

## 중학생의 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호 요인 분석

박 귀 희 (서울대학교 대학원)

윤 현 경 (서울대학교 대학원)

조 지 영 (서울대학교 대학원)

정 재 훈 (서울대학교 대학원)

권 오 남 (서울대학교)<sup>1)</sup>

본 연구는 중학생을 대상으로 학생들이 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호를 결정할 때 영향을 미치는 요인을 분석하였다. 47명의 중학생에게 설문지를 통하여 자료를 수집하고 응답들을 분석한 결과, 경험적 증명과 연역적 증명의 선호에 영향을 미치는 요인들로 추정, 수학적 원리, 다양한 예를 통한 검증 과정에 대한 인식들이 공통적으로 나타났다. 이 요소들은 경험적 증명과 연역적 증명의 선호와 비선호를 결정짓는 요인으로써, 선호하는 증명에 따라 상호 배타적으로 나타나지 않고 증명 선호에 영향을 미쳤다. 이를 통해 본 연구에서는 학생들이 특정 증명을 선호할 때, 한 증명에 대한 비선호와 다른 증명에 대한 선호가 동시에 작용할 수 있다는 결론과 함께 한 증명에 대한 선호요인을 보는 것만으로는 학생들의 증명 선호 이유를 정확히 파악할 수 없을 것이라는 가능성을 제언한다.

### I. 서론

증명은 수학적 사고의 근간을 이루는 추론과 정당화를 보여주는 대표적인 사고 활동인 바, 학교 수학에서도 증명 교육은 지속적으로 강조되고 있다. 뿐만 아니라 증명은 학생들의 수학적 이해를 촉진시키는 중요한 역할을 하는 것으로 알려져 있다(Hanna, 2000). 미국수학교사연구회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM])에서는 1989년에 발표한 학년별 교육과정 기준 중 세 번째로 ‘수학적으로 추론하기’를 제시하고 전체 교육과정을 통해 학생의 발달 수준에 맞는 추론하기를 제안하였고, 이어서 2000년에는 추론으로부터 증명이 독자적인 기준으로 제안되면서 중등학교에서 증명의 역할을 더욱더 확대, 강조하고 있다.

우리나라의 2007년 개정 교육과정에서는 귀납적 추론이나 유추적 사고 활동을 통해 학생 스스로 지식을 생산해내고, 스스로 생산해 낸 수학적 지식을 논리적 추론이나 연역적 증명을 통해 정당화하

\* 접수일(2010년 3월 18일), 심사(수정)일(2010년 3월 29일), 게재확정일자(2010년 4월 7일)

\* ZDM 분류 : C23

\* MSC 2000분류 : 97C20

\* 주제어 : 연역적 증명, 경험적 증명, 선호도

1) 교신저자

는 경험을 쌓을 수 있게 지도하도록 언급하고 있다. 이러한 교육 과정의 내용은 Van Hiele의 기하 사고 수준에서 말하는 바와 같이, 기하 사고 발달의 최종 단계가 연역적 증명 단계로의 전이임을 시사한다. 실제로 추측을 개별적인 몇 가지 예나 특정 경우에 한하여 확인하고 평가하는 것을 경험적 증명이라 하고, 명제들의 논리적 결합 등을 통하여 수학적 정당화를 이루어내는 것을 연역적 증명이라 정의한다면(Balacheff, 1988) 우리 나라의 중학교 기하 학습은 경험적 증명과 연역적 증명이 동시에 출현하다가 논증 기하를 통해 연역적 증명을 본격적으로 학습하게 되는 시기로 증명에서의 변화가 가장 두드러지게 나타나는 시기가 된다. 그리고 이는 학생들이 이후 고등 수학을 구성하는 연역적 증명으로의 이해에 발판을 만드는 단계라고 볼 수 있다.

그러나 많은 학생들은 의도된 교육과정과는 달리 수학적 문제에 직면했을 때, 몇 가지 예에 대한 실험이나 추정에 의하여 결과를 확인하는 것을 정당화의 수단으로 받아들이고 있으며 논리적인 증명보다 경험적 증명을 더 선호하는 경향을 보이는 것으로 나타났다(Martin & Harel, 1989; Porteous, 1991; 서동엽, 1999). 몇몇 연구들은 이런 선호도를 알아보는 것에만 그치는 것이 아니라 학생들의 경험적 증명과 연역적 증명을 선호하는 원인에 대해 밝히고자 하는 것들도 있었다(Chazan, 1993; Martin & McCrone, 2009). 하지만 이 연구들 대부분은 깊이 있는 설명 없이 선호 원인들만을 나열한 것에 지나지 않아, 학생들이 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호를 결정할 때 영향을 미치는 요인들에 대한 심도 있는 분석은 이루어지지 않고 있다.

이에 본 연구는 학생들이 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호를 결정할 때 영향을 미치는 요인들을 무엇인지를 알아보고자 한다. 이를 위하여 중학생들을 대상으로 경험적 증명과 연역적 증명 중에서 선호하는 증명과 선호의 이유를 묻는 설문 문항을 통해 학생들이 두 증명 각각에 대해서 선호하는 증명을 결정하게 되는 요인이 무엇인지를 분석함으로써 궁극적으로는 그 요인들 사이의 관계를 탐구한다.

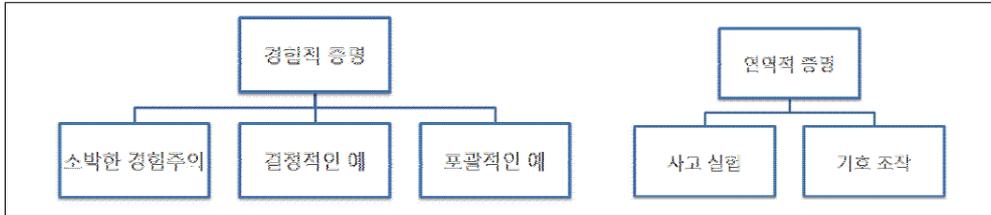
## II. 증명의 분류와 학생들의 증명 선호

### 1. 증명의 분류

수학자들이 수학적 문제를 해결하는 증명방법은 여러 가지가 있다. 그러나 학교수학에서 학생들이 실제로 문제해결에서 사용하는 증명의 종류는 그것에 비해 적은 편이다. 이를 알아보기 위해서 학생들에 의해 산출된 증명들을 종류별로 분류하려는 연구가 이루어졌다(Bell, 1976; Balacheff, 1988; Harel & Sowder, 1998).

많은 연구들은 학생들의 증명을 크게 경험적 증명과 연역적 증명으로 분류한다. 넓은 의미로 경험적 증명과 연역적 증명은 Bell(1976)이 사용한 “경험적 정당화”와 “연역적 정당화”에 각각 대응하는 개념이며, Balacheff(1988)의 “실체적 정당화”와 “개념적 정당화”도 각각 경험적 증명과 연역적 증명

을 일컫는다(Harel & Sowder, 2007). Balacheff(1988)는 학생들이 사용하는 증명 방식을 경험적 증명과 연역적 증명으로 나눈 후 아래 세부 영역에 대해 다음 <그림 II-1>과 같이 구조적으로 분류하였다.



<그림 II-1> Balacheff(1988)의 증명 분류

그는 경험적 증명에 대하여 소박한 경험주의(naive empiricism), 결정적인 예(crucial experiment), 포괄적인 예(generic example) 세 종류로 세분화 하였다. 소박한 경험주의는 단순한 몇 가지 경우에 한하여 추측을 확인하는 것이고, 결정적인 예는 소박한 경험주의와 달리 좀 더 다양한 경우의 예를 확인하거나 기준에 의해 예를 선별하여 확인하는 것이며 포괄적인 예는 특수하게 분석된 예나 구조적인 내용을 보여줄 수 있는 예를 통하여 추측을 확인하는 것을 의미한다.

여기서 소박한 경험주의는 소수의 평범한 사례로부터 결론을 추측하는 것으로 증명의 일반화 가능성에 대한 고려가 거의 이루어지지 않으며, 포괄적인 예의 경우 Balacheff의 분류에서는 경험적 증명에 속하지만, 문제를 분석적으로 보고 구조 등을 파악한다는 점에서 Harel & Sowder (2007)의 분류에서는 연역적 증명 스키마로 분류하고 있어 학자들마다 분류에 서로 이견이 있는 증명법이다. 반면 결정적인 예의 경우에는 어떤 기준 등에 의하여 예가 선정되고 확인됨으로써 소박한 경험주의보다는 일반화 가능성을 인식하고 있으나 연역적 증명으로서의 완전성에는 도달하지 못할 것이라는 데에서 경험적 증명의 특성을 가장 잘 드러내는 것이라고 볼 수가 있다.

한편 연역적 증명은 사고 실험(thought experiment)과 기호 조작(symbolic calculation) 두 종류로 세분화된다. 여기서 사고 실험은 학생들이 예를 정보를 얻는 용도나 증명을 쓰기 위한 힌트로써 사용하는 것을 말하고, 기호 조작은 오직 기호의 변환만을 기초로 한 증명을 말한다.

이후 Harel과 Sowder는 수학 전공 대학생을 주 연구대상으로 하여 증명 스키마 체계를 고안하였는데 이는 Balacheff의 분류에 비하여 더 세부적인 하위영역을 많이 포함한 증명 분류였다. 더 상세화한 연구 결과임에도 Harel과 Sowder의 증명 분류 역시 경험적 증명과 연역적 증명을 나누어 구조화한다는 것에서는 위의 증명 분류와 공통점을 가지고 있음을 알 수 있다.

본 연구는 중학생을 대상으로 하기 때문에 대학생을 대상으로 하여 이루어진 Harel과 Sowder의 증명 분류보다는 증명 분류의 대표성을 지니면서 동시에 경험적 증명과 연역적 증명의 하위 영역에 대해 비교적 자세히 설명하고 있는 Balacheff 증명 분류를 기반으로 본 연구 설문지를 구성하였다.

## 2. 학생들의 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호

경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호도 조사 연구는 학생을 연구 대상으로 하기보다는 예비교사나 현직교사로 하고 있는 경우가 많았으며(Knuth, 2002; Stylianides, 2009), 두 증명의 선호도만을 중심으로 한 연구는 많지 않고 대체로 여러 연구문제 중 하나이거나 연구 분석 결과 선호도에 대한 부분이 밝혀지는 경우가 많았다. 이들 가운데 학생들의 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호도에 대하여 선호 비율을 구체적으로 언급한 연구는 다음과 같다.

Porteous(1990)는 11-16세의 영국 학생 약 300명에게 설문지로 묻고 50명은 면담을 했다. 설문지로부터, 그는 대답들 중 40%보다도 많은 학생들이 오직 여러 가지의 예에 기반 한 일반화를 전적으로 지지하였으며, 오직 10% 정도만이 그들의 결정을 설명하라고 했을 때 그들 자신의 결정에 대한 연역적이든 그렇지 않든 자기 나름대로의 증명을 제시하였다. 또한, Williams(1979)는 수학적성이 좋은 11학년 캐나다 학생들 대상으로 조사하였는데, 대상자의 68%가 경험적 논증(empirical argument)을 충분한 “증명”이라고 믿었으며 오직 6.4%만이 연역적 증명의 필요성을 느꼈다. 좀 더 학생들과 친숙한 내용으로 작성된 다른 문항에 대해서는 54%가 경험적 논증을 받아들였고, 오직 14%만이 연역적 증명을 원하였다.

한편, 경험적 증명이나 연역적 증명에 대해 학생들이 가진 인식들을 선호와 관련하여 분석한 연구들도 있었다. Chazan(1993)의 경우 “증거가 증명이다(evidence is proof)”(p.360)이라고 생각하는 학생들은 연역적 증명을 쓰는 것과 같이 경험적 증거도 무한히 많은 경우를 가지는 대상에서도 적용가능하며 확실하게 결론까지 도달할 수 있는 방법의 하나라고 주장 한다. 서동엽(1999)의 연구도 이와 비슷하게, 많은 학생들이 몇 가지 예에 대한 실험이나 측정에 의하여 결과를 확인하는 것을 정당화의 수단으로 받아들이고 있으며 논리적인 증명보다 이를 더 선호하는 경향을 보인다고 밝히고 있다.

Chazan(1993)은 선호도를 연구문제를 삼고 있지는 않았지만 연구 결과 중 일부 두 증명에 대한 학생 선호를 결정하는 요인들에 대해 언급한 부분이 있었다. 우선 학생들에게 경험적 증명과 연역적 증명을 비교, 대조하게 한 후 각 증명의 긍정적인 면과 부정적인 면을 면담을 통해 질문하였는데, 그 결과 학생들은 측정의 친숙함, 측정 자료 값 수집의 용이, 경우들의 범위를 고려해 볼 때 측정의 비효율성, 측정의 비정확성, 인지적으로 이해하기 쉬운 방법으로써 측정, 그리고 연역적 증명들의 단계별 제시의 명료성, 이런 단계별 제시 유형 이해의 어려움 등을 대답하였다고 나열하였을 뿐 각 요인들에 대한 분석들은 이루어지지 않았다. 다른 선호도 분석 연구(Martin & McCrone, 2009)도 Chazan(1993)의 경우와 비슷하게 요인들을 간단하게 언급하고 있을 뿐 선호를 결정하는 요인들을 깊이 있게 분석하고 있지는 않고 있다. 하지만 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호를 결정하는 요인들을 심도 있게 분석을 하는 것은 학생들의 증명 이해에 대한 배경을 알 수 있게 하며, 교사는 이를 바탕으로 학생들의 증명 능력을 신장시키기 위한 교수의 기초자료로서 활용할 수 있기 때문에 그 중요도가 크다.

### III. 연구방법

본 연구에서는 설문지를 통하여 자료를 수집하였다. 예비 설문을 통해 학생들이 평가 문항에 응답하는데 소요되는 시간의 적절성, 문항에 사용된 어휘수준의 적절성, 응답 등을 알아보면서 설문 문항을 수정·보완하여 본 설문을 실시하였다.

예비 설문은 2회 실시 하였는데, 1차는 2학년의 수학수준별 이동수업에서 최상위반 학생 30명(남학생 17명, 여학생 13명)을 대상으로 2009년 11월 30일 수학 시간을 이용하여 실시되었으며, 2차는 3학년 학생 중 수학성적이 상, 중, 하에 해당되는 학생을 각각 3명을 대상으로 12월 14일 방과 후 시간을 이용하여 실시하였다. 예비 설문 도중 학생들이 뜻의 의미에 대해 이해가 잘 되지 않아 질문한 어휘에 대해서는 쉬운 어휘로 대체하여 수정 및 보완하였다. 예비 설문을 통해 수정·보완하여 작성한 본 검사 문항을 연구 대상으로 표집 된 학생 47명에게 실시하였다.

본 설문은 중학교 전 학년을 대상으로 도형 단원과 관련된 설문이 이루어지는 만큼 학생들이 학년 진도를 거의 끝낼 무렵인 12월 말에 실시하였다. 또한 설문지 작성에 대한 시간제한은 두지 않았지만, 학생들은 보통 30분 내에 제시된 글을 읽고 응답을 작성하였다.

#### 1. 연구 참여자

본 연구는 경기도 한 중소도시에 소재한 중학교의 학생 1, 2, 3학년 학생들 중 47명(남학생 24명, 여학생 23명)을 대상으로 경험적 증명과 연역적 증명 중 선호하는 증명과 그 이유를 적을 수 있도록 제작된 설문 조사를 실시하였다.

중학교 1학년 학생들은 논증 기하를 배우기 전이므로 경험적 증명에 익숙한 학생들로 적합하다고 판단하여 이들 가운데 설문 문항을 읽고 자신의 생각을 잘 표현할 수 있다고 생각되는 학업 성취도가 상위 30%인 학생 34명을 대상으로 하였다.

한편, 연역적 증명으로의 전이가 이루어졌다고 볼 수 있는 학생들로 논증 기하 수업을 들은 수학 학업 성취도 5% 이내의 2, 3학년 학생들 13명을 연구 대상으로 선정하였다. 이 학생들은 우리나라 중학생의 기하적 사고 수준에 관한 선행 연구의 결과(김미정, 1994)를 토대로 볼 때, Van Hiele(1986) 기하수준을 제 0수준에서 4수준으로 파악할 때 제 3수준에 속하는 것으로 간주될 수 있을 것이다. Van Hiele 기하수준이론에 따르면, 제 3수준에 속하는 학생들은 명제들 사이의 논리적 관계를 통하여 정리, 증명의 의미와 역할을 이해할 수 있으며, 기하학적인 사고 수단으로서의 연역의 의미를 이해하고 연역적 사고를 할 수 있다. 따라서 이 학생들은 연역적 증명으로의 전이가 이루어졌을 것으로 가정하였다.

이러한 연구 참여자 설정의 타당성을 확인하고자 일차적으로 학생들의 응답을 각 증명의 선호에 따라 분류한 결과는 다음의 <표 III-1>과 같다.

&lt;표 III-1&gt; 학생들이 선호하는 증명의 분포

선호하는 증명의 유형	빈도 수(백분율)		
	1학년	2,3학년	계
경험적 증명	18(52.9%)	3(23.1%)	21(44.7%)
연역적 증명	14(41.2%)	10(76.9%)	24(51.1%)
둘 다	2(5.9%)	0	2(4.2%)
전체	34(100%)	13(100%)	47(100%)

이 분포 결과는 경험적 증명을 선호하는 학생들과 연역적 증명을 선호하는 학생들이 골고루 연구 참여자들을 구성하고 있음을 보여주고 있다.

## 2. 설문지

설문지는 “삼각형의 내각의 합은 180도이다.”라는 명제에 대하여 가상의 두 학생인 “현진”, “준원”을 통해 각각 경험적 증명과 연역적 증명을 제시하였다. 연구 참여자들은 이를 읽고 선호하는 증명을 선택하고 그 선택의 이유를 서술하였다. 본 연구는 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 학생들의 선호에 공통적으로 영향을 끼칠 수 있는 요인을 탐색하고자 하였다. 따라서 학생들이 증명 자체를 구성토록 하는 대신 완성된 증명을 이해하고 선택하는데 초점을 둔 문항을 제작하였다. 사용된 설문지는 부록으로 첨부되어 있다.

본 연구는 중 1-중 3 학생들을 대상으로 하기에 연구 대상자들이 어려움 없이 이해할 수 있어야 하고 동시에 설문지에서 사용되는 명제는 경험적 증명과 연역적 증명 모두로 제시 가능한 명제여야 했다. 이를 위하여 교육과정의 기하 부분에서 등장하는 “삼각형의 내각의 합은 180도이다.”라는 명제를 채택하였다. 이 명제는 초등학교 4학년 1학기과 중학교 수학 1학년 2학기에 모두 등장하는데, 각 수준에서는 서로 다른 방식, 즉 초등학교에서는 경험적 증명으로, 중학교에서는 연역적 증명으로 설명되기에 연구 참여자인 중학교 1-3학년 학생들에게 두 증명 방식의 제시가 가능하고 이해가 수월할 것으로 판단되었다. 또한, 명제의 참에 대하여 의심하지는 않지만 왜 참인지에 대한 것은 이해가 다를 수가 있어 제시되는 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 다양한 선호 이유를 학생들이 응답할 것으로 예상하였다.

설문지에서는 “삼각형의 내각의 합은 180도이다.”라는 명제에 대하여 “현진”과 “준원”이라는 가상의 두 학생이 각각 경험적 증명과 연역적 증명의 다른 방법을 제시하고 있다.

“현진”이의 증명은 교과과정에서 임의의 한 삼각형에 대한 측정을 이용한 증명을 보여준 것과는 달리 크게 예각, 둔각, 직각 삼각형의 세 종류의 삼각형을 통한 측정을 하는 과정을 보여주는 “결정적인 예를 이용한 경험적 증명”(Balacheff, 1988)이 되도록 변형하여 제시하였다. 이는 앞서 증명의

분류에서 언급한 바와 같이 증명의 일반성에 큰 차이가 나는 “소박한 경험주의”나 연역적 증명의 사고과정과 원리가 반영되는 “포괄적인 예”보다 경험적 증명으로서의 특징이 가장 뚜렷하게 나타나도록 한 것이다.

“준원”이의 증명은 이미 참이라고 알고 있는 수학적 성질을 전제로 하여 이로부터 논리적이고 형식적인 증명, 즉, 수학자들에게 수학적인 증명으로 받아들여지는 증명으로서, 연역적 증명으로 분류된다(Balacheff, 1988). 이는 현재 중학교 교과서에 제시된 “삼각형의 내각의 합은 180도이다.”라는 명제에 대한 증명이 본 연구에서 제시하고자 한 연역적 증명으로서 문제가 없다고 판단되어 그대로 사용하였다.

### 3. 자료 분석

학생들의 응답들은 경험적 증명과 연역적 증명의 선호와 그 이유를 보고 질적으로 분석되었다. 우선 선호하는 증명으로 선택한 경험적 증명과 연역적 증명에 따른 분류를 기본으로 하여, 각 증명에 대한 선호에 영향을 끼치는 요인을 분석하였다. 각 요인들이 어떤 특성에 대한 것을 언급하는지를 파악하고 그 특성에 따라 증명의 선호 요인을 일차적으로 분류하였다. 경험적 증명을 선호한 응답에서는 ‘이해의 용이성’과 ‘신뢰성’으로 2가지 특성이 발견되었으며, 연역적 증명을 선호한 응답에서는 ‘추정에 대한 부정적 인식’, ‘신뢰성’, ‘유용성’, ‘다양한 예를 통한 검증 과정에 대한 부정적 인식’, ‘원리의 유무’, ‘연역적 증명에 대한 이미지’로 6가지의 특성을 발견하였다. 또한, 그 특성에 대한 진술을 세부적으로 분석하여 코드를 작성한 결과, 경험적 증명에서는 총 3개의 코드를, 연역적 증명에서는 9개의 코드를 생성할 수 있었다.

생성된 코드를 토대로 학생들의 응답을 코딩하는 과정에서, 학생들의 응답 중 선호가 선택되지 않거나 선호의 이유가 기술되어 있지 않은 5명은 코딩 작업에서 제외하였다. 그리고 학생들이 제시한 증명 선호의 요인에 여러 가지 코드들이 혼합되어 존재하는 경우에는 기술된 것 모두를 코딩하도록 하였다. 아래 <그림 III-1>은 여러 가지 코드들을 동시에 갖고 있는 한 학생의 응답이다.

선택: 준원이.  
 이유: 쓸데없는 논증 하지 않아도 된다. 현상은 각기, 기위 등  
 준비물이 필요하면, 준원은 연필 하나면 된다.  
 그리고 현상의 방법은 삼각형의 내각의 합이 180°인 이유를  
 알 수 없지만 준원이 경우에는 원리를 알았다.

<그림 III-1> 여러 가지 코드들을 동시에 갖고 있는 학생의 응답

이 학생의 응답은 ‘추정에 대한 부정적 인식’의 특성을 갖고 있으며, 세부적인 내용으로 준비물이 필요하다는 점에서 ‘추정 과정이 번거롭다’는 코드로 코딩되었다. - 이 코드에 대한 자세한 내용은 결과에 기술되어 있다. - 또한 이 응답은 ‘연역적 증명에는 원리가 있다’는 코드로도 코딩되었다.

## IV. 결과

### 1. 경험적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인

#### 가. 이해의 용이성

많은 학생들이 경험적 증명이 이해하기 쉽다는 것을 측정과 수학적 원리의 두 가지의 요인을 들어 설명하였다.

먼저, 다수의 학생들이 측정의 결과는 눈으로 보고 이해할 수가 있어 쉽다는 응답을 하였다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

이유 : 이것을 참이라 받아들일 때 눈으로 직접 보았었고 증명 이해하기 쉽고 세각을 잘라서 붙일 때 마스 각도기와 같이 180°가 나와서 증명 이해하기 쉽다.

<그림 IV-1> 경험적 증명의 이해의 용이성을 언급한 학생의 응답

<그림 IV-1> 학생은 “눈으로 직접 볼 수 있고”와 “세 내각을 잘라서 붙인 것이 딱 각도기와 같이 180°가 나와서”라는 이유로 이해하기 쉽다는 것을 설명하고 있다. 이것은 학생들이 눈으로 보는 것에 대한 이해가 쉽다고 생각하는 것을 보여준과 동시에 설문지에 제시된 경험적 증명 과정의 측정 결과를 신뢰하며, 측정에서 나타날 수 있는 오류가능성에 대하여서는 인식하지 못한다는 것을 보여주는 것이다.

다음으로, 다수의 학생들이 수학적 원리가 있는 증명은 이해하기가 어렵다는 응답을 하였다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

이유 : 동위각, 엇각을 이용해서 어렵게 증명하는 것보다 증명의 과정이 더 간단하고 이해하기 쉬운 것이다. 삼각형 내각의 합이 180°라는 것은

<그림 IV-2> 연역적 증명의 이해의 어려움을 지적한 학생의 응답

<그림 IV-2>의 학생의 경우에는 “동위각, 엇각을 이용해서 어렵게 증명하는 것”이라고 설명하고 있는데 이는 수학적 원리가 포함되어 있는 증명에 대해 어렵다는 인식을 가지고 있다는 것을 보여준다. 이것은 학생들이 증명의 엄밀성이나 내용의 타당성을 따지기 이전에 수학적 원리의 존재 자체만으로도 어렵다는 인식을 가지고 증명의 선호를 결정하기도 한다는 것을 보여준다.

이러한 이해의 용이성에 대한 학생들의 응답에서 주목할 점은 측정과 수학적 원리에 대한 설명이 동시에 이루어진 경우가 많았다는 것이다. 다시 말해, 학생들은 수학적 원리의 존재로 인하여 연역적 증명에 대한 비선호를 표명하면서 동시에 측정이 눈으로 보고 이해하여 쉽다는 이유를 들어 경험적

증명을 선호하였다.

나. 다양한 예를 통한 검증 과정에 대한 신뢰

설문지의 경험적 증명에서 제시된 삼각형의 분류와 측정을 통한 확인을 신뢰하고 있는 응답들이 나타났다. 이러한 학생들의 경우에는 제시된 분류와 측정을 통한 확인의 문제점은 인식치 못하고 단지 다양한 예를 확인하고 있다는 측면에서 오히려 신뢰할 수 있다는 설명을 하고 있었다. 다음은 학생의 응답 중 일부를 제시한 것이다.

증명의 증명보다 더 방법도 많고 실제로 작아서 보며주는거라

<그림 IV-3> 여러 종류의 삼각형들의 측정에 더 신뢰를 갖는 학생의 응답

<그림 IV-3>의 학생의 경우에 연역적 증명과 비교하여 “더 방법도 많고”라고 언급하며 검증 과정이 다양하게 이루어졌다고 파악하고 있으며, 제시된 경험적 증명이 측정을 통하여 검증되었기 때문에 증명의 일반성을 가질 수 없음을 전혀 인식하지 못하고 있었다.

앞서 설명한 경험적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인을 하나의 표로서 제시하여 보면 다음과 같다.

<표 IV-1> 경험적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인

이해의 용이성	측정결과는 눈으로 보고 이해하니까 쉽다
	수학적 원리가 있는 증명은 이해가 어렵다
다양한 예를 통한 검증 과정의 신뢰	

2. 연역적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인

가. 측정에 대한 부정적 인식

다수의 학생들이 측정에 대한 부정적인 인식을 드러내며 연역적 증명에 대한 선호를 나타내었다. 이러한 측정에 대한 부정적인 인식은 측정의 오차가능성에 관한 것과 측정 과정에 있어서의 번거로움의 두 가지로 나누어질 수 있었다.

먼저, 측정의 오차 가능성을 인지한 학생들이 존재하였다. 측정의 오차 가능성이란 삼각형을 자르고 붙인 후 세 내각의 합을 각도기로 측정하는 과정에서 생기는 도구 사용의 실수나 측정의 오차를 말한다. 다음은 학생의 응답 중 일부를 제시한 것이다.

### 현신의 증명은 오차가 날 염려가 있지만

<그림 IV-4> 측정의 오차가능성을 인식한 학생의 응답

<그림 IV-4>의 학생의 경우 경험적 증명에 대해 “오차가 날 염려가 있지만”이라고 언급하여 신뢰할 수 없음을 설명하였다. 이런 응답의 다수는 측정의 오차 가능성과 연역적 증명의 확실성을 동시에 설명하면서 연역적 증명에 대한 선호를 나타내었다. 이러한 학생들의 경우 측정의 확실성에 대해 의심하면서 동시에 수학적 원리가 신뢰할 수 있다고 설명하였다.

또 다른 학생들은 측정 과정의 번거로움에 대하여 언급하였다. 여기서 말하는 측정의 번거로움이란 측정에서 소요하는 시간, 측정의 부가적 준비물에 대한 학생들의 언급을 포괄하여 말한다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

### 현신이 필요 하면 시간이 꽤 걸릴 거야

<그림 IV-5> 측정 과정에 소요되는 시간을 언급한 학생의 응답

이유: 스테판은 높을 하지 않아도 된다. 현이는 각도기, 가위 등 준비물이 필요하면, 현이는 열광하면 된다.

<그림 IV-6> 측정에 필요한 도구의 준비가 번거롭다고 언급한 학생의 응답

<그림 IV-5>의 학생은 측정에 대하여 “시간이 꽤 걸릴 것”이라고 언급하며 측정에서 소요하는 시간을, <그림 IV-6>의 학생은 측정에 있어 “각도기, 가위 등의 준비물이 필요하지만”이라고 언급하며 측정이 부가적 준비물이 필요함을 설명하여 연역적 증명에 대한 선호를 나타내고 있었다.

#### 나. 수학적 원리를 이용한 증명의 신뢰

연역적 증명을 선호하는 이유로 수학적 지식이나 원리의 사용이 증명의 확실함을 보장한다는 것을 제시한 응답들이 있었다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

이유: 현이나 같은 예제와 명제가 어떤 준비의 증명과 같은 논리적인 단계에 대한 개념을 응용하여 현의 논리를 강화한다는 개념을 생각할 수 있다.

<그림 IV-7> 수학적 원리를 신뢰하는 학생의 응답

<그림 IV-7>의 학생은 “수학에 대한 기본 지식을 응용하여 완전히 의심 없이”라는 표현을 하면서 기존에 알고 있는 지식으로부터 전개해 나가는 증명이 수학적 명제가 항상 참임을 받아들이게 해준다고 설명한다. 반면, 경험적 증명은 명제의 확실성을 보장하기엔 부족하다고 생각한다. 연역적 증명

을 선호하는 이유로 명제의 확실성을 보장해주는 수학적 원리의 역할이 제시된 것은 연역적 증명 방식의 특성을 이해하는 것이 연역적 증명 선호에 영향을 미친다는 것을 시사한다.

다. 수학적 원리의 유용성

학생들은 연역적 증명에서 이용된 수학적 원리를 학습에 도움이 되는 유용한 것으로 생각하여 경험적 증명보다 연역적 증명을 선호하는 경우도 있었다. 도움이 되는 측면으로는 관련된 수학적 내용의 이해에 도움이 된다는 것과 다른 문제를 풀 때 유용하다는 두 가지 측면이 나왔다. 먼저, 증명 과정에서 동위각과 엇각의 성질이 이용되는 것이 이 성질에 대한 이해를 증진시킨다는 응답이 있었다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

이유 : 삼각형 내각의 크기의 합을 내은 지식들을 사용하여 나타내었다 또한 엇각의 성질을 알고 그 것을 사용하여 삼각형 내각의 크기를 알았으니 개념이해가 된거다

<그림 IV-8> 증명에 나타난 수학적 원리로 개념을 이해한 학생의 응답

<그림 IV-8>의 학생은 “엇각의 성질을 알고 이를 사용하여서 개념 이해가 된다”라고 진술하였다. 이것은 학생들이 제시된 증명 과정을 수학적 명제가 참이라는 것을 보여주는 과정으로 볼 뿐만 아니라 학습의 대상으로도 파악하고 있음을 말해준다.

그리고 학습에 도움이 되는 유용성을 제시한 학생들의 응답에서는 추후 다른 문제를 풀 때의 적용가능성이 선호의 이유가 되기도 하였다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

결론 : 다른 문제는 꼭 이 성질이라고 생각하게 내준이. 이것의 증명을 선택 한다.

<그림 IV-9> 증명의 응용 가능성을 염두에 둔 학생의 응답

<그림 IV-9>의 학생은 연역적 증명을 “다른 문제를 풀 때”도움이 되는 증명으로 간주하면서 증명의 응용 가능성을 염두하고 있다.

라. 다양한 예의 검증 과정에 대한 부정적 인식

설문지에서 경험적 증명은 세 개의 도형을, 연역적 증명에서는 증명 과정의 이해를 돕기 위한 대표성을 갖는 한 도형을 제시하고 있다. 연역적 증명을 선호하는 학생들의 일부는 세 종류의 삼각형을 검증하는 과정을 부정적으로 인식하였는데, 그러한 학생들의 인식은 두 가지 부류로 나뉘었다.

우선, 세 종류의 삼각형을 모두 등장시킨 경험적 증명보다 하나의 삼각형으로 증명한 연역적 증명이 간단하고 번거롭지 않다고 언급한 학생들이 있다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

현진은 삼각형을 세 개로 나누어 각각 증명했지만 준원은 수학의 성질을 이용해 더 간단하게 증명하였다.

<그림 IV-10> 하나의 삼각형으로 증명한 연역적 증명의 간단함을 언급한 학생의 응답

<그림 IV-10>의 학생이 세 개로 나누어 각각 증명한 현진의 방법에 비해 준원의 증명을 “간단하게” 증명한 것이라고 생각하는 것은 여러 예에 대해서 해보는 것을 번거로운 작업으로 간주한다고 볼 수 있다. 이는 연역적 증명이 증명 과정을 만족하는 “모든” 경우에 대한 증명이라는 이해로부터 나온 응답이라고 단언하기는 어렵다. 여기에는 단순히 확인하는 가지 수의 많고 적음이 기준이 된다.

반면, 많은 수의 확인을 거치는 경험적 증명 대신 연역적 증명이 일반성을 갖기 때문에 이를 선호한다는 응답도 존재하였다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

현진의 증명에서는 세 경우를 모두 따져야 하지만 준원의 증명은 모든 경우에 대해 위와 같이 증명하면 되기 때문

<그림 IV-11> 연역적 증명의 일반성을 인식한 학생의 응답

<그림 IV-11>의 학생이 언급한 “준원의 증명은 모든 경우에 대해 위와 같이 증명하면 되기 때문”이라는 말은 연역적 증명의 일반성을 이해하고 있음을 시사한다. 그러나 다양한 예를 검증하는 것을 부정적으로 보는 응답들의 대부분이 번거로움에서 기인하고 전칭 명제의 증명 방식인 연역적 증명의 속성에서 기인한 응답은 단 하나뿐이었다.

마. 수학적 원리의 존재성

앞서, 경험적 증명을 선호하는 학생들이 제시한 이유로 수학적 원리가 있어서 증명이 어려워진다는 응답들이 있었다. 반면, 연역적 증명을 선호하는 학생들에게는 수학적 원리의 존재가 연역적 증명의 선호 요인이 되었다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

그리고 현진의 방법으로는 삼각형의 세각의 합이  $180^\circ$ 인 이유를 알 수 없지만 준원의 경우에는 원리를 알 수 있다.

<그림 IV-12> 연역적 증명을 통해 원리를 알 수 있다고 언급한 학생의 응답

<그림 IV-12>의 학생은 경험적 증명에는 “세 내각의 합이  $180^\circ$ 인 이유를 알 수 없지만” 연역적

증명에는 “원리를 알 수 있다”고 언급하였다. 이는 증명 과정에 원리의 존재성이 증명 선호의 한 요인이 될 수 있음을 말해주는 응답이다.

바. 연역적 증명에 대한 막연한 개념 이미지

연역적 증명에 대한 막연한 개념 이미지가 학생들이 연역적 증명을 선호하는 요인으로 작용한다는 결과도 얻을 수 있었다. 선호 이유가 구체적으로 제시하지 않은 학생들의 응답에서 막연하게 “수학적이다”, “논리적이다”라는 말은 연역적 증명에 대한 일반적인 이미지의 일부를 제시한 것에 불과하다. 다음은 이러한 요인이 진술된 학생의 응답 중 일부분을 제시한 것이다.

이유 : 더 수학적인 개념이기 때문

<그림 IV-13> 연역적 증명에 대한 막연한 이미지를 갖고 있는 학생의 응답

<그림 IV-13>의 학생은 별 다른 이유 없이 “더 수학적이다”라는 이유만을 제시하였다. 이 범주에 속한 학생들은 두 증명에 대한 이미지를 풍부하게 갖고 있지 못하고 막연하게 연역적 증명은 좋은 것이라는 인식을 하고 있다.

앞서 설명한 연역적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인을 하나의 표로서 제시하여 보면 다음과 같다.

<표 IV-2> 연역적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인

측정에 대한 부정적 인식	측정의 오차가능성
	측정 과정의 번거로움
수학적 원리를 이용한 증명에 대한 신뢰	
수학적 원리의 유용성	이해를 증진
	다른 문제 풀이에 유용
다양한 예를 통한 검증 과정에 대한 부정적 인식	번거롭다
	연역적 증명은 모든 경우를 증명함
원리의 존재성	
증명에 대한 개념이미지	

## V. 결과 분석 및 논의

지금까지 경험적 증명과 연역적 증명의 선호에 영향을 끼치는 요인을 개별적으로 알아보았다. 본 연구에서는 이에 그치지 않고 발견된 각 요인들 간에 어떤 관계가 있을 수 있는 지를 분석해 보았

다. 그 결과, 두 증명에 대한 선호의 응답 중 많은 수가 공통적으로 측정, 수학적 원리, 다양한 예를 통한 검증과정에 대하여 언급하고 있는 것을 발견할 수 있었다. 다시 말하여, 측정, 수학적 원리, 다양한 예를 통한 검증과정에 대하여 학생들이 어떻게 인식하느냐에 따라 경험적 증명과 연역적 증명의 선호의 차이가 나타났음을 발견할 수 있었다.

## 1. 측정

학생들의 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호도는 설문 문항에서 제시된 경험적 증명에서 사용하는 측정이라는 과정에 대하여 어떻게 생각하느냐에 따라 차이가 나타났다. 먼저, 경험적 증명을 선택한 학생들은 측정을 긍정적인 관점으로 수용하고 있었다. 이들은 측정에 대하여 눈으로 볼 수 있고 이해하기 쉽다고 판단하여 선호를 나타내었는데, 이들은 측정 과정에서 발생할 수 있는 오차 가능성에 대하여 인식하지 못하고 있었다. 이러한 경향은 초등학교 기하단원 학습에서 수학적 원리의 정당화 수단으로 측정을 통한 경험적 증명 방법을 주로 사용하는 것과 연관되어 있다고 볼 수 있으며 중등 교육과정을 학습하면서도 여전히 경험적 증명이 일반화하기 어려운 증명 방법이라는 것을 인지하게 되는 경험이 부족함을 말해주는 것이라고 볼 수가 있다. 반면, 연역적 증명을 선택한 학생들의 경우에는 측정에 대하여 부정적인 관점을 나타내었다. 연역적 증명을 선택한 학생들 중 다수가 측정 과정에서 발생하는 도구 사용의 실수나 측정값의 오차 가능성을 인식하였고, 측정의 오차 가능성 때문에 경험적 증명을 통한 수학적 정당화를 신뢰하지 못하였다. 또한, 측정이라는 과정 자체가 연역적 증명에 비교하여 상대적으로 번거롭다는 설명을 한 학생들도 있었는데, 이는 측정을 행동이나 행위로 파악하고 행동의 불편함에 초점을 두어 측정에 대한 부정적 인식을 드러낸 것이라 볼 수가 있다.

이러한 결과는 학생들에게 측정을 어떤 측면으로 인식시키느냐에 따라 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호를 달라지게 할 수 있는 가능성이 있음을 보여준다. 특히, 학생들에게 측정의 오차 가능성에 대해 인식하게 하는 것은 경험적 증명의 일반화가 어려움과 동시에 연역적 증명의 필요성을 깨닫게 할 수 있는 좋은 방법이 될 수 있을 것이라 기대된다.

## 2. 수학적 원리

학생들은 연역적 증명에서 제시된 수학적 원리에 대하여 어떻게 인식하느냐에 따라서 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호도에서 차이를 드러냈다.

먼저, 경험적 증명을 선호한 학생들 중 다수가 수학적 원리의 존재 자체가 증명에 대한 이해를 어렵게 만든다고 응답하였다. 이러한 응답들은 수학적 원리의 내용이나 타당성을 따지기도 이전에 존재 자체에만 관심을 두어 설명하였는데, 이는 수학 원리는 어렵다고 하는 일종의 선입견이 학생들의

경험적 증명에 대한 선호를 결정할 수 있음을 보여주는 것이다.

반면, 연역적 증명을 선호한 학생들은 수학적 원리에 대하여 다양한 긍정적인 인식을 드러내었다. 다수의 응답이 수학적 원리는 확실하며 신뢰할 수 있고 이를 통해 이끌어낸 결론 역시 확실성을 보장할 수 있다고 설명하였다. 수학적 원리가 유용하다고 판단하는 응답도 있었는데, 이는 수학적 원리가 이용된 증명을 통해 학습한 내용에 대한 이해를 증진시킬 수 있다는 것과 원리를 알게 되면서 다른 수학 문제에 적용 가능하다는 설명으로 나누어졌다. 또한, 증명 과정에서의 수학적 원리의 존재는 명제가 참인 이유를 말해준다는 점에서 선호의 이유가 되는 응답도 있었는데, 이는 경험적 증명을 선호하는 학생들이 존재 자체만으로 어렵다는 인식을 가지는 것과 대조적으로 수학 원리의 존재성이 학생들의 연역적 증명에 대한 선호로도 작용할 수 있음을 보여주고 있었다.

이러한 결과를 볼 때, 학생들이 수학적 원리에 대하여 어떻게 인식하고 있는 지를 알아보는 것은 증명 교육이 이루어지기 전에 반드시 선행되어야 할 것이라고 판단된다. 특히, 수학적 원리의 내용과 타당성을 확인하기도 전에 존재만으로도 선호가 결정될 수 있다는 것은 증명 교육에 있어서 학생들의 선입견적 사고가 파악되어야 할 필요성이 있음을 시사한다.

### 3. 다양한 예를 통한 검증과정

설문지에서 제시된 “결정적인 예”의 경험적 증명에 대한 설명은 경험적 증명을 선호하는 학생들과 연역적 증명을 선호하는 학생들 모두에서 나타났다. 선호하는 증명에 따라 다양한 예들을 측정하여 명제가 참임을 입증하는 과정에 대한 학생들의 인식이 달랐는데, 경험적 증명을 선호하는 학생들은 설문지의 연역적 증명이 한 삼각형만을 제시하였기 때문에 상대적으로 많은 삼각형을 제시한 경험적 증명을 긍정적으로 인식하였다. 반면, 연역적 증명을 선호하는 학생들은 다양한 예를 검증하는 과정은 번거롭고 연역적 증명은 한 삼각형에 대해서만 하기 때문에 간단하다고 언급하였다.

전칭 명제는 일반성을 갖고 있는 연역적 증명으로 증명할 수 있고 경험적 증명은 전칭 명제를 증명하는 데 한계가 있다. 학생들이 소박한 경험주의보다 좀 더 다양한 예를 제공하는 경험적 증명을 주었을 때도 경험적 증명이 갖지 못하는 연역적 증명만의 고유한 특성인 일반성을 인식할 수 있는가를 알아보고자 하였는데, 실제로 학생들은 대부분 이를 인식하지 못하였다.

경험적 증명이 갖는 유용한 측면도 있지만 학생들이 최종적으로 도달해야 할 증명이 연역적 증명인 이유는 증명의 일반성에 있다. 이것이 중요한 특징임에도 불구하고 다수의 학생들이 이를 인식하지 못하는 것은 연역적 증명으로의 전이의 필요성을 느끼지 못하는 원인으로 작용할 것이다. 이러한 맥락에서 교사는 학생들에게 증명을 설명할 시에 주어진 조건을 만족하는 모든 대상에 대하여 결론이 참임을 보장해주는 연역적 증명의 속성을 학생들이 이해할 수 있도록 도움을 주는 것이 필요하다.

지금까지 학생들이 경험적 증명과 연역적 증명의 선호로서 공통적으로 언급하였던 측정, 수학적 원리, 다양한 예를 통한 검증과정에 대해 알아보았다. 이 요소들은 상호배타적으로 나타나지 않고 학생들의 응답에서 동시에 나타나기도 했다는 점에서 주목할 만하다. 특히, 많은 학생들의 응답들이 측정과 수학적 원리에 대하여 동시에 언급하고 있었다. 경험적 증명을 선호하는 학생들의 경우, 측정이 눈으로 보고 이해하기가 쉬우며 수학적 원리의 존재는 증명의 이해를 어렵게 한다는 말을 함께 하는 경우가 많았다. 또한, 연역적 증명을 선호하는 학생들의 경우, 측정의 오차가능성을 이유로 측정은 신뢰할 수 없다고 설명하면서 동시에 수학적 원리는 신뢰할 수 있다거나 수학적 원리의 존재에 대하여 긍정적인 인식을 언급하고 있었다. 이것은 학생들의 증명에 대한 선호가 한 증명에 대한 비선호와 다른 증명에 대한 선호가 동시에 작용할 수 있음을 보여주는 것이며, 증명에 대한 학생들의 선호가 하나의 증명에 대한 선호요인을 보는 것만으로는 정확히 파악할 수 없을 수 있음을 나타내는 것이다.

따라서 다른 종류의 증명에 대한 선호에 대하여 동시적이고 요소가 상호적으로 작용할 수 있음을 염두에 두어 학생들의 증명에 대한 선호를 연구할 필요성이 있다. 기존의 연구들은 하나의 증명에 대한 선호요인을 알아보는데 초점을 둔 반면, 본 연구 결과는 증명에 대한 학생들의 선호에 영향을 끼치는 요인들이 상호적으로 어떤 작용을 할 수 있는지, 또 어떤 관계가 있는지에 규명할 필요가 있다는 것을 함의한다. 것이다. 이를 통하여 학생들의 증명에 대한 선호는 보다 심층적으로 파악될 수 있을 것이며, 학생들의 증명 교육에 있어서 고려하고 유의해야 할 사실들을 발견할 수 있는 좋은 기회가 될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

- 김미정 · 이종희 (1994). Van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구. 한국수학 교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **33(2)**, pp.251-265.
- 서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 : 중학교 수학을 중심으로. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 이증권 (2006). Van Hiele의 기하 인지발달이론에 따른 중학교 기하교육과정 및 우리나라 중학생들의 기하수준에 관한 연구, 교육문제연구, **17**, pp.55-85.
- Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp.216-235). London: Hodder & St.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, **7**, pp.23-40.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, **24**, pp.359-387.

- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, **44(1)**, pp.5-23.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof, In F. Lester(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics, pp.805-842.
- Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, **33(5)**, pp.379-405.
- Martin, T. S., & McCrone, S. S. (2009). Formal Proof in High School Geometry : Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. In D. Stylianou, M. Blanton & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp.204-221). New York: Routledge.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20(1)**, pp.41-51.
- Porteous, K. (1990). What do children really believe?, *Educational Studies in Mathematics*, **21(2)**, pp.598-598.
- Stylianides, A. J. (2009). Breaking the Equation. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, **213**, pp.9-14.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Orlando, FL: Academic Press.
- Williams, E. (1979). *An Investigation of Senior High School Students' Understanding of the Nature of Mathematical Proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, Edmonton, Canada.

## FACTORS INFLUENCING STUDENTS' PREFERENCES ON EMPIRICAL AND DEDUCTIVE PROOFS IN GEOMETRY

**Gwi Hee Park; Hyun Kyoung Yoon; Ji Young Cho & Jae Hoon Jung**

Seoul National University

E-mail : parkssam@gmail.com; E-mail : ducale05@naver.com; E-mail : zickzick06@naver.com

& E-mail : hoorap@naver.com

**Oh Nam Kwon**

Seoul National University

E-mail : onkwon@snu.ac.kr

The purpose of this study is to investigate what influences students' preferences on empirical and deductive proofs and find their relations. Although empirical and deductive proofs have been seen as a significant aspect of school mathematics, literatures have indicated that students tend to have a preference for empirical proof when they are convinced a mathematical statement. Several studies highlighted students' views about empirical and deductive proof. However, there are few attempts to find the relations of their views about these two proofs.

The study was conducted to 47 students in 7~9 grades in the transition from empirical proof to deductive proof according to their mathematics curriculum. The data was collected on the written questionnaire asking students to choose one between empirical and deductive proofs in verifying that the sum of angles in any triangles is  $180^\circ$ . Further, they were asked to provide explanations for their preferences. Students' responses were coded and these codes were categorized to find the relations.

As a result, students' responses could be categorized by 3 factors; accuracy of measurement, representative of triangles, and mathematics principles. First, the preferences on empirical proof were derived from considering the measurement as an accurate method, while conceiving the possibility of errors in measurement derived the preferences on deductive proof. Second, a number of students thought that verifying the statement for three different types of triangles - acute, right, obtuse triangles - in empirical proof was enough to convince the statement, while other students regarded these different types of triangles merely as partial examples of triangles and so they preferred deductive proof. Finally, students preferring empirical proof thought that using mathematical principles such as the properties of alternate or corresponding angles made proof more difficult to understand. Students preferring deductive proof, on the other hand, explained roles of these mathematical principles as verification, explanation, and application to

other problems. The results indicated that students' preferences were due to their different perceptions of these common factors.

---

\* ZDM Classification : C23

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C20

\* Key Words: deductive proof, empirical proof

<부록 1> 연구에 사용된 설문지

\*삼각형 내각의 합이 180°이다.\*는 명제가 참임을 증명하라는 과제가 나왔다. 이 때 현진이와 준원이는 각각 다음과 같은 방법을 택하여 답하였다.

· 현진이의 증명 :

예각, 직각, 둔각삼각형 중 각각 하나씩 색종이에 그려본 후 아래 그림과 같이 실제로 세 내각을 가위로 잘라 한 곳에 모아 각도를 실제 각을 재어보았더니 세 내각의 합은 평각 즉, 180°가 되었다.

1단계	2단계	3단계
색종이에 예각, 직각, 둔각삼각형을 그린다.	각 종류별 삼각형의 세 내각에 O, △, X 표시한다.	세 내각을 한 점에 모아 붙인 후 각도기를 사용하여 재어본다.

따라서 '삼각형 내각의 합이 180°이다.'라는 명제는 참이다.

· 준원이의 증명 :

삼각형 ABC에서 변 AB의 연장선 위의 한 점 D를 잡고, 점 A에서 변 BC에 평행한 반직선 AE를 긋자.

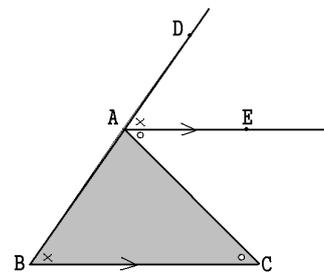
$BC \parallel AE$ 이므로

$$\angle C = \angle CAE \text{ (엇각)}, \angle B = \angle DAE \text{ (동위각)}$$

따라서 삼각형에서 세 내각의 크기의 합은

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= \angle A + \angle CAE + \angle DAE \\ &= \angle BAD = 180^\circ \text{ 이므로} \end{aligned}$$

위 명제는 참이다.



질문 : 여러분은 '삼각형 내각의 합이 180°이다.'이 참이라는 것을 받아들일 때 위의 두 학생의 증명 중 어떤 것을 선택할 것 같나요? 또 그 이유를 여러분이 선택하지 않은 학생의 증명과 비교해서 말해주세요.

선택 :

이유 :

\* 자료분석의 도움을 준 수학교육연구공동체에게 감사드립니다.