별을 고려하여 인터뷰 대상자를 선정하였다. 인터뷰 대상자는 모두 6명으로 남학생 2명, 여학생 4명이다. 먼저 모든 학생들에게 해당되는 공통적인 질문을 하였으며 그 다음에 학생 개개인의 문제 해결 방법에 대한 인터뷰를 실시하였다. 인터뷰 대상자의 특성은 <표 Ⅲ-1>와 같다.

<표 Ⅲ-1> 인터뷰 대상자의 특성[1)]

대상자	성별	학업성취도	선행정도
현이	남	상	고2 문과 과정
석이	남	중	고1 과정
진희	여	상	고2 이과 과정
가희	여	상	고2 이과 과정
미희	여	중	고1 과정
영희	여	하	고1 과정

2. 예비연구와 실험 문제 선정

본 연구에 앞서서 예비연구를 실시하였다. 예비연구는 인천의 Y여고 학생들을 대상으로 하였다. 예비연구를 통하여 연구자가 제시한 문제가 학생들이 표상을 다양하게 사용하여 문제를 해결하기에 적합한지 확인해 보았다. 예비연구 결과, 문제 해결과정에서 다양한 표상 사용을 거의 하지 못한 문제는 문제의 유형을 변경하였고, 일부 상위권 학생들만 해결한 문제는 난이도를 쉽게 변경하였다. 이렇게 선정된 문제를 수학교육 전문가와 현직 수학교사 2명의 조언을 구해 검토한 후, 본 연구에서 사용했다. 연구에서 사용한 문제는 다음과 같다.

검사문항 1

연어가 산란을 위해 강의 상류로 $10km$ 거슬러 올라가려고 한다. 연어는 하루에 $5km$를 거슬러 올라갈 수 있지만 물살에 의해 $3km$를 떠밀려 내려온다. 연어가 산란 장소에 도착하려면 며칠 걸리겠는가?

검사문항 2

주차장, 상가, 아파트가 한 건물에 모두 있는 주상복합건물이 있습니다. 이 건물 주차장의 높이는 아파트 높이의 1/5이고, 상가의 높이는 아파트와 주차장의 높이를 더한 것의 1/3입니다. 이 건물의 높이가 72m일 때, 주차장, 상가, 아파트의 높이를 각각 구하시오.

검사문항 3

닭과 돼지를 키우는 어느 농부가 아들과 딸에게 각각 그 수를 세어 오라고 했습니다. 아들은 닭과

돼지의 머리만 세어 70마리라고 말했고, 딸은 닭과 돼지의 다리만 세어 200개라고 했습니다. 닭과 돼지는 각각 몇 마리인가?

검사문항 4
원가가 6000원인 티셔츠가 있다. 이 티셔츠를 10000원에 팔면 하루에 40개가 팔리고, 판매가격을 1000원씩 인상하면 개수는 2개씩 감소한다. 하루 판매 이익을 최대로 할 때의 판매개수를 구하여라.

검사문항 5
6명의 친구가 모두 한 번씩 악수를 하였습니다. 모두가 악수를 한 총 횟수는 모두 몇 번입니까?

3. 자료의 수집과 분석

본 연구에서는 우선 서술형 지필검사를 통해 수학적 문제에 대해 학생들이 다양한 표상을 구성하는 능력을 살펴보았다. 검사문항은 총 5문항으로, 각 문항 별로 최대 3가지의 해결방법을 이용하여 문제를 해결해 보도록 하였다. 문제를 풀기 전에 검사문항에 대한 학생들의 이해를 돕기 위하여 약 5분간 다양한 표상 활용에 대한 정의를 설명하고 예시문항을 들어 여러 가지 표상을 이용하여 문제를 해결하는 모습을 보여주었다. 그리고 문제를 풀 때, 가장 먼저 떠오른 풀이 방법을 방법1에 풀도록 하였다. 검사 방법에 대한 설명이 끝난 후, 50분간의 시간을 주고 문제를 해결하도록 하였다. 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 문제를 접근하는 관점이나 어려워하는 점들을 관찰하였다.

지필 자료의 분석 결과를 토대로 인터뷰 대상자를 선정하였다. 인터뷰는 지필검사를 통해 알아볼 수 없는 부분에 대하여 연구자가 미리 구성해 놓은 질문지를 바탕으로 반 구조화된 인터뷰로 진행되었다. 모든 인터뷰 과정은 녹음을 통하여 전사하였고, 이 면담 자료는 표상 전이, 문제 해결에 대한 성취도별의 반응, 그러한 표상을 사용한 원인에 대해 알 수 있는 중요한 분석 자료로 사용되었다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 학업성취도와 표상 활용능력의 관계 분석

학생들의 학업성취도를 6월, 9월 학력평가에서 수리영역 등급을 기준으로 상, 중, 하로 구분하였다. 6월, 9월 학력평가의 수리영역 등급 평균을 산출하여 2.5등급 이내의 학생을 상위권으로, 3등급에서 5등급 사이의 학생을 중위권으로, 5.5등급 이하의 학생을 하위권으로 보았다.

<표 Ⅳ-1>를 보면, 상위권 학생들은 문제 1번과 문제 5번의 경우 70%가 넘는 학생들이 3개의 표상을 이용하여 문제를 해결하였고, 중하위권의 학생들은 2개 이하의 표상을 이용한 경우가 50%이상

이었다. 문제 3번은 학업성취도와 표상 활용 수가 크게 차이가 없었다. 이는 학생들이 문제 3번을 해결하는 과정에서 수식과 표를 이용하는 것은 쉽게 생각해 내었지만, 언어를 사용하거나 앞에서 사용한 변수와 다른 변수를 사용하여 수식을 세우는 방법은 찾아내지 못했다는 것을 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-1> 표상 수와 학업성취도 간의 비교 (단위 : %)

표상 수	성취도	문제1	문제2	문제3	문제4	문제5
3가지	상위권 (19명)	72.2	38.9	38.9	5.6	72.2
	중위권 (66명)	46.9	22.7	19.7	3.0	37.9
	하위권 (29명)	62.1	6.9	20.7	0	37.9
2가지	상위권 (19명)	26.3	36.8	26.3	52.6	21.1
	중위권 (66명)	42.4	53.0	48.5	43.9	50.0
	하위권 (29명)	31.0	31.0	44.8	34.5	37.9
1가지	상위권 (19명)	0	21.1	31.6	36.8	5.6
	중위권 (66명)	9.1	24.2	31.8	45.5	12.1
	하위권 (29명)	6.9	55.2	34.5	51.7	20.7

문제 2번과 문제 4번을 다른 문제들과 비교해본 결과, 표상을 활용한 가짓수에 따른 성적 차이가 이 두 문항에서 더 크게 나타났다. 이는 문제의 난이도가 높아질수록 학업 성취도에 따른 다양한 표상 활용 능력의 차이가 더 커진다는 것을 보여준다. 특히 문제 4번은 상･중･하위권 학생 모두 세 가지의 표상을 생각해 내는 것을 어려워하였고, 하위권 학생은 세 가지 표상을 사용해 문제를 해결한 학생이 아무도 없었다.

2. 학업성취도에 따른 표상 활용의 특징

학생들에게 문제를 읽고 가장 먼저 떠오른 표상을 방법1에 사용하도록 하였으며, 각 검사문항 별로 학생들이 방법 1에 사용한 표상과 학업성취도별 표상 활용 비율을 분석하였다. 또한 표상을 시각적 표상(그림, 표, 그래프), 기호적 표상, 언어적 표상으로 나누어 학업성취도별 표상 활용 비율을 분석하여 비교해 보았다.

검사문항 1번의 경우에는 난이도가 낮은 문제로 113명 중 112명의 학생들이 문제를 올바르게 해결하였다. 특히 상위권 학생들의 경우에는 약 72%의 학생들이 세 가지 표상을 이용하여 문제를 해결하였고, 모든 학생들이 두 가지 이상의 표상을 사용하여 문제를 풀었다. 중･하위권 학생들도 90%정도의 학생들이 두 가지 이상의 표상을 사용하여 문제를 해결하였다. 하지만 <표 Ⅳ-2>를 보면, 방법1에서 사용한 표상이 성취도별로 뚜렷한 차이가 있음을 알 수 있다. 상위권 학생들은 절반에 가까운

8명의 학생이 수식을 이용하여 문제를 해결하고 있다. 중위권 학생들 역시 식을 사용한 비율이 가장 높았지만, 그림을 사용한 학생들과 수식을 사용한 학생 수의 비율이 많이 차이 나지 않았다. 그러나 상·중위권 학생들과 대조적으로 하위권 학생들의 경우에는 방법 1에서 그림의 사용을 사용하여 해결하는 경향이 뚜렷하게 나타나고 있다. 심지어 수식을 사용한 학생의 수는 6명으로 언어를 사용하여 문제를 해결한 학생 수인 7명보다도 적은 수였다. 이는 상위권 학생들은 수식을 선호하는 경향이 강하고, 하위권 학생들은 그림을 그려서 문제를 해결하려는 성향이 강하다는 것을 보여준다.

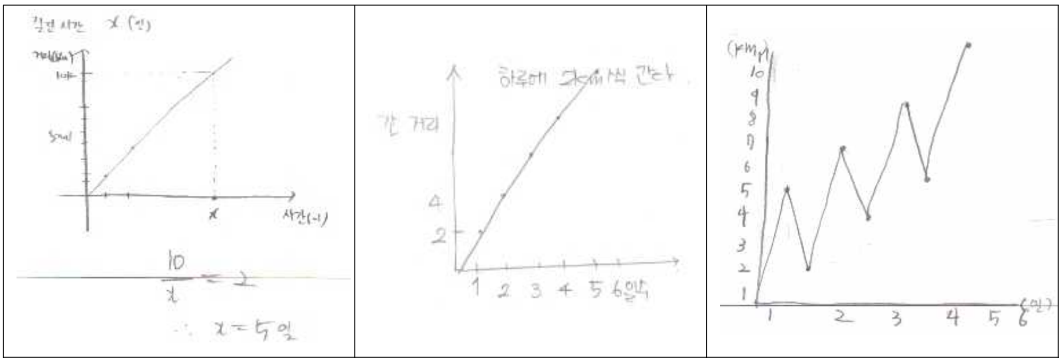
<표 Ⅳ-2> 문항 1에 대한 학업성취도별 표상 활용 유형

1번 문항			시각적 표상			기호적 표상	언어적 표상	
			그림	표	그래프	식	말, 논리	계
상위권 (18명)	방법1	명수(명)	4	2	0	8	4	18
		비율(%)	22.2	11.1	0	44.4	22.2	100
	방법2	명수(명)	7	2	0	6	3	18
		비율(%)	38.9	11.11	0	33.3	16.7	100
	방법3	명수(명)	3	5	1	3	1	13
		비율(%)	16.7	27.8	5.6	16.7	5.6	72.2
중위권 (66명)	방법1	명수(명)	20	5	0	25	15	65
		비율(%)	30.3	7.6	0	37.9	22.7	98.5
	방법2	명수(명)	22	13	1	14	9	59
		비율(%)	33.3	19.7	1.5	21.2	13.6	89.4
	방법3	명수(명)	10	7	1	7	6	31
		비율(%)	15.2	10.6	1.5	10.6	9.1	46.9
하위권 (29명)	방법1	명수(명)	13	3	0	6	7	29
		비율(%)	44.8	10.3	0	20.7	24.1	100
	방법2	명수(명)	11	7	1	8	0	27
		비율(%)	37.	24.1	3.5	27.6	0	93.1
	방법3	명수(명)	5	4	2	5	2	18
		비율(%)	17.2	13.8	6.9	17.2	6.9	62.1

<표 Ⅳ-2>에 따르면 총 6명의 학생이 그래프를 이용하여 1번 문제를 해결하고 있다. 이 학생들은 모두 경기도 S고등학교 학생들이었는데, 이 학생들을 가르치는 수학교사는 평소 수업 시간에 그래프를 그려서 문제를 푸는 것을 선호하는 편이었고 실험을 하던 시기의 수업 시간에 이차함수의 그래프를 그리는 것에 대해서 배우고 있었다. 학생들이 수업 시간에 배우고 있던 내용과 평소 학생들을 가르치는 교사가 선호하는 표상 양식이 학생들이 문제 해결 과정에 영향을 주고 있음을 알 수 있다.

학생들의 검사문항 1번 풀이를 분석한 결과, 다른 시각적 표상과 언어적 표상, 기호적 표상을 나타

내는 방식은 성취도에 관계없이 비슷했지만 그래프를 나타내는 방식은 <그림 Ⅳ-1>과 같이 성취도에 따라 차이를 보였다. 상위권학생은 그래프를 표현할 때 축의 이름과 그 대응 관계를 확실하게 표현하였고 그래프 표현을 식으로 변환하여 답을 구하는 과정까지 자세히 서술하고 있다. 그리고 중위권 학생은 변수로 변환하지는 못하였지만 일수와 간 거리를 서로 대응시켜서 그래프를 표현하고 있다. 이에 반해 하위권 학생은 그래프의 표현이 미숙하고, 함수의 개념에 맞지 않는 그래프를 그리고 있다. 이런 차이점은 상위권 학생들이 중, 하위권 학생들보다 그래프의 의미와 함수의 정의를 확실하게 이해하고 있고, 그래프를 수식으로 변환할 수 있는 능력이 있다는 것을 보여준다.



상위권 학생	중위권 학생	하위권 학생

<그림Ⅳ-1> 검사문항 1에서 그래프 표상 모습 비교

검사문항 2번은 학생들이 어려워했던 문제 중의 하나이다. 특히 하위권 학생들이 문제를 해결하는데 어려움이 많았다. 각 방법에서 사용한 표상 수의 비율을 <표 Ⅳ-3>에서 살펴보면 하위권 학생들은 방법 1까지는 90%가 넘는 학생들이 문제를 해결했지만, 방법 2와 방법 3에서는 문제를 해결한 학생의 수가 현저하게 줄어들고 있다. 이에 반해 상위권 학생들은 방법 2와 방법 3에서 그 비율이 줄어들고 있기는 하지만 감소의 정도가 하위권 학생에 비해 적은 편이다. 그리고 검사문항 2번을 해결할 때에도 상위권 학생들은 방법1의 표상으로 식을 가장 많이 사용하고 있다. 상위권 학생들의 경우에는 방법1과 방법2에서 모두 기호적 표상인 수식을 가장 많이 이용하였는데, 총 18명의 상위권 학생 중에서 80%이상인 15명의 학생들이 식을 이용하여 문제를 해결하였고, 방법2의 표상도 변수만 바꾼 수식인 경우가 많았다. 중위권 학생들은 방법1에서 대다수가 수식을 사용했다는 점은 상위권 학생들과 다를 바 없지만, 방법 2에서는 그림을 수식보다 더 많이 사용하였다. 하위권 학생들은 상·중위권 학생들과는 달리 그림을 표상으로 이용하여 문제를 해결하는 경우가 72.4%였다. 검사문항 1번에서와 마찬가지로 거의 대부분의 하위권 학생들이 문제 해결 과정에서 수식보다는 그림을 더 많이 활용하는 것을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-3> 문항 2에 대한 학업성취도별 표상 활용 유형

2번 문항			시각적 표상			기호적 표상	언어적 표상	
			그림	표	그래프	식	말, 논리	계
상위권 (18명)	방법1	명수(명)	3	0	0	15	0	18
		비율(%)	16.7	0	0	83.3	0	100
	방법2	명수(명)	5	2	0	7	0	14
		비율(%)	27.8	11.1	0	38.9	0	77.8
	방법3	명수(명)	4	1	0	2	0	7
		비율(%)	22.2	5.6	0	11.1	0	38.9
중위권 (66명)	방법1	명수(명)	17	0	0	48	1	66
		비율(%)	25.8	0	0	72.7	1.5	100
	방법2	명수(명)	27	3	0	18	2	50
		비율(%)	40.9	4.6	0	27.3	3.0	75.8
	방법3	명수(명)	6	0	0	5	4	15
		비율(%)	9.1	0	0	7.6	6.1	22.7
하위권 (29명)	방법1	명수(명)	21	0	0	6	0	27
		비율(%)	72.4	0	0	20.7	0	93.1
	방법2	명수(명)	6	0	0	5	0	11
		비율(%)	20.7	0	0	17.2	0	37.9
	방법3	명수(명)	1	0	0	1	0	2
		비율(%)	3.5	0	0	3.5	0	6.9

검사문항 3번은 상·중·하위권 학생들 모두 한 가지 방법으로는 문제를 해결하였다. <표 Ⅳ-4>를 보면 성취도에 상관없이 방법 1에서 가장 많이 사용한 표상은 기호적 표상이었고, 방법2에서는 표로 그려서 나열한 후에 값을 찾아내는 방법을 가장 많이 사용하였다. 상·중·하위권 학생들 모두 첫 번째 방법으로 수식을 사용하는 비율이 높았으나 상·중위권 학생들은 100%에 가까운 비율로 수식을 이용한 기호적 표상을 사용한 반면에 하위권 학생들의 경우에는 24.1%의 학생이 방법 1에서 수식이 아닌 표를 사용하고 있다는 차이가 있다. 이는 하위권 학생들이 문제 상황을 식으로 전환하는 것을 어려워하며 문제의 상황을 일일이 나열하여 문제를 해결하려는 경향이 있음을 확인할 수 있다.

검사문항 4번은 학생들이 제일 어려워하였던 문제이다. 표상을 다양하게 활용하는 학생의 수가 다른 문제와 비교하였을 때 가장 적었고, 세 가지 방법을 사용한 학생은 거의 없었다. 특히 하위권 학생들 중에는 세 가지 표상 양식을 활용하여 문제를 해결한 학생이 없었다. 이 문제는 고등학교 1학년 이차함수 단원의 문제인데, 대부분의 학생이 이 문제를 함수 단원의 문제라고 생각하지 못했고, 함수 단원의 최대, 최소 문제와 연결시켜서 그래프를 이용하여 문제를 해결하는 경우는 단 3명에 불과하였다.

<표 Ⅳ-4> 문항 3에 대한 학업성취도별 표상 활용 유형

3번 문항			시각적 표상			기호적 표상	언어적 표상	
			그림	표	그래프	식	말, 논리	계
상위권 (18명)	방법1	명수(명)	0	0	0	18	0	18
		비율(%)	0	0	0	100	0	100
	방법2	명수(명)	1	5	1	3	2	12
		비율(%)	5.6	27.8	5.6	16.7	11.1	66,7
	방법3	명수(명)	0	3	1	2	1	7
		비율(%)	0	16.7	5.6	11.1	5.6	38.9
중위권 (66명)	방법1	명수(명)	1	1	0	64	0	66
		비율(%)	1.5	1.5	0	97.0	0	100
	방법2	명수(명)	1	24	0	20	0	45
		비율(%)	1.5	36.4	0	30.3	0	68.2
	방법3	명수(명)	0	6	0	4	3	13
		비율(%)	0	9.1	0	6.1	4.6	19.7
하위권 (29명)	방법1	명수(명)	1	7	0	19	2	29
		비율(%)	3.5	24.1	0	65.5	6.9	100
	방법2	명수(명)	0	12	0	5	2	19
		비율(%)	0	41.4	0	17.2	6.9	65.5
	방법3	명수(명)	3	2	0	0	1	6
		비율(%)	10.3	6.9	0	0	3.5	20.7

<표 Ⅳ-5>를 보면, 이 문항에서는 상위권 학생과 중·하위권 학생 간에 방법 1에서 사용한 표상의 차이가 두드러지게 나타나고 있음을 알 수 있다. 상위권 학생들은 70%가 넘는 학생들이 첫 번째 방법으로 수식을 이용하였고, 두 번째 방법에서는 표로 나열을 하여 문제를 해결하였다. 하지만 중위권과 하위권 학생들은 50%가 넘는 학생들이 첫 번째 방법에서 표를 사용하여 문제를 해결하였고 이런 추세는 하위권으로 갈수록 더욱 두드러지게 나타났다. 문제가 복잡하고 어려워질수록 상위권 학생들은 문제 상황을 수식으로 단순화시킬 수 있는 기호적 표상의 사용을 선호하지만, 하위권 학생들은 표로 나열을 하여 일일이 계산을 하는 방식을 선택한다는 것을 알 수 있다. 또한, 중·하위권 학생들 중에는 표를 활용해 문제를 풀었지만 계산 실수 등으로 인해 오답인 경우가 많았다.

<표 Ⅳ-5> 문항 4에 대한 학업성취도별 표상 활용 유형

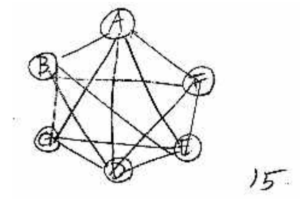
4번 문항			시각적 표상			기호적 표상	언어적 표상	
			그림	표	그래프	식	말, 논리	계
상위권 (18명)	방법1	명수(명)	0	4	0	13	1	18
		비율(%)	0	22.2	0	72.2	5.6	100
	방법2	명수(명)	0	7	1	3	0	11
		비율(%)	0	38.9	5.6	16.7	0	61.1
	방법3	명수(명)	0	0	0	1	0	1
		비율(%)	0	0	0	5.6	0	5.6
중위권 (66명)	방법1	명수(명)	1	38	0	22	0	61
		비율(%)	1.5	57.6	0	33.3	0	92.4
	방법2	명수(명)	0	18	1	12	0	31
		비율(%)	0	27.3	1.5	18.2	0	47.0
	방법3	명수(명)	0	2	0	0	0	2
		비율(%)	0	3.0	0	0	0	3.0
하위권 (29명)	방법1	명수(명)	0	20	1	4	0	25
		비율(%)	0	69.0	3.5	13.8	0	86.3
	방법2	명수(명)	0	7	0	2	1	10
		비율(%)	0	24.1	0	6.9	3.5	34.5
	방법3	명수(명)	0	0	0	0	0	0
		비율(%)	0	0	0	0	0	0

5번 검사문항의 경우에는 <표 Ⅳ-6>에서 알 수 있듯이 상·중·하위권 학생 모두 방법1에서 그림을 사용한 풀이를 선택하였다. 하지만 방법 2에서는 상위권 학생은 수식을 가장 많이 사용하였고, 중·하위권 학생들은 여전히 그림을 가장 많이 사용하여 문제를 해결하고 있다. 또한, 중위권과 하위권 학생들은 두 번째 방법까지는 70%가 넘는 학생들이 표상을 전환하여 문제를 해결하고 있지만, 세 번째 방법을 생각한 학생은 약 37%정도로 상위권 학생의 약 72%에 비하면 매우 낮은 수치이다.

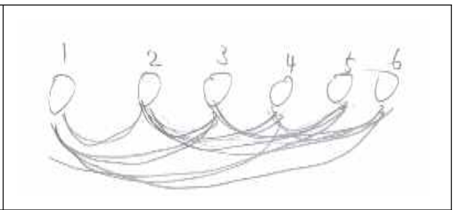
<표 Ⅳ-6> 문항 5에 대한 학업성취도별 표상 활용 유형

5번 문항			시각적 표상			기호적 표상	언어적 표상	
			그림	표	그래프	식	말, 논리	계
상위권 (18명)	방법1	명수(명)	12	1	0	5	0	18
		비율(%)	66.7	5.6	0	27.8	0	100
	방법2	명수(명)	3	5	0	7	2	17
		비율(%)	16.7	27.8	0	38.9	11.1	94.4
	방법3	명수(명)	2	5	0	4	2	13
		비율(%)	11.1	27.8	0	22.2	11.1	72.2
중위권 (66명)	방법1	명수(명)	47	7	0	10	2	66
		비율(%)	71.2	10.6	0	15.2	3.0	100
	방법2	명수(명)	18	14	0	17	9	58
		비율(%)	27.3	21.2	0	25.8	13.6	87.9
	방법3	명수(명)	3	12	0	9	1	25
		비율(%)	4.6	18.2	0	13.6	1.5	37.9
하위권 (29명)	방법1	명수(명)	22	2	0	4	0	28
		비율(%)	75.9	6.9	0	13.8	0	96.6
	방법2	명수(명)	10	4	0	4	4	22
		비율(%)	34.5	13.8	0	13.8	13.8	75.9
	방법3	명수(명)	1	7	0	3	0	11
		비율(%)	3.5	24.1	0	10.3	0	37.9

5번 문항의 경우에는 표상 활용 능력의 차이뿐만 아니라, 같은 표상을 이용했더라도 그 표상을 표현하는 모습에서 학업성취도 별로 차이가 나타남을 관찰할 수 있었다. 다음 <그림 Ⅳ-2>은 상위권 학생과 하위권 학생이 그림 표상을 이용하여 표현한 풀이이다. 상위권 학생은 6명의 사람을 원으로 나열하여 육각형의 대각선을 찾는 형태로 그림을 그렸고, 하위권 학생은 일렬로 나열하여 분배하는 형식으로 그림을 표현하였다. 상위권 학생이 하위권 학생에 비해 문제를 더 구조적인 모습으로 표상하고 있음을 알 수 있다. 그림 표상을 이용한 상위권 학생 17명 중에서 12명이 이와 같은 모습의 그림을 그렸고, 하위권 학생은 33명 중 5명만이 육각형 모습의 그림을 그렸다. 이는 다이어그램을 사용할 때에는 문제의 구조를 얼마나 잘 표현해내고 있느냐가 중요하다는 Diezmann & English(2001)의 제안에 상위권 학생들이 더 근접해 있음을 알 수 있다.



상위권 학생



하위권 학생

<그림Ⅳ-2> 상위권 학생과 하위권 학생의 그림 표상 모습 비교

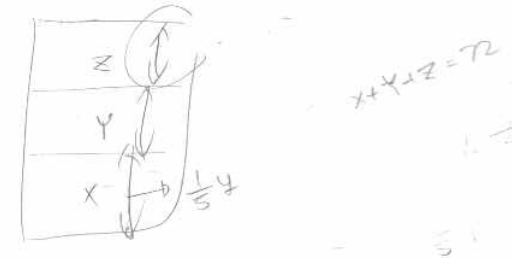
3. 학습자간 표상 활용 능력 및 표상 유형의 차이에 대한 원인 분석

수학 학업 성취도에 따라 다양한 표상을 사용하는 능력에 차이가 나타나는 원인을 분석하기 위하여 6명의 인터뷰 대상자를 선발하여 반 구조화된 인터뷰를 실시하였다. 이를 통하여 학습자 간 표상 활용 능력 차이의 원인과 활동지의 문제 해결과정에서 사용한 표상의 특징에서 차이가 나타나는 이유를 분석하였다.

학업성취도별로 표상 활용 능력에서 차이가 나는 원인으로 첫째, 문제에서 제시된 목표와 주어진 조건을 표상 양식을 사용해서 구조적으로 정리하는 능력이 상위권 학생들이 하위권 학생들에 비해 뛰어남을 들 수 있다. 그렇기 때문에 상위권 학생의 문제 해결에서 표상은 문제 해결에 결정적인 역할을 하였다. 하지만 하위권 학생들은 표상 양식을 사용하여 문제 상황을 논리적으로 정리하는 것에서 문제가 있었기 때문에 조건들 간의 관계를 표상 양식을 이용하여 정확하게 구조화시키는데 어려움이 있었다. 중위권 학생들은 상위권 학생과 하위권 학생의 특성이 문제의 난이도에 따라 발견되었는데, 난이도가 높은 문제에서는 하위권 학생들처럼 문제의 조건을 구조화 하는 것에서 어려움을 느꼈고, 쉬운 문제에서는 표상 활용에 어려움이 없었다. 다음은 하위권 학생인 영희의 인터뷰 내용과 인터뷰 과정에서 학생이 나타낸 표상이다. 인터뷰 과정에서 영희가 표현한 <그림 Ⅳ-3>을 보면, 문제에서 주어진 조건들 사이의 비율 관계를 전혀 나타내고 있지 못함을 알 수 있다.

연구자 : 문제 2번을 읽고 문제를 이해한 대로 그림을 그려볼까?
영희 : (직사각형을 삼등분하여 각각에 x, y, z를 써 넣는다.)
연구자 : 여기서 x, y, z가 의미하는 것이 무엇이니?
영희 : 주차장, 아파트, 상가요.
연구자 : 그림을 좀 더 구체적으로 표현해 볼까?
영희 : 음…….
연구자 : 문제에서 x, y, z에 대한 관계를 찾아보면 어떨까?
영희 : (문제를 다시 읽어보고, $x+y+z=72$라는 식을 쓰면서) 다 더하면 72예요. 그리고 주차장이 아파트의 1/5이니까요. 그림에서 x가 $1/5\,y$로 써요.
연구자 : 네가 지금 애기한 x, y, z의 관계를 이 사각형 그림에서 표현해본다면 어떨까?

영희 : 이렇게 그린 건데요? 다시 그려요?



<그림Ⅳ-3> 인터뷰 과정에서 영희의 표상

두 번째 원인으로는 학업성취도에 따라 표상을 다른 표상으로 전이하는 능력에 차이가 있기 때문임을 알 수 있었다. 성취도에 따라 과거에 사용한 표상을 이용하여 다른 표상으로 전환하는 능력에서 차이가 나타난 것이다. 예를 들어 문제 4번과 같이 문제의 난이도가 높은 경우에는 이러한 특징이 두드러지게 관찰되는데, 하위권 학생의 절반정도가 방법 1에서 표로 나열해서 올바른 풀이와 답을 구했음에도 방법 2에서 식을 세워서 푼 경우에는 전혀 다른 답을 구했다. 다음 인터뷰는 이런 특징을 가진 하위권 학생 중 한 명인 미희에게 문제 1번을 수식을 이용해서 풀도록 했을 때의 대화이다. 미희는 방법 1과 방법 2에서 각각 그림과 표를 사용하여 문제를 풀었지만 수식을 사용할 때 앞의 풀이는 전혀 고려하지 못하고 문제를 처음부터 다시 이해하면서 풀어가고 있었다.

연구자 : 앞에 방법 1에서 그린 그림을 참고해 보면 어떨까?
미희 : .…….
연구자 : 아니면 방법 2에서 사용한 표를 참고해 보면 어떨까?
미희 : 표를 식으로 만들어요?
연구자 : 표를 본다면 규칙성을 찾을 수 있는데, 그 규칙성을 수식으로 변환한다고 생각해보면 어떨까?
미희 : 규칙성? (더 이상 풀지 못하였음)

상위권 학생을 인터뷰 하는 과정에서 학업성취도에 따라 표상을 전이하는 능력에 차이가 나는 이유를 발견할 수 있었는데, 상위권 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 목표에 대한 확신을 가지고 있기 때문에 다른 표상으로 나타내는 것에 대해 부담감을 덜 느끼기 때문이었다. 다시 말해 조건들 사이의 연결을 그림으로 표현하든 식으로 표현하든 간에 같은 결과가 나타날 것이라는 생각이 전제되어 있는 것이다. 아래의 인터뷰에서 보면, 진희는 먼저 답을 구하고 그 답을 다시 구한다는 생각으로 다른 표현 방법을 사용하고 있다고 이야기 하고 있다.

연구자 : 다양한 표상을 사용해서 문제를 풀 때, 어려웠던 점은 무엇이었나요?
진희 : 많이 어렵진 않았어요. 단지 숫자가 큰 문제나 수식밖에는 사용할 수 없다고 생각되는 문제는 다른 방법을 생각하기까지 시간이 걸렸어요.
연구자 : 그럼 다양한 표상을 사용하기 위한 본인만의 방식이 있다면 무엇이 있을까요?

진희 : 먼저 답을 구하구요. 다른 표상들. 그러니까 그림이나 표를 사용해서 조건들을 정리한다고 생각하고 다시 답을 구하는 방식으로 풀어나갔어요.

세 번째 원인으로는 상위권 학생들은 중・하위권 학생들보다 표상을 사용할 때, 다양한 표상들의 장단점을 정확히 알고 적절한 표상들을 구조적으로 표현하여 사용하고 있기 때문이다. 상위권 학생들은 다양한 표상들의 장단점을 정확히 알고 사용하기 때문에 선택한 표상을 문제 해결에 효율적으로 활용하고 있었다. 하지만 중・하위권 학생들은 문제 상황에 적절한 표상을 활용하는 능력이 떨어져 공식에 의존하거나 단순히 문제의 조건을 나열하는 수준의 표상을 사용하는 경향이 강하였다. 뿐만 아니라 인터뷰를 한 하위권 학생들은 모두 공식이 생각나지 않으면 문제를 해결하는데 어려움을 느낀다고 이야기 하였고, 어떤 표상이 효율적이라고 생각하는지에 대한 질문에 정확하게 답하지 못하였다. 이와 같이 표상에 대한 정확한 이해에 따른 자신이 선택하고 활용하는 표상에 대한 자신감에서 상위권 학생들과 중・하위권 학생들에 사이에 표상 활용에 큰 차이점이 나타난 것이다.

한편 학업성취도에 따른 학생들의 표상 활용 유형의 특징을 보면, 상위권 학생들은 방법 1에서 기호적 표상을 가장 많이 사용하였고 중・하위권 학생들은 주로 그림이나 표와 같은 시각적 표상을 사용하였다. 인터뷰 대상자 중에서 상위권 학생들은 대부분 수식을 사용하는 기호적 표상에 능숙하였고, 그것을 효율적이고 바람직한 방법이라고 생각했다. 다음은 문제 이해 방법과 효율적인 문제 해결 방법에 관한 질문에 대한 상위권 학생들의 인터뷰 내용이다.

연구자 : 문제를 해결할 때 문제를 이해하기 위한 자신만의 방법이 있나요?

현이 : 문제에 나와 있는 조건을 식으로 나타내 그 자체로 풀려고 노력해요. 그림을 그릴 수 있는 경우에는 적극적으로 그림을 그려보는데, 그림으로 그리면 문제를 한 눈에 파악하고 식을 세우는데 도움이 되기 때문이에요.

진희 : 문제를 읽어보고 조건에 맞는 방법을 사용하는데, 보통 식을 많이 사용해요.

연구자 : 그러면 문제를 풀면서 수식, 그래프, 그림과 같은 여러 가지 방법들을 사용했었는데, 이 중에서 가장 효율적이고 바람직한 풀이방법이라고 생각하는 방법은 무엇인가요?

진희 : 식으로 푸는 방법이요. 식으로 푸는 것이 시간도 절약되고 틀릴 위험도 적어요.

가희 : 문제가 어렵다면 그림을 그려서 문제의 조건을 이해하지만요. 식을 이용하는 것이 더 빠르고 편해요.

그러나 중・하위권 학생들은 예전에 사용한 적이 있는 공식을 떠올려보거나 공식이 생각나지 않으면 표로 일일이 나열을 하여 문제를 해결하려 하였다. 물론 문제를 풀 때 수식이 가장 효율적인 방법이라고 생각은 하지만 문제의 조건들을 변수를 이용해서 나타내는 것에 어려움을 느끼기 때문에 실제로 문제를 해결할 때에는 그림이나 표를 사용하는 것이 답을 맞힐 가능성이 높다고 생각하고 있었다. 다음은 영희가 문제 1번을 수식을 사용해서 문제를 해결하는 인터뷰 내용이다.

연구자 : 문제 1번을 그림을 이용해서 풀었는데, 이를 수식으로 풀어본다면 어떨까요?

영희 : (5 - 3 = 2 를 적어놓고 문제를 한참을 쳐다본다.) 잘 모르겠어요.
연구자 : 이 문제에서 구하려는 것이 뭐지요?
영희 : 간거리? 아니, 걸리는 일수요?
연구자 : 그럼 식을 세울 때, 미지수를 보통 구하여는 것으로 두니까요. 걸리는 일수를 어떻게 할까요?
영희 : x로 두어요. 그럼 10이 y예요?
연구자 : 10은 이미 문제에서 고정되게 주어진 조건이 아닐까요?
영희 : 그래서 10을 y로 잡고 x와 식을 세워요...

위의 대화 내용을 보면, 하위권 학생들은 문제를 읽고, 조건과 변수를 연결하는 과정이 자연스럽게 이루어지지 않고 있음을 알 수 있다. 이 학생은 식에서 변수 x를 사용하면 무조건 또 다른 변수 y가 있어야 한다고 생각하고 문제의 조건 중에서 변수 y에 해당하는 조건을 찾기 위해 고민하는 모습을 보였고 문제를 푸는 동안 '잘 모르겠어요', '어려워요'라는 말을 많이 사용하였다. 이를 통해 하위권 학생들이 기호적 표상을 사용하는데 익숙하지 않고, 그로 인해 기호적 표상을 사용하는 것은 어렵다는 인식을 가지고 있음을 관찰할 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

수학적 문제 해결 교육은 학생들의 자기 주도적 사고의 향상과 인지능력 발달을 위해 수학교육에서 강조되고 있는 부분이다. 그리고 표상은 문제 해결 과정에서 교사가 학생들의 사고를 관찰할 수 있는 유용한 도구이고, 효율적인 문제 해결 전략 중의 하나이다(Haylock, 1982). 그래서 표상을 관찰하여 학생들의 문제 이해력을 분석하고, 표상 능력 발달을 통해 문제 해결 능력을 향상시킬 수 있다는 선행연구들이 많이 이루어져 왔다. 본 연구에서는 학생들의 학업성취도별 표상 활용 능력과 그 특징을 분석하고 이에 대한 원인들을 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 상위권 학생들의 표상 활용 능력이 중・하위권 학생들에 비해 현저하게 높았는데, 이는 상위권 학생들이 문제의 목표에 대한 인식이 뚜렷하고 조건을 표상하는 능력이 뛰어났기 때문이다. 학업성취도 별로 문제 해결에서의 표상 사용을 관찰한 결과, 상위권 학생들은 문제를 해결하는데 결정적인 역할을 하는 부분을 파악하고 이를 표상 양식을 이용해서 표현하고 있었다. 반면에 하위권 학생의 표상에서는 문제 해결을 위한 핵심 부분이 빠져있는 경우가 대다수였다. 그래서 상당수의 하위권 학생들이 표상을 사용하긴 하지만 이를 문제 이해와 해결에 적절하게 활용하지 못하였다.

둘째, 과거에 사용한 표상을 바탕으로 다른 표상으로 전이하는 과정이 상위권 학생들에게서 더 자연스럽게 이루어지고 있었다. 상위권 학생들은 다른 표상 양식을 사용하더라도 같은 문제를 풀고 있다는 것을 인식하고 있었기 때문에 표상을 전환하는 것에 대해 어려움을 느끼지 않았지만, 중・하위권 학생들은 표상 양식이 달라지면 문제를 다시 풀어야 한다고 생각하여 앞에서 사용한 표상을 활용하지 못하였기 때문이다.

셋째, 표상 유형에 대한 올바른 이해와 사용에서 오는 자신감이 표상 활용 능력에 영향을 주고 있

었다. 다양한 표상을 활용할 줄 아는 상위권 학생들은 중·하위권 학생들과 달리 각각의 표상 양식들이 문제 해결에서 어떤 결정적인 역할을 하고 있는지 알고 있었으며, 자신이 선택한 표상이 주어진 문제를 효율적으로 해결하는데 도움을 줄 것이라는 확신을 가지고 있었다.

넷째, 상위권 학생들은 중·하위권 학생보다 동일한 표상 양식을 더 체계적이고 정확하게 표현하였다. 특히 시각적 표상에서 그림을 그리거나 그래프를 그릴 때 그 차이가 확실히 나타났다. 이는 상위권 학생들이 문제를 읽고 이해할 때 문제의 조건을 구조화하는 능력이 더 뛰어났기 때문이었다.

다섯째, 학업성취도별로 활용하는 표상 유형에 차이가 있었다. 수학 문제를 해결할 때 상위권 학생들은 수식의 사용을 선호하였고 문제 해결 과정에서 수학적 기호를 원활하게 사용하였다. 그에 반해 중·하위권 학생들은 수식의 사용이 문제 해결에 효율적이라고 생각은 하지만 실제 문제를 해결할 때에는 그림이나 표를 이용하는 경우가 더 많았다. 그리고 인터뷰에서 교사가 하위권 학생에게 수식을 사용하여 문제를 해결하도록 유도하였을 때, 학생들이 문제의 조건을 변수로 변경하는 것을 굉장히 어려워하는 모습을 관찰할 수 있었다. 또한 하위권 학생들은 표상을 활용하여 문제를 이해하고 해결 전략을 세우기보다는 공식이나 조건을 나열하는 표상 방법을 주로 사용하였다.

위의 연구결과를 토대로 표상에 대한 교수·학습과 후속 연구를 위해 몇 가지 제언을 한다.

첫째, 표상의 효율적인 활용 능력을 위해서는 학습자가 스스로 표상의 장단점과 특징에 대해 인지하고 이를 문제 해결과정에 적용해 보는 경험이 필요하다. 이를 위해 교사는 수업 시간에 학생들이 다양한 표상 사용 경험을 통해 표상 양식의 장단점을 알고 이를 문제 해결에 적절하게 연결할 수 있도록 지도해야 한다.

둘째, 학업 성취도에 따라 학생들이 표상 활용 능력에 차이가 있으므로 학습 수준에 따라서 다른 표상을 사용하여 문제를 해결하도록 하는 것도 수업 시 교사가 신중하게 고려할 요소라 하겠다. 또한 교사는 문제 해결 과정에서 학생들이 사용하는 표상에 관심을 갖고 학생이 활용하기를 어려워하는 표상에 대한 학습이 이루어질 수 있도록 도와주어야 할 것이다.

셋째, 중·하위권 학생들이 표상 활용을 어려워하는 가장 큰 이유 중에 하나가 문제의 조건을 구조적으로 표현하는 것을 어려워하기 때문이었다. 그러므로 중·하위권 학생들에게는 문제를 구조화하는 연습이 필요하다. 이를 위해 교사는 수업시간에 문제의 조건을 효율적으로 구조화하는 방법을 가르치기 위한 고민을 해야 할 것이다.

넷째, 수업시간에 교사가 사용하는 표상이 학생들에게 미치는 영향을 생각한다면, 교수·학습 과정에서 다양한 표상을 제시해 주는 것이 학생들의 다양한 문제 해결 전략 능력 향상을 위해서 바람직하다고 생각된다.

다섯째, 본 연구는 고등학교 1학년 학생을 대상으로 수행되었다. 후속 연구에서는 여러 학년이나 더 다양한 과제들에 적용해 볼 필요가 있다. 이러한 연구들은 학생의 해당 학년에서의 성취도가 아닌 발달 단계에 따른 표상 지도를 위한 자료를 제공해 줄 것이다. 그리고 학생들의 표상에 대한 연

구뿐만 아니라 교사의 표상에 대한 인식과 수업에서의 활용, 그리고 교사의 표상이 학생들에게 미치는 영향에 대한 연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

김선화 (1992). 표현의 문제에 대한 수학 교육적 고찰-함수영역을 중심으로, 서울대학교 대학원 석사학위논문

심은영 (2006). 다면적 표상 기반 전략훈련이 수학 문장제 해결에 미치는 영향, 국민대학교 대학원 박사학위 논문

이양미・전평국 (2005). 초등학교 3학년 학생의 수학적 문제 해결에서의 표상과 정교화 과정 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <학교수학>. 44(4). pp.627-651.

장혜원 (1997). 수학학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구-표상모델 개발을 중심으로, 서울대학교 대학원 박사학위 논문

한국교육개발원 (1985). 수학과 문제해결력 신장을 위한 수업 방법 개선 연구, 연구 보고 RR 85-9, 서울 : 한국교육개발원

Bruner, J. S. (1967). *Toward a theory of instruction, London* : Oxford University Press

Cobb, P. (2000). From representation to symbolizing : Comments on semiotics and mathematical learning. In P. Cobb, K. McClain, & E. Yackel (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrechet, The Netherlands : Kluwer Academic.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking, In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA : National council of Teachers of Mathematics.

Friedlender, A., & Tabach, M (2001), Promoting multiple representation in algebra, In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA : National council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A. (1990). Chapter 3 : Epistemology, Constructivism, and Discovery Learning in Mathematics. In Davis, R. B., Maher, C. A. & Nodding, N. (Eds.) *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*, Reston : NCTM.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving, In L. D. English, (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd Edition. Routledge, NY : New York.

Goldin, G., & Janvier, C.,(Eds.). (1998a). Representation and the psychology of mathematics education: Part Ⅰ. Special issue, *Journal of Mathematical Behavior* 17(1).

Goldin, G., & Janvier, C.,(Eds.). (1998b). Representation and the psychology of mathematics education: Part Ⅱ. Special issue, *Journal of Mathematical Behavior* 17(2).

Goldin, G,. & Shteingold, N. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts, In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA : National council of Teachers of Mathematics.

Greeno, J. G. (1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics instruction. E*ducational Psychologist*, 12(3), pp.262 - 283.

Haylock, D. W. (1982). Understanding in mathematics : Making connections. *Mathemastics Teaching,* 98, pp.54-56

Izsák (2003). "We want a statement that is always true"; Criteria for good algebraic representations and the development of modeling knowledge. *Journal of research in mathematics education.* 34(3), pp.191-227.

Kiczek, R. D., Maher, C. A. & Speiser, R. (2001). Tracing the origins and extensions of Michael's representation, In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA : National council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Concrptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts & processes.* NY : Academic Press.

Lesh, R, Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Mayer, R. E. (1987). Learnable aspects of problem solving : some examples. In D. E. Berger, K. Pezdek, & W. P. Banks (Eds.), *Application of cognitive psychology : problem solving, education, and computing.* New York : Routledge.

Miura, I. T. (2001). The influence of language on mathematical representations, In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA : National council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation for school mathematics,* Reston. VA : Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school* *mathematics*. Reston, VA : Author.

Polya, G. (2004). *How to solve it? : A new aspect of mathematical method,* New York: Doubleday & Company.

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving process, *Educational Studies in Mathematics,* 55: pp.27-47

Pyke, C. L. (2003). The use of symbol, words, and diagram as indicators of mathematical cognition : a casual model, *Journal of Research in Mathematicals Education,* 34(5), pp. 406-432.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically : problem solving, meta-cognition, and sense making in mathematics. In D. G. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY : Macmillan Publishing Company.

Swarfford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Pre-instructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations, In A. A. Cuoco (Ed.). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA : National council of Teachers of Mathematics.

Vygotsky, L. S. (1987), *Thinking and speech*. In G. A. Rieber and A. S. Carton (eds.), The collected works of L. S. Vygotsky, Plenum Press, New York, pp.39-243.

An Analysis of Representation Usage Ability and Characteristics in Solving Math Problems According to Students' Academic Achievement

Kim, Minkyung

Dept. of Curriculum and Instruction, Graduate School of Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : mkkim008@hanmail.net

Kwean, Hyukjin

Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail : Kwean@korea.ac.kr

In this paper, the ability to use mathematical representations in solving math problem was analyzed according to student assessment levels using 113 first-year high school students, and the characteristics of their representation usage according to student assessment levels were also examined. For this purpose, problems were presented that could be solved using various mathematical representations, and the students were asked to solve them using a maximum of three different methods. Also, based on the comparative analysis results of a paper evaluation, six students were selected and interviewed, and the reasons for their representation usage differences were analyzed according to their student assessment levels.

The results of the analysis show that over 50% of high ranking students used two or more representations in all questions to solve problems, but with middle ranking students, there were deviations depending on the difficulty of the questions. Low ranking students failed to use representation in diverse ways when solving problems. As for characteristics of symbol usage, high ranking students preferred using formulas and used mathematical representations efficiently while solving problems. In contrast, middle and low ranking students mostly used tables or pictures. Even when using the same representations, high ranking students' representations were expressed in a more structurally refined manner than those by middle and low ranking students.

---

* ZDM classification : C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : mathematical representation, mathematical problem solving.