

문제 유형에 따른 풀이과정에서의 변화 - 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 반응을 중심으로 -

서 종 진 (한남대학교)

중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 풀이과정에 변화가 있는지를 알아보기 위하여 일차방정식을 학습한 후 1차 조사를 하고, 5개월이 지난 후에 2차 조사를 실시한 결과는 다음과 같다. 첫째, 1차 조사와 2차 조사 간의 정답 비율의 차이를 알아보기 위하여 McNemar검정을 실시한 결과, 유형A의 문항 $x+4=9$ 에서 $p=.035^a$, 문항 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ 에서 $p=.012^a$ 로 나타났으며, 유형B의 문항 $x+3=8$ 에서 $p=.012^a$, 문항 $5(x+2)=20$ 에서 $p=.035^a$ 로 나타났다. 둘째, 1차 조사에서 문제 유형A와 유형B의 풀이과정을 올바르게 표현하지 못하였던 학생들 중에 2차 조사에서 올바르게 표현한 학생들이 있는 반면, 1차 조사에서 풀이과정을 올바르게 표현한 학생들 중에 2차 조사에서 오류를 범하는 학생들이 나타났다. 셋째, 모든 문항에 대하여 일차방식의 풀이과정을 올바르게 표현하는 학생들이 있는 반면, 몇 개 문항은 올바르게 표현하고 몇 개 문항은 그렇지 못한 학생들이 있었다.

결론적으로, 주어진 모든 문항에 대한 풀이 과정을 올바르게 표현하였더라도 또 다른 문항이 주어졌을 때 그 문항의 풀이과정에서 올바른 표현을 할 수 있다고 예견하기가 어렵다는 것이다. 논문에서 조사한 세 가지 유형(유형A, 유형B, 유형C)에 대한 학생들의 반응을 분석한 결과에 따르면, 이 세 가지 유형의 문제 풀이과정을 분석함으로써 어떤 학생이 일차방정식의 풀이과정을 올바르게 표현할 수 '있는지', '없는지'를 판단할 수 있다는 것이다.

I. 도입

아동들은 $2+3=5$ 을 항등식으로 보지 못하고 이 식을 조작적으로 해석한다. 그리고 $2 \times \square = 18$ 과 같은 문제를 풀 때 자신들의 기억 속에 저장된 산술적 사실을 그저 회상한다. 즉, 대수적 과정이 전혀 사용되지 않는다는 것이다(Herscovics, & Kieran, 1980).

산술에서 주어진 연산의 수치적 결과를 찾는 것을 지나치게 강조하는 것은 대수에서 여러 종류의 문제에 원인이 된다. 이러한 원인은 무엇보다, 학생들은 천천히 성장함에도 불구하고 등호의 해석보다 조작적인 면을 강화하고 있다는 것이다. 다음으로, 연습 문제에 대한 답으로 $x+3$ 과 같이 표현

* 접수일(2010년 3월 19일), 심사(수정)일(2010년 4월 1일), 게재확정일자(2010년 4월 13일)

* ZDM분류 : D73

* MSC2000분류 : 97D70

* 주제어 : 일차방정식의 풀이과정, 등호, 대칭, 오류

* 이 논문은 2010학년도 한남대학교 학술연구구성비 지원에 의하여 연구되었음

하는 데에 불편해한다는 것이다. 이러한 불편은 대수에서 처음 강조한 방정식의 특정한 수치적 해를 찾는 것이 사라지지 않기 때문이다(Wagner & Kieran, 1989). 산술에서 “ $2+5$ ”가 “5”로 대체될 수 있지만, “ $x+3$ ”과 같은 표현은 다른 수로 대체할 수 없다는 것이다. 인지적 장애로, Collis는 수치를 구할 수 없는 연산을 그대로 두지 못하는 어려움을 종결의 부족을 받아들이지 못하는 것으로 언급하고 있다. Davis는 인지적 장애로 산술과 대수를 구별하는 명칭-과정 딜레마(name-process dilemma)를 지적하였는데, 산술에서 “ $2+3$ ”은 문제이고 “5”는 답인 반면, “ $x+3$ ”은 x 에 3을 더하는 과정을 나타내는 동시에 답을 가리킨다는 것이다(Chalouh & Herscovics, 1992).

학생들은 열린 문장을 쓰는 연습에서 “어떤 수의 세 배보다 5가 많다”를 “ $3x+5$ ”로 다시 쓰는 연습을 한다. 그러나 이러한 연습의 형태는 문제 상황을 적용하는 문맥과 고립되어 있고 벗어나 있다. 연습은 고립된 상태에서 기술이 되어가고 후에 의미 있는 문장을 해석하는 데 어려움을 초래할 수 있다. 그러면 어떻게 도울 수 있는가? 교사는 익숙한 산술 언어와 대수의 기술적(형식적)인 언어 사이의 어떤 전형적인 불일치를 학생들에게 설명해줄 필요가 있다. 대수에서 $a \times b$ 는 ab 와 같은 의미이지만 산술에서는 $3 \times 5 \neq 35$ 이며, 대수에서 $ab = ba$ 이지만 산술에서는 $35 \neq 53$ 을 의미한다. 산술에서 $7 + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$ 이고 $4 + 0.75 = 4.75$ 이지만, 대수에서 $2a + b$ 가 $2ab$ 을 의미하지는 않는다는 사실을 찾아볼 수 있다. 학생들은 왜 그렇지 않은지를 설명할 수 있어야 한다. 만약, 이러한 어려움의 근원이 문자 언어와 대수 언어 사이의 그릇된 생각 이라면, 대수 학습 이전에 이러한 문제점에 대처해야한다(Richard & Lodholz, 1990).

학교수학에서 대수는 문자 기호를 도입하면서 시작된다. 중학교 1학년 학생들은 문자와 식 영역에서 대수적 사고를 증진하기위하여 문자 기호를 사용한 식의 조작 활동을 하게 된다. 이러한 활동 이후 방정식의 근을 찾는 활동을 통하여 등호의 동치 관계에 대한 이해를 필요로 하고 있다. 등호는 초등학교 산술 과정에서부터 중등학교에 이르기까지 중요한 기호로 대수를 배우는 학생들은 기호 조작을 습득하도록 하고 기호 조작의 능력을 길러야할 필요성이 있다.

방정식을 해결할 때 중학교 1학년 학생들은 주로 방정식의 양변에 동일한 조작을 수행하는 형식적인 절차를 사용한다. 간단한 일차방정식의 문제에서는 대입을 하거나 이항을 주로 사용하여 해결한다. 대입을 이용하는 학생들은 문자를 수와 같은 것으로 인식하고, 이항을 이용하여 방정식을 해결하는 학생들은 해를 구할 때까지 문자의 의미를 부여하지 못한다는 것이다. 이항을 이용하는 학생들은 방정식의 양변에 같은 연산을 수행하는 절차를 이해하지 못하고 기계적인 절차에 그친다는 것이다(Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996; Kieran, 1984). 이는 학생들 자신이 수행하는 조작의 의미를 이해하지 못하고 있으며, 방정식의 풀이과정에서 어떤 조작이 가능한지를 수행하지 못하고 있음을 보여주고 있는 것이다.

문제를 해결할 때 풀이과정에서 정확한 표현은 중요하다. 풀이과정에서 서투른 표현이나 부정확한 표현은 다음 학습에 영향을 미친다는 것이다. 예를 들어 문제 풀이과정에서 올바르게 못한 등호 표현은 중학교 이후 학교수학에 영향을 미치고 대학에서 까지 영향을 미칠 수 있다는 것이다(Kieran,

1981; Herscovics, & Linchevski, 1994, 1996; Mevarech & Yitschak, 1983; Kieran, 1992). 방정식을 해결하는 과정을 올바르게 표현하는 일은 중학교 학생들에게 어려운 일이 될 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 수학 교과서에서 등식의 성질의 절차를 도입하고 예를 통하여 연습한 후 이항을 도입하여 연습하게 되므로 학생 개인의 노력여하에 따라 달라질 수 있다.

기존의 연구에 따르면(기정순·정영옥, 2008; 김차숙, 2003; 도종훈·최영기, 2003; 유영주, 2007; 이종희·김선희, 2003; 장연정, 2008; 최용우, 2007) 방정식의 풀이과정에서 학생들이 오류를 범하고 있다. 이러한 연구들은 방정식의 풀이과정에서 오류의 유형이나 오류 교정에 관한 내용으로 방정식을 학습하고 난 후 일정 기간 동안 시간이 지난 후의 학생들의 반응에 대한 구체적인 연구는 이루어지지 않았다. 본 논문에서는, 학생들이 일차방정식의 풀이과정에서 어느 정도 올바르게 표현하고, 시간이 지난 후에 어떠한 반응을 보이는지 알아보고, 풀이과정을 올바르게 ‘표현할 수 있는지’, ‘그렇지 않은지’를 판단할 수 있는 근거를 찾아보려고 하였다.

II. 연구방법

일차방정식을 학습한 후의 학습 상황과 5개월이 지난 후에 어떻게 변화하였는지를 알아보고, 풀이과정에서의 정확한 표현을 ‘할 수 있는지’ ‘없는지’를 판단할 수 있는 방법을 알아보기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 연구문제

- 1) 일차방정식의 문제 유형A와 유형B에 대한 1차 조사와 2차 조사에서의 반응은 어떠한가?
- 2) 1차 조사의 풀이과정에서 오류를 범하고 있는 학생들이 2차 조사에서 어느 정도 오류를 범하고 있는가?
- 3) 유형C의 문항에 대한 반응은 어떠한가? 그리고 2차 조사에서 유형A와 유형B의 문항의 풀이과정을 올바르게 표현한 학생들이 유형C의 문항에서 어떠한 반응을 보이는가?
- 4) 세 유형(유형A, 유형B, 유형C)의 문항은 일차방정식의 풀이과정에서 ‘올바른 표현을 하는지’, ‘그렇지 않은지’를 판단하는 도구로 고려될 수 있는가?

2. 용어의 정의

1) 오류 문제

유형B 문항에 대한 풀이과정에서 ‘등호(=)’를 올바르게 표현하지 못한 부분을 찾아 그 이유(근거)를 제시하는 문제를 오류 문제라 한다.

2) 등호(=) 관계, 등식의 성질의 절차에 대한 평가

일차방정식의 풀이과정에서 등호(=) 표현에 대한 대칭을 고려하여 등호(=) 표현을 ‘올바르게 표현하였는지,’ ‘그렇지 않은지’로 판단하여 평가하였다. 등식의 성질의 절차에 대한 평가에서는 일차방정식의 풀이과정에 나타난 외형적 표현으로 판단하였다. 풀이과정 전체에서 등식의 성질의 절차를 사용하였거나, 풀이과정에서 등식의 성질의 절차를 사용하다가 이항의 절차를 사용하여 해결하였거나, 이항의 절차를 사용하다가 등식의 성질의 절차를 사용한 경우는 등식의 절차를 사용한 것으로 평가하였다(<표 II-1>). 유형A, 유형B, 유형C 모두 같은 방법으로 평가하였다.

<표 II-1> 풀이 과정에서 등식의 성질의 절차에 대한 평가

평가 문제	학생 반응에 대한 평가	
	아래 유형B의 풀이과정은 등식의 성질의 절차를 사용한 것으로 평가함	
유형B	<p>등식의 성질을 이용하여 방정식을 풀어라</p> $3x+4=17$ <p>1과정 $3x+4-4=17-4$</p> <hr/> $3x=13$ <hr/> $3x \div 3 = 13 \div 3$ <hr/> $x = \frac{13}{3}$	<p>등식의 성질을 이용하여 방정식을 풀어라</p> $3x+4=17$ <p>풀이과정</p> <hr/> $3x-4+4=17-4$ <hr/> $3x=13$ <hr/> $x = \frac{13}{3}$

3. 연구의 제한점 및 기대효과

지역이나 학교 간의 차이가 있으므로 문제 유형에 대한 학생들의 반응은 약간 달리 나올 수 있다. 하지만, 평가를 통한 수학학습지도의 측면에서 유연성을 고려한다면 지역 간 학교간의 차이는 그다지 문제가 되지 않는다고 본다. 일차방정식의 풀이과정에서 등호 표현에 중점을 두어 연구되었지만 연구의 방법적인 면을 고려할 때 다른 영역에서도 활용 가치가 있을 것으로 보인다.

4. 연구대상 및 연구도구

1) 연구대상 및 조사

시 단위 지역의 중학교 1학년 4개 반 130명을 대상으로 하였다. 이 학생을 대상으로, 일차방정식을 학습한 후의 학생들의 학습 상황과 시간이 지난 후 학생들의 학습 상황을 비교분석하기 위하여 두 번에 걸쳐 조사하였다. 2차는 1차 조사가 실시된 5개월 후에 조사를 실시하였다.

<표 II-2> 조사 및 문제 유형

조사	조사 시기	문제 유형	비고
1차 조사	일차방정식을 학습한 후	유형A, 유형B	· 1차 조사와 2차 조사에서의 유형A와 유형B는 같은 문항임 · 유형C는 1차 조사의 유형A와 같은 문항을 사용하여 풀이과정을 제시하고 오류가 있도록 문항 구성
2차 조사	1차 조사 5개월 후	유형A, 유형B 유형C	

2) 조사 도구

<표 II-3> 문항 구성

조사 도구A	문 제	문 항 수
유형A	* 다음 방정식을 풀어라 1) $x+4=9$, 2) $3x+2=17$, 3) $4(x+2)=20$, 4) $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$	4
유형B	* 등식의 성질을 이용하여 다음 방정식을 풀어라. 1) $x+3=8$, 2) $3x+4=17$, 3) $5(x+2)=20$, 4) $x+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$	4

<표 II-4> 문항 구성

조사 도구C	문 제	문 항 수
유형 C	각 문제마다, 풀이 과정에 오류가 없으면 “없다”에 표시하고, 만약 오류가 있으면 “있다”에 표시를 하고 그 이유(근거)를 제시하도록 문제를 구성함.	4
	오류 찾기 문항 1) 방정식 $x+4=9$ 을 풀어라. (있다, 없다) 풀이) $x+4=9$ $=9-4$ $=5$ $x=5$ 2) 방정식 $3x+2=17$ 을 풀어라.(있다, 없다) 풀이) $3x+2=17=17-2$ $x=15$ 3) 방정식 $4(x+2)=20$ 을 풀어라. (있다, 없다) 풀이) $4(x+2)=20$ $4x+8=20$ $=4x=20-8$ $4x=12$ $x=3$ 4) 방정식 $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ 을 풀어라. (있다, 없다) 풀이) $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ $=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}$ $=\frac{5}{12}$ $x=\frac{5}{12}$	

학생들이 일차방정식을 어느 정도 해결하고 풀이과정에서 올바른 표현을 하는지를 알아보기 위하여 기초문제로 구성되었다. 문항은 일차방정식에 관한 세 가지 유형(유형A, 유형B, 유형C)의 문제를

사용하였다(서종진, 2009; Seo & Kim 2010). 유형A는 일차 방정식을 학습한 후에 기본적인 일차방정식의 해를 구하는 과정에서 어떠한 표현을 하였는지?, 해를 구하였는지? 알아보기 위한 문제들이다. 유형B는 등식의 성질의 절차를 사용하여 ‘어느 정도 해결할 수 있는지?’, ‘풀이 과정에서 등호(=)를 올바르게 표현 할 수 있는지?’ 알아보기 위한 문항으로 등식의 성질을 사용하여 해결하라는 조건이 제시된 문항으로 구성되었다(<표 II-2>). 그리고 유형C는 풀이 과정에서 오류가 있거나 해가 올바르게 제시되지 않았거나, 계산과정이 틀리게 제시된 문항으로 구성되었다(<표 II-3>). 유형A, 유형B, 유형C를 구성한 이유는 다음과 같다. 일차방정식 몇 개의 문항에 대한 해결 과정만을 보고 풀이과정을 ‘올바르게 표현할 수 있는지?’, ‘그렇지 않은지?’ 판단하기에는 어려움이 따른다. 예를 들어, 어떤 학생이 유형A의 풀이과정이 모두 맞았고 유형B를 모두 해결하였다고 하더라도 더 많은 문항이 주어질 경우에 그 학생이 풀이과정에서 올바른 표현을 ‘할 수 있는지’, ‘없는지’를 판단하기에는 어려움이 따른다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 많은 문항을 구성하면 될 것이다. 그러나 얼마나 많은 문항을 구성해야 하는지, 몇 개의 문항을 구성하는 것이 적절한 것인가는 미지수라 할 수 있다. 최소한의 문항과 최소한의 노력으로 최대의 효과를 추구하는 것이 좋은 방법으로 고려된다. 그러므로 유형C 문항은 이러한 단점을 보완하여준다. 각 유형의 사후측정 신뢰계수는 유형A가 $\alpha = .779$, 유형 B가 $\alpha = .903$ 으로 나타났다.

5. 학생들의 반응에 대한 분류기호

학생들의 반응에 대한 평가는 Seo & Kim(2010)의 분류기호를 사용하였다.

1) 유형A와 유형B의 반응에 대한 분류기호

유형A는 일차방정식의 해를 구하는 방법을 제시하지 않은 문항으로 구성되었으며 유형B는 등식의 성질을 이용하여 일차방정식을 해결하는 문항으로 구성되어있다. 풀이과정에서의 반응에 대한 분류기호는 R-P-S, R-T-S, R-P-AS, R-T-AS, W-P-S, W-T-S, W-P-AS, W-T-AS, R-MS, W-MS, N-O-O로 표시하였다. 이 기호는 다음과 같은 의미를 가진다.

일차방정식의 해를 구한 경우 ‘R’, 그렇지 못한 경우는 ‘W’의 두 범주로 분류하였다. 그리고 일차방정식 풀이 방법에 따라 ‘등식의 성질’을 이용한 경우는 ‘P’, ‘이항’을 이용한 경우는 ‘T’로 분류하였다. 다음으로, 일차방정식 풀이과정에 나타난 반응에서 등호의 완성도에 따라 대칭적(S), 비대칭적(AS)으로 분류하였다. 이 분류에서는, 학생들이 일차방정식을 해결할 때 등호관계를 잘 모르거나 등호관계를 무시하고 해결하는 경우가 종종 발생하고 있는 상황을 고려하여 등호관계를 올바르게 표현한 경우(대칭)와 등호관계를 올바르게 표현하지 못한 경우(비대칭)에 주안점을 두어 분류하였다.

대입하여 방정식의 해를 구한 경우는 ‘R-MS’로 표시하였으며, 대입하여 방정식의 해를 구하지 못한 경우는 ‘W-MS’로 구분하였다. 그리고 반응이 전혀 없는 경우는 ‘N-O-O’로 표시하였다.

유형A와 유형B의 기호에 대하여 예를 들어 설명하면 다음과 같다(<표II-4>).

① 기호 'R-P-S'에서, R은 일차방정식의 정답을 올바르게 구한 것을 의미하고, P는 '등식의 성질'의 절차를 사용하여 해결하였음을 의미, S는 풀이과정에서 '등호(=)'를 올바르게 표현하였음을 뜻한다. 즉, '등식의 성질'의 절차를 사용하여 문제를 해결하는 과정에서 대칭적 관계를 올바르게 표현하고 정답을 구한 것을 의미한다.

② 기호 'R-P-AS'에서, R은 일차방정식의 정답을 올바르게 구한 경우, P는 '등식의 성질'의 절차를 사용하여 해결하였음을 의미, AS는 풀이과정에서 '등호(=)'를 올바르게 표현하지 못하였음을 뜻한다. 즉, '등식의 성질'의 절차를 사용하여 문제를 해결하고 정답을 구하였으나 '등호(=)'의 대칭 관계를 올바르게 표현하지 못하였음을 의미한다.

③ 기호 'W-T-AS'에서, W는 일차방정식의 정답을 구하지 못한 것을 의미하고, T는 '이항'의 절차를 사용하여 해결하였음을 의미, AS는 풀이과정에서 '등호(=)'를 올바르게 표현하지 못하였음을 뜻한다. 즉, '이항'의 절차를 사용하여 문제를 해결하고 정답을 구하였으나 '등호(=)'의 대칭 관계를 올바르게 표현하지 못하였음을 의미한다.

④ 기호 'R-MS'는 대입하여 일방정식의 해를 구한 것을 의미하고, 'W-MS'는 대입하여 일차방정식의 해를 구하였으나 오답인 경우를 말한다. 그리고 'N-O-O'는 일차방정식 문제를 해결하지 않는 경우 즉, 반응이 전혀 없는 경우를 의미한다.

이외 기호는 같은 방법으로 해석이 된다.

<표II-4> 유형A와 유형B의 반응에 대한 분류기호

방정식의 해	문제해결 방법	기호	기호 표시
일차방정식의 해를 구한 경우: 정답(R)	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	대칭 (S)	R-P-S
	'이항'의 절차를 사용(T)		R-T-S
	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	비대칭 (AS)	R-P-AS
	'이항'의 절차를 사용(T)		R-T-AS
일차방정식의 해를 구하지 못한 경우: 오답(W)	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	대칭 (S)	W-P-S
	'이항'의 절차를 사용(T)		W-T-S
	'등식의 성질'의 절차를 사용(P)	비대칭 (AS)	W-P-AS
	'이항'의 절차를 사용(T)		W-T-AS
정답(R)	대입하여 해를 구한 경우(MS)		R-MS
오답(W)	대입하여 해를 구하지 못한 경우(MS)		W-MS
무반응(N)	풀이 과정이 전혀 없는 경우(반응이 없는 경우)(OO)		N-O-O

2) 유형C 문항의 풀이과정에 대한 기호

유형C 문항은 일차방정식의 풀이과정을 제시하고 오류가 있는 부분을 찾아 올바르게 표현하는 문제이다. 그리고 이 문제에 제시된 풀이과정은 모두 오류를 포함하고 있다. 문제풀이 결과에 대한 기호는 Y, N, S, AS, W, NR로 표시하였다. 이 기호는 다음과 같은 의미를 가진다.

- ① Y: 유형C의 문제에서 오류가 있다고 체크한 경우,
- ② N: 유형C의 문제에서 오류가 없다고 체크한 경우,
- ③ S: 유형C의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하고, 제시한 이유(근거)에서 '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현한 경우
- ④ AS: 유형C의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하고, 제시한 이유(근거)에서 '등호(=)'의 대칭관계를 올바르게 표현하지 못한 경우
- ⑤ W: 유형C의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시를 하였으나 틀린 경우,
- ⑥ NR: 유형C의 문제에서 오류에 대한 이유(근거)를 제시하지 않은 경우(반응이 없는 경우)

<표 II-5> 유형C의 반응에 대한 분류기호

반응 유형	풀이과정(이유 제시)	반응 기호
오류 있음(Y)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	YS
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	YAS
	이유 제시한 것이 틀림(W)	YW
	이유 제시하지 않음(NG)	YNG
오류 없음(W)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	NS
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	NAS
	이유 제시한 것이 틀림(W)	NW
	이유 제시하지 않음(NG)	NNG

III. 자료 분석 결과

분석1에서는 일차방정식의 문제 유형A와 유형B에 대한 1차 조사와 2차 조사의 반응을 분석하였다. 분석2에서는, 1차 조사의 풀이과정에서 오류를 범하였던 학생들이 2차 조사에서 올바르게 표현하였는지, 1차 조사에서 풀이과정을 올바르게 표현한 학생들이 2차 조사에서 오류를 범하고 있는지를 분석하였다. 분석3에서는, 유형C 문항에 대한 반응을 분석하고 세 유형(유형A, 유형B, 유형C)을 종합적으로 분석을 하였다(<표 III-1>). 분석에서는 SPSS17.0을 사용하여 빈도분석과 Fisher의 직접확률검정, McNemar검정을 하였다. 그리고 분류기호는 앞의 기호(<표 II-4>, <표 II-5>)를 사용하였다.

<표 III-1> 분석

조사	1차 조사	2차 조사	비고
분석1	유형A	유형A	유형A의 비교 분석
	유형B	유형B	유형B의 비교 분석
분석2	1차, 2차 조사의 풀이과정에 대한 분석		
분석3		유형C	유형A, 유형B, 유형C 종합분석

2. 분석1

유형A와 유형B의 문항에 대한 분석은 정답과 오답의 두 가지 기준과 풀이과정에서 등호(=)의 올바른 표현 즉, 대칭관계와 관련하여 분석하였다. 여기에서 분석은 1차 조사와 2차 조사의 풀이과정의 결과에 초점을 두고 비교하였다.

1) 유형A 문항에 대한 분석

1.1) $x + 4 = 9$ 에 대한 분석

이항의 절차를 사용하여 해결(R-T-S)한 학생들은 1차 조사에서 68.4%, 2차 조사에서 67.7%, 대입을 하여 해결(R-MS)한 학생은 1차 조사에서 7.7%, 2차 조사에서 14.6%로 나타났다. 그리고 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결(R-P-S)한 학생은 1차 조사에서 1.5%, 2차 조사에서 4.6%, 등식의 성질의 절차를 사용하였으나 등호(=) 관계를 올바르게 표현하지 못한(R-P-AS) 학생들은 1차 조사와 2차 조사에서 0.8%, 이항의 절차를 사용하여 해결하였지만 등호(=) 관계를 올바르게 표현하지 못한(R-T-AS) 학생들은 1차 조사에서 12.3%, 2차 조사에서 10%로 나타났다. 그 외 학생들은 오답(1차: 9.3%, 2차:2.3%)을 제시하였다. 이 문항을 해결할 때 1차와 2차 모두 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생들이 대부분임을 알 수 있다(<표 III-2>, <표 III-3>).

일차방정식의 해를 구하는 과정과는 관계없이 정답을 구한 경우와 그렇지 않은 경우로 평가하였을 때, 1차 조사에서 정답을 구한 학생 수와 2차 조사에서 정답을 구한 학생 수의 비율에 차이가 있는지 조사한 결과 McNemar검정의 p 값이 .035^a로 나타나 비율차이가 있는 것으로 나타났다.<표 III-4>).

<표 III-2> $x + 4 = 9$ 에 대한 1차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	2	1.5	118 (90.7)
	R-T-S	89	68.4	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	16	12.3	
	R-MS	10	7.7	
오답(W)	W-P-S	4	3.1	12 (9.3)
	W-T-S	0	0	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	1	0.8	
	W-MS	1	0.8	
	N-O-O	6	4.6	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-3> $x + 4 = 9$ 에 대한 2차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	6	4.6	127 (97.7)
	R-T-S	88	67.7	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	13	10	
	R-MS	19	14.6	
오답(W)	W-P-S	0	0	3(2.3)
	W-T-S	2	1.5	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	0	0	
	W-MS	1	0.8	
	N-O-O	0	0	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-4> $x + 4 = 9$ 에 대한 1차와 2차 조사에서 정답 비율에 대한 분석

$x + 4 = 9$		2차 조사		합계
		정답	오답	
1차 조사	정답	115	3	118
	오답	12	0	12
전체		127	3	130

	값	정확한유의확률(양측검정)
McNemar검정		.035 ^a
유효케이스수	130	

1.2) $3x + 2 = 17$ 에 대한 분석

이 문항에서도 앞의 문항(<표 III-2>, <표 III-3>)에서의 결과와 유사하게 이항의 절차를 사용하여 해결(R-T-S)한 학생들이 (1차 조사에서 70%, 2차 조사에서 71.5%) 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결한 학생들(1차 조사에서 3.1%, 2차 조사에서 11.5%)보다 많이 나타나 풀이과정에서 이항을 선호하는 것으로 볼 수 있다.

앞의 결과(<표 III-2>, <표 III-3>)와 유사하게 이 문항의 결과(<표 III-5>, <표 III-6>)에 대한 분석에서도 정답률이 높게 나타났다. 그러나 앞의 결과(<표 III-2>, <표 III-3>)와는 다르게 이 문항(<표 III-5>, <표 III-6>)에 대한 McNemar검정을 실시한 결과 p 값이 .169^a로 나타나 1차 조사(85.4%)와 2차 조사(91.5%)간의 정답 비율차이가 없는 것으로 나타났다.

<표 III-5> $3x + 2 = 17$ 에 대한 1차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	4	3.1	111 (85.4)
	R-T-S	91	70	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	13	10	
	R-MS	2	1.5	
오답(W)	W-P-S	0	0	19 (14.6)
	W-T-S	5	3.8	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	6	4.6	
	W-MS	1	0.8	
	N-O-O	7	5.4	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-6> $3x + 2 = 17$ 에 대한 2차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	15	11.5	119 (91.5)
	R-T-S	93	71.5	
	R-P-AS	0	0	
	R-T-AS	4	3.1	
	R-MS	7	5.4	
오답(W)	W-P-S	0	0	11(8.5)
	W-T-S	3	2.3	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	1	0.8	
	W-MS	3	2.3	
	N-O-O	4	3.1	
합 계		130	100	130(100)

1.3) $4(x + 2) = 20$ 에 대한 분석

이 문항에서 양변에 4로 나눴셈하거나 $\frac{1}{4}$ 을 곱하기하여 해를 구한 경우 등식의 성질의 절차를 이용한 것으로 평가하였다. 이렇게 평가를 하였지만 2차 조사에서 R-P-S(등식의 절차를 사용하여 해를 구한 경우)는 나타나지 않았으며 주로 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생들이(1차 조사: 67.6%, 2차 조사: 74.6%) 대부분으로 나타났다.

이 문항에 대한 정답 비율은 McNemar검정을 실시한 결과 $p값 = .345^a$ 로 나타나 1차 조사(85.4%)와 2차 조사(90%)에서 정답 비율차이가 없는 것으로 나타났다.

풀이과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현하지 못한(R-P-AS, R-T-AS, W-P-AS, W-T-AS) 학생들은, <표 III-2>에서 13.9%, <표 III-3>에서 10.8%, <표 III-5>에서 15.4%, <표 III-6>에서

3.9%, <표 III-7>에서 12.4%, <표 III-8>에서 12.3%로 나타나 대부분의 학생들이 풀이과정에서 등호 (=) 관계를 올바르게 표현할 수 있는 것처럼 보인다.

<표 III-7> $4(x+2) = 20$ 에 대한 1차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	7	5.4	111 (85.4)
	R-T-S	88	67.6	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	11	8.5	
	R-MS	4	3.1	
오답(W)	W-P-S	0	0	19 (14.6)
	W-T-S	3	2.3	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	4	3.1	
	W-MS	2	1.5	
	N-O-O	10	7.7	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-8> $4(x+2) = 20$ 에 대한 2차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	0	0	117 (90)
	R-T-S	97	74.6	
	R-P-AS	13	10	
	R-T-AS	0	0.0	
	R-MS	7	5.4	
오답(W)	W-P-S	0	0	13 (10)
	W-T-S	1	0.8	
	W-P-AS	2	1.5	
	W-T-AS	1	0.8	
	W-MS	3	2.3	
	N-O-O	6	4.6	
합 계		130	100	130(100)

1.3) $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 분석

앞의 결과와 다르게, 1차 반응에서 R-P-S의 빈도가 25.4%(33명), W-P-S의 빈도가 8.5%(11명), 2차 반응에서 R-P-S의 빈도가 24.6%(32명)로 나타났다. 이러한 결과는, 처음 풀이과정에서 양변에 12를 곱하는 등식의 절차를 사용하고 이후의 풀이과정에서는 이항의 절차를 사용한 경우, 처음 풀이과정에서 양변에 $\frac{1}{12}$ 을 곱하고 이후 풀이과정에서 이항의 절차를 사용한 경우 모두 R-P-S로 평가하였기 때

문이다. 즉, $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 의 풀이과정에서 등식의 성질의 절차와 이항을 함께 사용하였을 경우는 R-P-S로 평가한 결과이다. 이러한 반응을 이항의 절차를 사용하여 해결한 것으로 평가할 경우 R-P-S의 빈도는 앞의 결과(<표 III-2>, <표 III-3>, <표 III-5>, <표 III-6>, <표 III-7>, <표 III-8>)와 유사하다.

문항 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 1차 조사와 2차 조사에서의 정답 비율을 알아보기 위하여 McNemar검정을 실시한 결과 p 값이 .012^a로 나타나 비율차이가 있는 것으로 나타났다.

<표 III-9> $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 1차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	33	25.4	75 (57.6)
	R-T-S	34	26.1	
	R-P-AS	2	1.5	
	R-T-AS	3	2.3	
	R-MS	3	2.3	
오답(W)	W-P-S	11	8.5	55 (42.4)
	W-T-S	4	3.1	
	W-P-AS	7	5.4	
	W-T-AS	6	4.6	
	W-MS	8	6.2	
	N-O-O	19	14.6	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-10> $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 2차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	32	24.6	95 (73.1)
	R-T-S	43	33.1	
	R-P-AS	9	6.9	
	R-T-AS	7	5.4	
	R-MS	4	3.1	
오답(W)	W-P-S	2	1.5	35 (26.9)
	W-T-S	6	4.6	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	4	3.1	
	W-MS	8	6.2	
	N-O-O	15	11.5	
합 계		130	100	130(100)

지금까지의 결과(<표 III-2>, <표 III-3>, <표 III-5>에서 <표 III-10>까지)에서 일차방정식을 해결할 때 주로 이항의 절차를 사용하고 풀이과정을 올바르게 표현한 것으로 나타났다. 그리고 한 문

항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)을 제외하고 다른 문항($x + 3 = 8$, $3x + 4 = 17$, $5(x + 2) = 20$)에서는 등식의 절차를 사용하여 해결하는 학생들이 아주 적게 나타났다. 즉, 일차방정식의 기본문제를 해결할 때 주로 이항의 절차를 선호하는 것으로 볼 수 있다.

또한, 유형A에서 한 문항이라고 등호(=)를 올바르게 표현하지 못한 학생들이 31.5%(41명)로 나타나 68.5%(89명)는 일차방정식을 해결할 때 풀이과정을 올바르게 표현하고 있는 것처럼 보인다(<표 III-11>). 하지만 이 학생들(89명) 중에는 반응을 보이지 않은 학생들이 있었으므로 89명(68.5%)의 학생들이 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현할 수 있는지 없는지는 알 수가 없다. 이러한 것은 유형B와 유형C의 풀이과정을 평가함으로써 알 수 있다.

<표 III-11> 유형A에서 네 문항 중 한 문항이라도 풀이과정이 올바르게 표현하지 못한 학생

문제유형	조 사	
	빈도	%
유형A에서 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	41	31.5

2) 유형B 문항에 대한 분석

<표 III-12> $x + 3 = 8$ 에 대한 1차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	19	14.6	94 (72.4)
	R-T-S	54	41.6	
	R-P-AS	3	2.3	
	R-T-AS	3	2.3	
	R-MS	15	11.6	
오답(W)	W-P-S	1	0.8	36 (27.6)
	W-T-S	2	1.5	
	W-P-AS	2	1.5	
	W-T-AS	1	0.8	
	W-MS	5	3.8	
	N-O-O	25	19.2	
합 계		130	100	130(100)

이 문항($x + 3 = 8$)에서 일차방정식의 해를 구한 학생들은 72.4%(94명)로 나타났으며, 등식의 성질의 절차를 사용하고 풀이과정에서 등호(=)관계를 올바르게 표현한 학생들은 14.6%(19명)로 나타났다. 그리고 정답, 오답과 관계없이 풀이과정에서 등식의 성질의 절차를 사용한 학생들은 1차 조사에서 19.2%, 2차 조사에서 26.1%로 나타났으며, 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생들은 1차 조사에서 46.2%, 2차 조사에서 69.2%로 나타났다(<표 III-12>, <표 III-13>). 이 문항은 등식의 절차를 사용하여 해결하라는 조건이 있었지만 이항의 절차를 사용한 학생들이 많이 나타나고 있어

등식의 성질을 기억하지 못하거나 이해하지 못하고 있는 학생들이 많이 있음을 의미한다.

<표 III-13> $x + 3 = 8$ 에 대한 2차 조사

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	33	25.3	127 (97.6)
	R-T-S	76	58.4	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	13	10	
	R-MS	4	3.1	
오답(W)	W-P-S	0	0	3 (2.4)
	W-T-S	1	0.8	
	W-P-AS	0	0	
	W-T-AS	0	0	
	W-MS	1	0.8	
	N-O-O	1	0.8	
합 계		130	100	130(100)

풀이과정에서 등식의 성질의 절차를 올바르게 사용하고 정답을 구한 학생들의 수는 1차 조사(R-P-S: 14.6%) 보다 2차 조사(R-P-S: 25.3%)에서 많이 나타났다(McNemar검정: p 값 = .012^a). 5개월이 지난 후 등식의 성질의 절차를 올바르게 사용한 학생들이 많이 나타나고 있지만 전체 학생에 대한 비율에서는 여전히 낮다고 볼 수 있다.

<표 III-14> $x + 3 = 8$ 에 대한 1차와 2차 조사에서 정답 비율에 대한 분석

	값	정확한 유의확률(양측검정)
McNemar검정		.038 ^a
유효케이스 수	130	

이 문항($3x + 4 = 17$: 1차 조사와 2차 조사)에 대한 평가는, 풀이과정에서 등식의 양변을 3으로 나눴셈을 하는 과정을 제시하고 그 다음 풀이과정에서 이항의 절차를 사용하였거나, 풀이과정에서 4를 이항한 후에 등식의 양변을 3으로 나눴셈한 경우, 즉 풀이과정에서 등식의 성질과 이항의 두 가지 방법을 사용한 경우는 등식의 성질의 절차를 사용한 것으로 평가하였다. 이러한 평가는 연구 대상 전체 학생을 개별적으로 확인하기 어렵기 때문에 풀이과정에 나타난 결과를 중심으로 평가한 것이다.

이 문항에서도 앞의 문항($x + 3 = 8$)과 유사하게 등식의 성질 보다 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생이 많이 나타나고 있음을 알 수 있다(<표 III-15>, <표 III-16>). 그러나 풀이과정에서 등식의 성질의 절차를 올바르게 사용하고 정답(R-P-S)을 구한 비율 차이는 1차 조사(15.4%)와 2차 조사(24.6%)간의 유의한 차이가 나타나지 않았다(McNemar검정: p 값 = .081^a).

<표 III-15> $3x + 4 = 17$ 에 대한 1차 반응

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	20	15.4	73 (56.2)
	R-T-S	47	36.1	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	4	3.1	
	R-MS	1	0.8	
오답(W)	W-P-S	2	1.5	57 (43.8)
	W-T-S	4	3.1	
	W-P-AS	1	0.8	
	W-T-AS	14	10.7	
	W-MS	10	7.7	
	N-O-O	26	20	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-16> $3x + 4 = 17$ 에 대한 2차 반응

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	32	24.6	97 (74.6)
	R-T-S	50	38.5	
	R-P-AS	3	2.3	
	R-T-AS	12	9.2	
	R-MS	0	0	
오답(W)	W-P-S	1	0.8	33 (25.4)
	W-T-S	9	6.9	
	W-P-AS	13	10	
	W-T-AS	0	0	
	W-MS	9	6.9	
	N-O-O	1	0.8	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-17> $3x + 4 = 17$ 에 대한 1차와 2차 조사에서 정답 비율에 대한 분석

	값	정확한 유의확률(양측검정)
McNemar검정		.081 ^a
유효케이스수	130	

이 문항($5(x + 2) = 20$)에 대한 평가에서도 유형A 문항 $4(x + 2) = 20$ 과 같은 방법으로 평가를 하였다. 등식의 성질의 절차를 사용하라는 조건이 제시되지 않은 유형A 문항 $4(x + 2) = 20$ 에서의 1차 조사에서 R-P-S(등식의 절차를 사용하여 해를 구한 경우)는 5.4%이었지만, 등식의 성질의 절차를 사용하라는 조건이 제시된 유형B 문항 $5(x + 2) = 20$ 에서의 1차 조사에서는 15.4%로 나타났다. 등식의 성질의 절차를 사용하여 해결하라는 풀이방법에 대한 조건이 제시되지 않은 경우보다

조건이 제시된 경우에 더 많은 학생들이 등식의 절차에 따라 해결하였지만 여전히 이항의 절차를 사용하여 해결한 학생이 많이 나타났다(<표 III-7>, <표 III-16>).

이 문항에 대한 1차 조사와 2차 조사에서 등식의 성질의 절차를 올바르게 사용하고 정답(R-P-S)을 구한 학생들의 비율은 1차 조사에서 11.5%, 2차 조사에서 21.5%로 나타나 유의한 차이가 있는 것으로 나타났다(McNemar검정: p 값 = .035^a).

<표 III-18> $5(x + 2) = 20$ 에 대한 1차 반응

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	15	11.5	84 (64.6)
	R-T-S	58	44.6	
	R-P-AS	1	0.8	
	R-T-AS	4	3.1	
	R-MS	6	4.6	
오답(W)	W-P-S	0	0	46 (35.4)
	W-T-S	1	0.8	
	W-P-AS	1	0.8	
	W-T-AS	8	6.2	
	W-MS	9	6.9	
	N-O-O	27	20.7	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-19> $5(x + 2) = 20$ 에 대한 2차 반응

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	28	21.5	102 (78.4)
	R-T-S	58	44.6	
	R-P-AS	3	2.3	
	R-T-AS	10	7.7	
	R-MS	3	2.3	
오답(W)	W-P-S	0	0	28 (21.60)
	W-T-S	4	3.1	
	W-P-AS	1	0.8	
	W-T-AS	7	5.4	
	W-MS	10	7.7	
	N-O-O	6	4.6	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-20> $5(x + 2) = 20$ 에 대한 1차와 2차 조사에서 정답 비율에 대한 분석

McNemar검정	값	정확한 유의확률(양측검정)
	유효케이스수	130

이 문항($x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$)의 1차 조사에서 등식의 성질의 절차를 사용하여 정답(R-P-S)을 구한 학생은 앞의 문항($5(x+2) = 20$)의 1차 조사보다 약간 높게 나타났다. 이것은 문항($x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$)의 풀이과정에서 등식의 성질의 절차를 한 부분이라도 사용한 경우는 R-P-S로 평가한 결과이다.

<표 III-21> $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ 에 대한 1차 반응

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	19	14.6	60 (46.10)
	R-T-S	34	26.1	
	R-P-AS	3	2.3	
	R-T-AS	3	2.3	
	R-MS	1	0.8	
오답(W)	W-P-S	8	6.2	70 (53.9)
	W-T-S	2	1.5	
	W-P-AS	4	3.1	
	W-T-AS	9	6.9	
	W-MS	7	5.4	
	N-O-O	40	30.8	
합 계		130	100	130(100)

<표 III-22> $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ 에 대한 2차 반응

방정식의 해	기호 표시	빈도	%	합계(%)
정답(R)	R-P-S	19	14.6	95 (73)
	R-T-S	61	46.9	
	R-P-AS	2	1.5	
	R-T-AS	13	10	
	R-MS	0	0	
오답(W)	W-P-S	0	0	35 (27)
	W-T-S	10	7.7	
	W-P-AS	1	0.8	
	W-T-AS	6	4.6	
	W-MS	1	0.8	
	N-O-O	17	13.1	
합 계		130	100	130(100)

이 문항($x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$)의 1차 조사와 2차 조사에서 등식의 성질의 절차를 올바르게 사용하고 정답(R-P-S)을 구한 학생들은 모두 14.6%로 나타나 차이가 전혀 없었다. McNemar검정: p 값 = .100^a). 그리고 이 문항에서도 앞의 결과(<표 III-12>, <표 III-13> <표 III-15> <표 III-16>, <표 III-18>

<표 III-19>와 유사하게 등식의 성질 보다는 이항의 절차를 사용한 학생들이 많이 나타나고 있다.

<표 III-23> $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ 에 대한 1차와 2차 조사에서 정답 비율에 대한 분석

	값	정확한 유의확률(양측검정)
McNemar검정		.1000 ^a
유효케이스수	130	

2. 분석2

여기에서의 분석은, 일차방정식의 해를 구한 결과에서 정답이었거나 오답이었거나 구분하지 않고 풀이과정에서 등호 표현을 ‘올바르게 하였는지,’ ‘그렇지 못하였는지’에 초점을 두고 평가한 결과이다. 그리고 유형B에서 이항의 절차를 사용하여 해결하였거나, 등식의 성질의 절차를 사용하였거나 관계없이 풀이과정에서 등호 표현을 ‘올바르게 하였는지,’ ‘그렇지 못하였는지’에 초점을 두고 평가하였다.

1차 조사에서는, 유형A의 4문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 30.8%, 유형B의 4문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 31.5%이었다. 그리고 유형A와 유형B의 8문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 50%로 나타났다. 2차 조사에서는, 유형A의 4문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 35.4%, 유형B의 4문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 30%이었다. 그리고 유형A와 유형B의 8문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 53.8%로 나타났다(<표 III-24>).

<표 III-24> 유형A, 유형B, 유형A와 유형B에서 한 문항이라도 풀이과정이 올바르지 못한 학생

문제유형	조사		2차 조사	
	빈도	%	빈도	%
유형A에서 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	40	30.8	46	35.4
유형B에서 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	41	31.5	39	30
유형A와 유형B에서 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	65	50	70	53.8

위의 조사 결과(<표 III-24>)만으로는 1차 조사의 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생이 2차 조사에서 등호를 올바르게 ‘표현하였는지,’ ‘그렇지 않은지,’ 1차 조사의 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현한 학생이 2차 조사에서 등호를 올바르게 ‘표현하였는지,’ ‘그렇지 않은지’ 알

수 없다. 그러므로 1차 조사의 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들이 2차 조사의 풀이과정에서 '어떠한 반응을 보이는가?'를 알아보기 위하여 1차 조사의 반응을 기준으로 각 유형(유형A, 유형B)마다 2차 조사의 반응을 분석하였다.

유형A에서, 1차 조사의 4문항 전체 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 40명으로 나타났다. 이 학생들 중 2차 조사에서 유형A의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생들은 27명으로 나타났다. 즉, 5개월 전에 풀이과정에 오류를 범하였던 학생 중 67.5%의 학생들이 풀이과정에서 올바르게 표현하였다는 것이다. 그리고 유형A에서, 1차 조사의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생들은 90명으로 나타났다. 이 학생들 중 2차 조사에서 유형A의 4문항 전체 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 33명으로 나타났다. 즉, 5개월 전에 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하였던 학생 중 36.7%의 학생들이 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못하였다는 것이다.

<표 III-25> 유형A의 풀이과정에서 등호 표현에 관한 분석

유형A		2차 조사에서 유형A의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생
1차 조사에서 유형A의 4문항 전체 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	40명 (100%)	27명(67.5%)
유형A		2차 조사에서 유형A의 4문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생
1차 조사에서 유형A의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생	90명 (100%)	33명(36.7%)

유형B에서, 1차 조사에서 4문항 전체 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 41명으로 나타났다. 이 학생들 중 2차 조사에서 유형B의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생들은 28명으로 나타났다. 즉, 5개월 전에 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들(100%) 중 68.3%의 학생들만이 풀이과정에서 올바르게 표현하였다는 것이다. 그리고 유형B에서, 1차 조사의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생들은 89명으로 나타났다. 이 학생들 중 2차 조사에서 유형B의 4문항 전체 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 26명으로 나타났다. 즉, 5개월 전 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현한 학생들(100%) 중 29.2%가 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못한 것이다.

<표 III-26> 유형B의 풀이과정에서 등호 표현에 관한 분석

유형B		2차 조사에서 유형B의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생
1차 조사에서 유형A의 4문항 전체 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	41명 (100%)	28명(68.3%)
유형B		2차 조사에서 유형B의 4문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생
1차 조사에서 유형B의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생	89명 (100%)	26명(29.2%)

유형A와 유형B의 8문항 전체에서 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 1차 조사에서 65명 이었다. 이 학생들 중 2차 조사에서 8문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생들은 29명으로, 5개월 전에 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못하였던 학생들(100%) 중에서 44.6%의 학생들이 풀이과정을 올바르게 표현한 것으로 나타났다. 그리고 1차 조사에서 유형A와 유형B의 8문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생들은 65명으로 나타났다. 이 학생들 중 2차 조사에서 8문항 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생들은 34명으로 나타났다. 즉, 5개월 전 풀이과정에 등호를 올바르게 표현하였던 학생들(100%) 중 52.3%가 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못한 것으로 나타났다.

<표 III-27> 유형A와 유형B 풀이과정에서 등호 표현에 관한 분석

유형A와 유형B		2차 조사에서 유형A와 유형B의 8문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생
1차 조사에서 유형A와 유형B의 8문항 중 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생	65명 (100%)	29(44.6%)
유형A와 유형B		2차 조사에서 유형A와 유형B의 8문항 중에서 1문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생
1차 조사에서 유형A와 유형B의 8문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생	65명 (100%)	34(52.3%)

위의 결과(<표 III-24>, <표 III-25>, <표 III-26>, <표 III-27>)에서 다음을 알 수 있다.

한 가지 유형의 오류의 빈도보다 두 가지 유형의 오류의 빈도가 많이 나타나고 있음을 보여주고 있다(<표 III-24>, <표 III-25>, <표 III-26>, <표 III-27>). 즉, 유형이 많아질수록 또는 문항이 많아질수록 풀이과정에서의 오류 빈도가 많이 나타나므로 몇 가지 유형을 조사하여 풀이과정에서 오류를 ‘범하는지,’ ‘그렇지 않은지’를 판단하기는 어렵다는 것이다. 그러므로 판단의 근거가 되는 유형이나 문항 수를 고려하여야 한다는 것이다. 그리고 한 유형의 풀이과정에서 오류를 범하지 않는 학생이라도 다른 유형에서 오류를 범하고 있다는 것이다. 또한, 한 유형의 풀이과정에서 오류를 범하였던 학

생이라도 다른 유형에서는 오류를 범하지 않는 경우가 있다는 것이다.

3. 분석3

1차 조사의 유형A와 유형B 문항의 풀이과정을 평가한 것으로만 어떤 학생이 일차방정식의 풀이과정에서 올바른 표현을 할 수 있는지 판단하기에 어려움이 따른다는 것이다. 그러므로 2차 조사에서는 유형A와 유형B 문항을 1차 조사와 같은 문항으로 구성하고 유형C 문항을 추가하여 구성하였다. 유형C 문항의 구성에서는 유형A 문항과 동일한 문항을 사용하였다. 동일한 문항을 사용한 것은, 일차방정식을 해결 할 때 대입하거나, 반응을 하지 않은 학생들이 풀이과정에서 등호(=)를 올바르게 사용하는지 그렇지 않은지 판단하기에 어려움이 따르기 때문이다. 그리고 유형A와 유형B 문항의 풀이과정에서 올바른 표현을 하였더라도 다른 문항을 해결할 때 풀이과정에서 올바른 표현을 할 수 있다는 보장이 없기 때문이다. 이러한 이유에서 유형C 문항은 풀이과정을 제시하여 오류를 찾고 오류가 있는 부분을 올바르게 표현하도록 구성하였다.

유형C 문항에 대한 반응은 다음(<표 III-28>, <표 III-29>, <표 III-30>, <표 III-31>)과 같이 나타났다.

유형C의 문항에서 대칭 관계(등호)를 올바르게 제시한 학생들은 $x + 4 = 9$ 의 문항에서 10%, $4(x + 2) = 20$ 의 문항에서 4.6%, $3x + 2 = 17$ 의 문항에서 53.1%, $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 의 문항에서 29.2%, 로 나타났다(<표 III-28>, <표 III-29>, <표 III-30>, <표 III-31>). 반면 2차 조사에서 유형A에서 풀이과정에서 등식의 성질의 절차나 이항의 절차를 사용하여 방정식의 해를 올바르게 구한 학생들은 $x + 4 = 9$ 에서 72.3%, $3x + 2 = 17$ 에서 83%, $4(x + 2) = 20$ 에서 74.6%, $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에서 57.7%로 나타났다(<표 III-3>, <표 III-6> <표 III-8> <표 III-10>). 유형C의 반응의 결과와 유형A의 반응의 결과에서 차이점이 있는 것을 알 수 있다. 그 차이점은, 유형A에서는 문항 $x + 4 = 9$ 을 해결한 학생들이 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 을 해결한 학생들보다 유의하게 많이 나타났다(Fisher의 검정결과 p 값 = 0.001, <표 III-32>). 유형C에서, 문항 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 을 해결한 학생들이 $x + 4 = 9$ 을 해결한 학생들보다 유의하게 많이 나타났다(Fisher의 검정결과 p 값 = 0.000, <표 III-33>). 즉, 반대의 결과가 나타났다. 이러한 결과는 유형C의 문제 구성에서 $x + 4 = 9$ 은 풀이과정에 오류가 있고 방정식의 해는 올바르게 제시하였으며, $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 은 풀이과정과 계산 그리고 방정식의 해를 틀리게 제시한 결과라 볼 수 있다. 즉, 학생들이 일차방정식을 해결할 때 풀이과정보다는 방정식의 해에 집중하는 것으로 보여진다. 또한, 이러한 결과는 유형A와 유형B의 풀이과정만을 보고 그 학생이 일차방정식의 풀

이과정에서 오류를 ‘범하는지,’ ‘그렇지 않은지’를 판단하기에 어려움이 있지만 유형C의 문제를 도입 함으로써 그러한 문제점은 어느 정도 보완이 됨을 의미한다.

<표 III-28> $x + 4 = 9$ 에 대한 반응

반응 유형	풀이과정(이유 제시)	반응 기호	빈도	%	합계
오류 있음 (Y)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	Y-S	13	10	15 (11.6)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	Y-AS	1	0.8	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	Y-W	0	0	
	이유 제시하지 않음(NG)	Y-NG	1	0.8	
오류 없음 (W)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	N-S	2	1.5	115 (88.4)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	N-AS	0	0	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	N-W	2	1.5	
	이유 제시하지 않음(NG)	N-NG	111	85.4	
합 계			130	100	130(100)

<표 III-29> $3x + 2 = 17$ 에 대한 반응

반응 유형	풀이과정(이유 제시)	반응 기호	빈도	%	합계
오류 있음 (Y)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	Y-S	69	53.1	109 (83.9)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	Y-AS	25	19.2	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	Y-W	11	8.5	
	이유 제시하지 않음(NG)	Y-NG	4	3.1	
오류 없음 (W)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	N-S	0	0	21 (16.1)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	N-AS	9	6.9	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	N-W	0	0	
	이유 제시하지 않음(NG)	N-NG	12	9.2	
합 계			130	100	130(100)

<표 III-30> $4(x + 2) = 20$ 에 대한 반응

반응 유형	풀이과정(이유 제시)	반응 기호	빈도	%	합계
오류 있음 (Y)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	Y-S	6	4.6	8 (6.1)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	Y-AS	0	0	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	Y-W	2	1.5	
	이유 제시하지 않음(NG)	Y-NG	0	0	
오류 없음 (W)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	N-S	8	6.2	122 (93.9)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	N-AS	0	0	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	N-W	1	0.8	
	이유 제시하지 않음(NG)	N-NG	113	86.9	
합 계			130	100	130(100)

<표 III-31> $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에 대한 반응

반응 유형	풀이과정(이유 제시)	반응 기호	빈도	%	합계
오류 있음 (Y)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	Y-S	38	29.2	115 (88.4)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	Y-AS	39	30	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	Y-W	35	26.9	
	이유 제시하지 않음(NG)	Y-NG	3	2.3	
오류 없음 (W)	대칭 관계 올바르게 표현(S)	N-S	0	0	15 (11.6)
	대칭 관계 올바르게 표현하지 못함(AS)	N-AS	0	0	
	이유 제시한 것이 틀림(W)	N-W	1	0.8	
	이유 제시하지 않음(NG)	N-NG	14	10.8	
합 계			130	100	130(100)

<표 III-32> 유형A에서 $x + 4 = 9$ 와 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 의 카이제곱 검정

카이제곱 검정				
	값	자유도	점근 유의확률 (양측검정)	정확한 유의확률 (양측검정)
Pearson 카이제곱	12.138a	1	0	0.001
연속수정b	11.214	1	0.001	
우도비	12.357	1	0	0.001
Fisher의 정확한 검정				0.001
선형 대 선형결합	12.090c	1	0.001	0.001
유효 케이스 수	250			

<표 III-33> 유형C에서 $x + 4 = 9$ 와 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 의 카이제곱 검정

카이제곱 검정				
	값	자유도	점근 유의확률 (양측검정)	정확한 유의확률 (양측검정)
Pearson 카이제곱	15.245a	1	0.000	
연속수정b	14.05	1	0.000	
우도비	15.798	1	0.000	
Fisher의 정확한 검정				0.000
선형 대 선형결합	15.187	1	0.000	
유효 케이스 수	260			

2차 조사에서 유형A, 유형B 그리고 유형C 문항 중에서 하나의 문항이라도 일차방정식의 풀이과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현하지 못한 학생들을 제외한 결과의 몇 예는 <표 III-34>과 같다. 여기서의 분석은, 문제를 전혀 풀지 않았거나 대입을 하였거나 방정식의 해를 구하지 못하였거나 관계없이 풀이과정에서 등호(=) 관계를 올바르게 표현하였는지에 중점을 두었다.

1번 학생은 유형A에서 1번과 3번 문항은 해결하고 2번과 4번 문항은 해결하지 못하였다. 등식의

절차를 사용하여 해결하는 유형B의 문항에서는 전혀 반응이 없었다. 두 유형(유형A, 유형B)의 풀이과정의 결과만을 보고 이 학생이 등호(=)를 올바르게 사용을 할 수 있는지 없는지 판단하기는 어렵다. 유형C의 풀이과정의 결과를 보면, 문항2에서 제시한 풀이과정에 오류가 있음에도 오류가 없다는 반응을 보였으며 이 학생이 이유를 제시한 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못하는 것으로 나타났다. 이러한 분석 결과 1번 학생은 일차방정식의 풀이과정에서 등호를 올바르게 표현하지 못하는 것으로 판단 할 수 있다. 8번과 10번 학생은 유형A와 유형B 모두 잘 해결하였다. 그리고 유형C 문항도 잘 해결하였다. 이러한 분석의 결과에 따르면 두 학생은 일차방정식의 풀이과정을 올바르게 표현할 수 있다고 판단할 수 있다. 실제로 이 학생들이 다른 문항에서도 올바르게 해결하는지 면담한 결과 다른 문항도 잘 해결하는 것으로 나타났다. 다른 학생들도 이와 같은 방법으로 분석 가능하다.

<표 III-34> 2차 조사의 유형A, 유형B, 유형C에 대한 학생들 반응의 몇 예

번호	유형A				유형B				유형C			
	문항1	문항2	문항3	문항4	문항1	문항2	문항3	문항4	문항1	문항2	문항3	문항4
1	R-MS	W-T-S	R-T-S	N-O-O	N-O-O	N-O-O	N-O-O	N-O-O	YS	NAS	YS	YW
2	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	N-O-O	N-O-O	N-O-O	N-O-O	NNG	YS	NNG	YS
3	W-P-S	W-T-S	W-T-S	W-T-S	N-O-O	N-O-O	N-O-O	N-O-O	NNG	NAS	YS	NNG
4	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	R-P-S	R-T-S	W-MS	N-O-O	NNG	YS	NNG	YS
5	R-T-S	R-P-S	W-MS	R-MS	R-MS	W-MS	W-MS	N-O-O	NNG	YW	NNG	YNG
6	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	NNG	NNG	NNG	YW
7	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	NNG	YS	NNG	YW
8	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	YS	YS	YS	YS
9	R-T-S	R-T-S	R-T-S	W-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	NNG	YS	NNG	YS
10	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	R-P-S	R-T-S	R-P-S	R-P-S	YS	YS	YS	YS
11	R-T-S	R-P-S	R-P-S	R-P-S	R-MS	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	YAS	NNG	YAS
12	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-P-S	R-MS	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	YS	NNG	YAS
13	R-MS	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-MS	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	YAS	NNG	YW
14	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	NNG	NNG	YW
15	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	YS	YS	YS	YW
16	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	YAS	NNG	YAS
17	W-P-S	R-T-S	W-MS	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	YW	NNG	YW
18	R-T-S	R-T-S	R-T-S	W-MS	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	NNG	YS	NNG	YAS
19	R-T-S	R-T-S	R-T-S	R-T-S	W-MS	W-MS	W-MS	W-T-S	NNG	YS	NNG	YAS

IV. 요약 및 결론

본 논문에서는 유형A와 유형B의 문항에 대한 학생들의 반응을 조사하여 분석하였다. 그리고 시간이 지남에 따라 학생들의 반응이 어떻게 나타나는가를 알아보기 위하여 1차 조사를 하고, 5개월이 지난 후 2차 조사를 실시하여 분석하였다. 그리고 일차방정식의 풀이과정에서 등호(=)를 ‘올바르게 표현하는지,’ ‘그렇지 않은지’를 판단할 수 있는 평가도구를 마련하기 위하여 유형C 문항을 투입하여

조사를 실시하였다. 조사 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 유형A에서 1차 조사와 2차 조사간의 정답 비율을 조사하기 위하여 McNemar검정을 실시한 결과, 문항 $3x + 2 = 17$ 에서는 p 값 = .169^a, 문항 $4(x + 2) = 20$ 에서는 p 값 = .345^a로 나타나 1차 조사와 2차 조사간의 정답 비율의 차이가 없는 것으로 나타났다. 즉, 두 문항에서는 5개월이 지난 후에 정답을 구한 학생 수에 약간의 차이가 있었지만 의미가 있는 차이라 볼 수 없다는 것이다.

유형A의 문항 $x + 4 = 9$ 에서는 McNemar검정의 p 값이 .035^a, 문항 $x + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 에서는 McNemar검정의 p 값이 .012^a로 나타나 1차 조사와 2차 조사간의 정답 비율의 차이가 있는 것으로 나타났다. 이러한 결과는, 두 문항에서 5개월 전에 정답을 구한 학생 수 보다는 5개월이 지난 후에 정답을 구한 학생들이 많이 나타났다는 것을 의미한다. 이러한 결과는 1차 조사에서 정답을 구하지 못하였던 학생들이 2차 조사에서 정답을 구하였기 때문에 나온 결과로 보기에 어렵다는 것이다. 1차 조사에서 문제를 해결한 학생들이 2차 조사에서 문제를 해결하지 못한 학생들이 있었으며, 1차 조사에서 해결하지 못한 학생이 2차 조사에서 해결한 학생들이 있었기 때문이다.

둘째, 유형B는 등식의 절차를 사용하여 해결하는 문항으로 구성되었다. 1차 조사에서 등식의 성질의 절차를 사용하여 풀이과정을 올바르게 제시하고 정답을 구한 학생 수와 2차 조사에서 등식의 성질의 절차를 사용하여 풀이과정을 올바르게 제시하고 정답을 구한 학생 수 간의 빈도 비율을 조사하기 위하여 McNemar검정을 실시한 결과, 문항 $x + 3 = 8$ 에서 p 값 = .012^a, 문항 $5(x + 2) = 20$ 에서 p 값 = .035^a으로 나타났다. 즉, 두 문항에서는 5개월 전에 등식의 절차에 따라 정답을 구한 학생 수 보다는 5개월이 지난 후에 많이 나타났다는 것이다. 그러나 5개월 전에 해결하였던 학생들이 5개월이 지난 후에 등식의 절차를 사용하는 과정에서 등호(=)를 잘못 표현하는 학생들이 있었으므로 5개월 전에 해결하였던 학생들이 5개월 후에 해결하였다는 것을 의미하는 것은 아니다.

유형B의 문항 $3x + 4 = 17$ 에서 McNemar검정의 p 값이 .081^a, 문항 $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ 에서 McNemar검정의 p 값이 1.00^a으로 나타나 두 문항에서는 1차 조사와 2차 조사 간의 정답 빈도 비율의 차이가 없는 것으로 나타났다. 이 결과는 풀이과정을 올바르게 해결한 학생들의 수에 변화가 없다는 것이지, 5개월 전에 등식의 절차를 사용하여 풀이과정을 올바르게 해결한 학생이 5개월 후에 ‘잘 해결하였거나’, ‘해결하지 못하였거나’를 뜻하는 것은 아니다.

셋째, 유형A와 유형B에서 정답과는 관계없이 풀이과정에서 등호(=)를 ‘올바르게 표현하였는지’, ‘그렇지 않은지’에 중점을 두어 분석한 결과는 다음과 같다.

1차 조사에서 유형A의 4문항 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 40명으로 나타났다. 이들 중 2차 조사에서 한 문항이라도 올바르게 해결한 학생이 27명(67.5%)이었다. 그리고 1차 조사에서 유형A의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생은 90명으로 나타났다. 이들 중 2차

조사에서 한 문항이라도 올바르게 해결하지 못한 학생이 33명(36.7%)나타났다.

1차 조사에서 유형B의 4문항 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 41명으로 나타났다. 이들 중 2차 조사에서 한 문항이라도 올바르게 해결한 학생이 28명(63.8%)이었다. 그리고 1차 조사에서 유형B의 4문항 모두 등호를 올바르게 표현한 학생은 89명으로 나타났다. 이들 중 2차 조사에서 한 문항이라도 올바르게 해결하지 못한 학생이 26명(29.2%)나타났다.

유형A와 유형B의 결과는 1) 5개월 전에 해결하지 못한 학생들이 5개월 후에 해결 하였거나, 5개월 전에 해결한 학생들이 5개월 후에 해결하지 못한 학생들이 있다는 것이다. 2) 시간이 흘러 풀이과정을 잊어버려서 오류가 발생하였다. 3) 풀이과정을 관계적으로 이해하지 못한 결과이다. 등 여러 가지로 해석될 수 있지만, 결론적으로는 학생들이 일차방정식의 풀이과정의 표현에 대한 이해가 부족한 것으로 볼 수 있으므로 일차방정식을 학습한 직후나 시간이 지난 후에 풀이과정에 대한 점검과 교정이 꼭 이루어져야 함을 시사한다.

넷째, 유형A와 유형B의 풀이과정에서 등호 표현에 대한 오류를 분석한 결과, 1차 조사와 2차 조사에서 유형A와 유형B의 8문항 중 한 문항이라도 등호를 올바르게 표현하지 못한 학생은 65명으로 나타났다. 이것은 유형이 많아질수록 또는 문항이 많아질수록 풀이과정에서의 오류 빈도(학생 수)가 많이 나타난다는 것을 의미하므로 몇 가지 유형을 조사하여 풀이과정에서 등호를 ‘잘 표현하는지’, ‘그렇지 않은지’ 판단하기는 어렵다는 것이다. 그러므로 논문에서는 유형C를 평가하여 유형A와 유형B의 결과를 종합하여 평가할 경우 어떠한 결과가 나오는지 조사하였다. 그 결과, 세 유형(유형A, 유형B, 유형C)의 분석의 결과는, 어떤 학생이 일차방정식의 풀이과정에서 등호를 올바르게 ‘표현하는지’, ‘그렇지 않은지’를 판단할 수 있다는 것이다. 100%의 판단이 가능하다는 것이 아니라 최소한의 문항과 최소한의 시간과 노력으로 최대의 효과를 고려할 때 하나의 좋은 평가도구라는 것이다.

학교 현장에서 수학교사가 담당하는 학생 모두를 개별적으로 면담하여 수학 학습 정도를 파악하는 것이 정확하고, 학생들의 수학 학습에 도움을 주는 최선의 방법일 것이다. 그러나 수학 내용 전체를 학생 개개인 마다 면담을 통해 수학 학습 상황을 판단하기란 매우 어려운 실정이다. 이러한 점을 고려할 때, 주어진 상황에서 최선의 방법을 찾아 학생들의 학습에 도움을 줄 수 있도록 하는 것도 수학교육에서 할 일 중 하나일 것이다.

참 고 문 헌

- 기정순·정영옥 (2008). 등호 문맥에 따른 초등학생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구. 대한수학교육학회 <학교수학>, 10(4), pp.537-555.
- 김차숙 (2003). 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류 분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 도종훈·최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>,

42(5), pp.676-706.

- 유영주 (2007). 중학교 1학년 학생들의 등호 이해에 관한 사례연구. 서울대학교 석사학위논문.
- 이종희 · 김선희 (2003). 등호 개념의 분석 및 학생들의 등호 이해 조사, 대한수학교육학회 <수학교육학연구>, **13(3)**, pp.287-307.
- 장연정 (2008). 등가, 상등, 동치의 분류에 의한 등호 개념 지도연구: 고등학교 1학년을 대상으로. 고려대학교 석사학위논문.
- 최용우 (2007). '일차방정식' 문제 해결 과정에서 발생하는 오류분석 연구: 중학교1학년을 대상으로. 강원대학교 석사학위논문.
- 서종진 (2009). 일차방정식에서 변수의 위치에 따른 반응 유형에 관한 연구: 중학교 1학년과 3학년을 중심으로. 한국학교수학회논문집, **12(3)**, pp.267-289.
- Chalouh, L., & Herscovics, N. (1992). Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way(The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics): In B. Moses(ed), Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications (Paperback), *National Council of Teachers of Mathematics(1999)*, pp.168-174.
- Herscovics, N., & Kieran, C. (1980).Constructing Meaning for the Concept of Equation, Mathematics Teacher: In B. Moses(ed), Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications (Paperback), *National Council of Teachers of Mathematics(1999)*, pp.181-188.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra, *Educational Studies in Mathematics*, **27(1)**, pp.59-78 .
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknown in the Context of Equations, *Educational Studies in Mathematics*, **30(1)**, pp.39-65.
- Seo, J. J., & Kim, T.(2010). The Study on "Reaction Classification Tables" and Database to aid the Learning of Mathematics. *Advan. Stud. Contemp. Math* **20(2)**, April.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol, *Educational Studies in Mathematics*, **12(3)**, pp.317-26.
- Kieran, C. (1984). A comparison between novice and more-expert algebra students on tasks dealing with the equivalence of equations. In J.M. Moser(Ed.), *Proceedings of the Sixth Annual Meeting of PME-NA(83-91)*. Madison: University of Wisconsin.
- Kieran. C. (1992). The learning and teaching of school Algebra(Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning): In B. Moses(ed), Algebraic Thinking, Grades K-12:

- Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications (Paperback), *National Council of Teachers of Mathematics(1999)*, pp.341-361.
- Mevarech, Z. R., & Yitschak, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. In R Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*(pp.313-318). Rehovot, Israel:Weizmann Institute of Science.
- Richard, D., & Lodholz (1990). The Transition from Arithmetic to Algebra(Algebra for Everyone): In B. Moses(ed), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications* (Paperback), *National Council of Teachers of Mathematics(1999)*, pp.168-174.
- Wagner. S., & Kieran. C. (1989). An Agenda for Research on the learning and teaching of Algebra(Research issues in the Learning and Teaching of Algebra): In B. Moses(ed), *Algebraic Thinking, Grades K-12: Reading from Nctm's School-Based Journals and Other Publications* (Paperback), *National Council of Teachers of Mathematics(1999)*

Change in Solving Process According to Problem Type

- Centered on Reaction toward Linear Equations of Seventh Grade Students -

J. J. Seo

Dept. of Math., Hannam Univ., 133 Ojung-dong Daedek-gu, Daejeon 306-791, Korea

E-mail : jjseo@hnu.kr

The results of performing first survey after learning linear equation and second survey after 5 months to find out whether there is change in solving process while seventh grade students solve linear equations are as follows. First, as a result of performing McNemar Test in order to find out the correct answer ratio between first survey and second survey, it was shown as $p=.035^a$ in problem $x+4=9$ and $p=.012^a$ in problem $x+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$ of problem type A while being shown as $p=.012^a$ in problem $x+3=8$ and $p=.035^a$ in problem $5(x+2)=20$ of problem type B. Second, while there were students not making errors in the second survey among students who made errors in the solving process of problem type A and B, students making errors in the second survey among the students who expressed the solving process correctly in the first survey were shown. Third, while there were students expressing the solving process of linear equation correctly for all problems (type A, type B and type C), there were students expressing several problems correctly and unable to do so for several problems.

In conclusion, even if a student has expressed the solving process correctly on all problems, it would be difficult to foresee that the student is able to express properly in the solving process when another problem is given. According to the result of analyzing the reaction of students toward three problem types (type A, type B and type C), it is possible to determine whether a certain student is 'able' or 'unable' to express the solving process of linear equation by analyzing the problem solving process.

* ZDM Classification: D73

* 2000 Mathematics Subject Classification: 97D70

* Key Words : Solving process of linear equation, equal sign, symmetry, error

* This paper has been supported by the 2010 Hannam University Research Fund.