韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 2호, 2010. 5. 283-300

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 2, May. 2010. 283-300

고등학교 수학에서 0^0의 지도 방안

김 동 화 (부산대학교)
홍 우 철 (부산대학교)

고등학생들이 부정형의 한 형태인 0^0을 올바로 이해하는데 어려움을 느낀다는 것은 오래전부터 알려져 왔으며, 비교적 최근까지도 0^0의 처리 방법에 대하여 수학자들 사이에 약간의 논란이 있었다. 고등학교 교육과정에는 0^0에 대한 명확한 처리방법이 명시되지 않고 있으므로 어떤 학생들은 그것의 값이 무엇인지 질문을 하기도 한다. 본 연구에서는 0^0과 관련된 자료들을 토대로 역사적·수학적 분석을 통하여 0^0은 부정형임을 명확히 하고, 현직 교사와 최근에 고등학교를 졸업한 학생들을 대상으로 실시한 간단한 설문조사를 통하여 고등학교 교육현장의 0^0에 대한 교수 실태를 파악한다. 그리고 교사와 예비교사를 위하여 0^0에 대한 효과적인 지도 방안에 대하여 논의한다.

Ⅰ. 서 론

$0/0$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$, ∞/∞, 그리고 0^0과 같은 부정형(indeterminate form)을 처음 접하는 학생들은 모호성으로 인하여 이들을 올바로 이해하는데 상당한 어려움을 느끼는 것으로 알려져 있다(Paige, 1954; Watson, 1961; Rotando, 1977). 그러나 0^0을 제외한 부정형들에 대해서는 고등학교 함수의 극한 단원에서 처리 방법을 비교적 명확하게 제시하고 있다. 그리고 Moritz(1921)는 부정형에 대한 초보자들의 정확한 이해를 돕기 위하여 0^0을 제외한 $0/0$, ∞/∞, $0\times\infty$, 그리고 $\infty-\infty$가 0, ∞ 또는 어떤 다른 값을 가진다는 것을 2차원 좌표 공간에서 기하학적으로 보여주었다. 학교수학에서 0^0과 관련되는 내용을 살펴보면 고등학교 2학년 과정의 ‘지수함수와 로그함수’ 단원의 ‘지수와 로그’ 절에서 $a^0=1$(단 $a\neq 0$)이라고만 정의하고 있다. 학습목표에는 “지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다”라는 내용이 포함되어 있다(교육인적자원부, 2007; 박배훈 외, 2002; 이강섭 외, 2002). 따라서 0^0에 대한 지도 내용과 방법은 담당 교사에게 맡겨져 있다고 볼 수 있다. 만약 교사의 올바른 지도가 없다면 어떤 학생들은

* 접수일(2010년 3월 15일), 심사(수정)일(2010년 3월 22일), 게재확정일자(2010년 4월 5일)
* ZDM분류 : D44
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 0^0, 부정형, 고등학교 수학, 지도 방안
* 이 논문은 부산대학교 자유과제학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음

$$0^r = 0,\ \text{여기서}\ r \in R - \{0\},\ R\text{은 실수집합}$$

이라는 사실을 단순하게 확장하여 $0^0 = 0$이라고 잘못 생각할 수 있을 것이며, 또한

$$r^0 = 1,\ \text{여기서}\ r \in R - \{0\}$$

이라는 사실을 확장하여 $0^0 = 1$이라는 잘못된 개념을 가질 수도 있을 것이다. 그리고 이항정리

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r,\ n \in N,\ N\text{은 자연수집합}$$

을 $n \in N \cup \{0\}$의 경우로 단순 확장하여 다음과 같이 생각할 수도 있다.

$$(a+b)^0 = {}_0C_0\, a^0 b^0.$$

이 식에서 $a = 1,\ b = -1$인 경우에 ${}_0C_0 = 1$이므로 $0^0 = 1$이라고 유추할 수도 있을 것이다.

더 나아가서 학생들은 '0^0의 값은 과연 무엇인가?' 혹은 '0^0은 왜 부정형인가?'라는 질문을 제기할 수도 있을 것이다.

그 동안 부정형은 수학자들 사이에서도 비교적 최근까지도 약간의 논란의 대상이 되어왔다. 이러한 논란은 베르누이(John Bernoulli), 오일러(Leonhard Euler), 그리고 코시(Augustin-Louis Cauchy)까지 거슬러 올라간다. 18세기에 베르누이가 최초로 부정형 $0/0$의 형태에 대한 완전한 해석을 하고 이어서 오일러가 ∞/∞, $0 \times \infty$ 그리고 $\infty - \infty$와 같은 부정형에 대한 해석과 처리 방법을 정리하였는데, 이 당시에 오일러는 "0^0은 반드시 1이 되어야한다"라고 주장하였다(Moritz, 1921; Knuth, 1992). 위와 같은 그의 잘못된 주장은 그 후 반세기 이상 동안 수학자들에 의하여 공유되어 왔으며, 마침내 극한의 개념이 정립되는 시기라고 할 수 있는 19세기에 들어와 코시에 의하여 요즘 일반적으로 받아들여지고 있는 것과 같이 0^0은 부정형임을 이해하기 시작하였다.

박지현(2007)은 중학교 영재학생과 예비교사의 0의 개념 및 지도에 관한 연구에서 0^0에 대하여 '불능(undefined)'이라고 정확하게 이해하고 있는 빈도가 매우 낮으며, 정답을 맞힌 사람들도 Freudenthal이 언급한 '대수의 원리' 또는 '형식불역의 원리'에 기반한 정당성를 제시하지 못하였음을 보고한 바 있다.

우정호 외(2006)는 교수학적 분석(didactical analysis)은 학교수학의 특정한 주제를 가르치기 적절하게 교재와 수업을 조직하는데 유용한 시사를 얻기 위해 그 주제의 본질을 여러 측면에서 분석하는 연구이며, 이러한 분석은 수학적 분석, 철학적 분석, 역사적 분석, 그리고 심리학적 분석 등과 같은 다양한 측면에서 수행될 수 있다고 하였다.

본 연구에서는 고등학교 교육현장에서 0^0을 올바로 지도하는 방안에 대하여 조사・연구한다. 이를 위하여 먼저 학교현장의 교수・학습 실태에 관하여 설문조사를 통하여 파악한다. 그리고 역사적・수학적 분석을 포함하는 교수학적 분석을 통하여 0^0의 본질이 무엇인지 정리하고, 현 고등학교 교육과정에서의 바람직한 교수 방안에 대하여 논의함으로써 교사나 예비교사를 위한 하나의 교수・학습 자료를 제공하고자 한다.

Ⅱ. 교수 실태 조사

1. 교사의 교수 실태 조사

부정형 0^0의 지도에 관한 학교 현장의 실태를 파악해 보기 위하여 먼저 교사들을 대상으로 간단한 조사를 실시하였다. 현직 고등학교 수학교사로서 최근 1년 이내 수Ⅰ강의를 담당한 경험이 있는 교사들을 대상으로 전화 설문을 실시하였다. 질문의 특성상 보다 진솔한 답변을 듣기 위하여 서로 편안하게 대화를 할 수 있는 즉, 연구자와 어느 정도 면식이 있는 7명의 교사들을 대상으로 조사하였다. 표본화 방식은 의도적 표본화(judgmental sampling)라고 할 수 있다. 조사에 참여한 교사들의 현황은 다음 <표 1>과 같다.

<표 1> 설문조사에 참여한 고등학교 교사 현황

교사 구분	성별	학교 분류	학교 소재지	교육 경력
C1	남	인문계	부산	25년 이상
C2	남	인문계	경남	20년 이상
H	남	과학고	부산	10년 이상
K1	남	인문계	부산	20년 이상
K2	남	인문계	경남	20년 이상
L	남	인문계	부산	25년 이상
S	여	인문계(여)	부산	25년 이상

교사들과의 대화 과정에서 자연스럽게 다음의 세 가지 질문이 이루어졌다.

(1) 학생들이 0^0의 의미나 값에 대하여 질문한 적이 있었는가?
(2) 그러한 질문이 있었다면 어떤 답변을 하였는가?
(3) 평소에는 0^0에 대하여 어떻게 지도하는가?

위의 세 질문에 대한 교사들의 답변을 <표 2>에 정리하였다.

<표 2> 교사들의 답변 내용

교사 구분	답변 내용
C1	(1) 질문이 없었다. (2) 무응답 (3) 평소에 '$a^0 = 1$(단 $a \neq 0$)'이라는 정의에 충실하게 지도를 한다. 그 이상의 내용은 고등학교 수준을 넘어감으로 지도하지 않는다.

C2	(1) 질문이 없었다. (2) 무응답 (3) 정의되지 않으므로 별도로 지도하지 않는다. 0에 대한 지수는 아무런 의미가 없다.
H	(1) 질문이 있었던 것 같다. (2) 대략 교과서의 정의에 기반하여 설명한 것 같다. (3) 평소에는 도입 단계에서 미리 '밑이 0인 경우를 제외한 모든 수의 영 승은 1'이라고 지도한다.
K1	(1) 질문이 있었던 것 같다. (2) '0^0이 0이거나 1의 값을 가지면 어떤 모순이 발생하며 구체적인 내용에 대해서는 고교수준을 넘어감으로 더 이상 설명하지 않는다.'고 답변한 것 같다. (3) 평소에 0^0에 대한 내용은 고교교과과정에 없기 때문에 지도하지 않는다.
K2	(1) 질문이 있었다. (2) 지수 법칙에서 밑과 지수의 조건을 설명할 때, '0의 모든 거듭제곱은 0'과 '모든 수의 영 승은 1'이라는 정의로부터 0^0을 0이나 1로 정의하게 되면 지수법칙이 일관되게 적용되지 않는다. 따라서 0^0은 정의하지 않는다. (3) 평소에 지수 법칙에서 밑과 지수의 조건을 제시할 때 위의 내용을 설명해 준다.
L	(1) 질문이 없었던 것 같다. (2) 무응답 (3) 지수 법칙 도입 시에 밑이 0인 경우는 제외한 다는 것을 강조한다. 자연계열 학생들에게는 극한 개념을 사용하여 0^0의 성질을 탐구해 볼 수도 있다고 언급하였다.
S	(1) 질문이 없었다. 그러나 그러한 질문이 있을 수 있다고 생각한다. (2) 무응답 (3) 지수와 로그 단원의 도입 단계에서 '밑이 0인 경우를 제외한 모든 수의 영 승은 1이다' 그리고 '영의 영 승은 생각할 필요가 없다'라고 분명하게 지도한다.

면담에 참여한 교사들은 대체로 교과서에서 정의하고 있는 수준까지만 가르치고 있었다. K2 교사는 지수법칙에 모순이 발생한다는 이유로 '정의하지 않음'이라고 지도하고 있으며, K1 교사도 명확하지는 않지만 비슷한 맥락으로 지도하고 있었다. 이러한 지도는 0^0의 값이 과연 무엇인지 궁금한 학생에게 정확한 설명을 제시했다고는 보기 어렵다. L 교사는 극한을 이용한 접근 방법이 있을 수 있다는 답변까지는 제시하였다. 대학입시를 위해 진력하고 있는 고등학교 교육현장의 현실을 고려해 볼 때, 이 정도이면 0^0의 값에 대한 학생들의 질문은 종종 있을 수 있다고 판단된다. 반면에 조사에 참여한 대부분의 교사는 0^0이 부정형임을 정확하게 이해하고 있지 못하며, 이 주제에 대하여 평소에 별로 관심이 없는 것으로 보인다.

2. 학생 실태 조사

다음으로 학생들의 실태도 대략적으로 파악해 보기 위하여 최근에 고등학교를 졸업한 수학교육과 1학년 학생 31명을 대상으로 0^0의 값에 대한 본인의 생각과 고등학교 시절의 학습내용에 관한 설문 조사를 실시하였다. 설문에 참여한 모든 학생들은 인문계고등학교 출신이었으며 2명을 제외하고는 2009년 2월에 고등학교를 졸업하였다. 각 설문 문항에 대한 학생들의 답변을 정리하면 다음 표와 같다.

<표 3> 0^0에 관한 설문 문항별 학생들의 답변

<table>
<tr><td rowspan="10">(1) 0^0의 값은 무엇이라고 생각하는가? 그 이유는 무엇인가?</td><td>학생 답변</td><td>답변에 대한 이유</td><td>인원수</td></tr>
<tr><td rowspan="3">‘정의할 수 없다’ 또는 ‘없다’</td><td>무응답</td><td>21</td></tr>
<tr><td>0을 0번 곱한다는 것은 아무런 의미가 없다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>지수법칙에 모순이 생긴다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0이다.</td><td>그래프를 생각해 보았다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>직관적으로 생각하였다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0이 들어가는 연산(∞는 제외)의 결과는 모두 0이다.</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1이다.</td><td>모든 수의 0승은 1이다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$0^0 = 0^2 \div 0^2$, 같은 것끼리 나누면 항상 1이다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>‘정해지지 않는다’ 또는 ‘정할 수 없다’</td><td>무응답</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">(2) 고교 시절에 0^0의 값에 대한 선생님의 설명이 무엇이라고 기억하는가?</td><td colspan="2">학생 답변</td><td>인원수</td></tr>
<tr><td colspan="2">‘0^0은 정의될 수 없다’ 또는 ‘0^0은 정의하지 않는다’ 또는 ‘0^0의 값은 없다’</td><td>14</td></tr>
<tr><td colspan="2">설명이 없었다.</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">기억나지 않는다.</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="5">(3) 고교 시절에 0^0의 값이나 의미에 대하여 본인 또는 급우가 질문한 적이 있었는가? 만약 있었다면 선생님의 설명은 무엇이었나?</td><td>질문 여부</td><td>질문에 대한 선생님의 설명</td><td>인원수</td></tr>
<tr><td rowspan="3">질문이 있었다.</td><td>0^0은 정의하지 않으므로 더 이상 생각할 필요가 없다.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>대학에 가면 배운다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>분명한 설명이 없었다.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>‘질문이 없었다’ 또는 ‘기억나지 않는다’</td><td>무응답</td><td>25</td></tr>
</table>

조사에 참여한 학생의 70% 이상이 '정의할 수 없다' 또는 '없다'라고 대답하였고, 그들 중 대부분은 그것에 대한 이유를 제시하지 못하였으며 지수법칙에 모순이 생긴다는 이유를 제시한 학생이 1명 있었다. 이것을 볼 때 많은 학생들이 0^0의 본질을 정확히 파악하고 있지 못하고 있음을 알 수 있었다. 정답인 부정형과 동일하다고 볼 수 있는 '정해지지 않는다' 또는 '정할 수 없다'라고 대답한 학생은 단지 2명이었으며 그 답변에 대한 이유는 제시하지 못하였다. 그리고 이 경우에 학생들이 부정형과 동일한 의미로 이러한 답변을 하였는지도 불분명하다. 교사에 대한 조사 결과와 비슷하게 선생님들은 0^0에 대해서는 대체로 정확한 설명을 해 주지 않고 있음을 알 수 있었다. 또한 0^0은 0 또는 1이라는 잘못된 개념을 가지고 있는 학생들도 있었다. 그리고 고등학교 현장에서 0^0의 값에 대하여 궁금하게 생각하는 학생들은 때때로 있는 것으로 보인다.

Ⅲ. 부정형 0^0에 대한 해석

0^0에 대한 해석을 논하기 전에 먼저 거듭제곱으로 표시된 세 가지 형태의 식 즉, 2^3, 2^0, 0^0의 의미와 값에 대하여 차례로 살펴보자.

먼저 2^3과 같은 식은 지수가 양의 정수인 경우로서 중학교 과정에서부터 다루어지고 있다. 이것은 단순히 $2\times2\times2$로서 중학교 과정의 지수법칙만으로도 그 의미와 값이 명확하게 파악된다. 그리고 밑과 지수를 ∞까지 확장시키기 위하여 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$2^3 = card(\{f \mid f:\{a,b,c\}\to\{a,b\}\})$$

여기서 $card(\{f \mid f:\{a,b,c\}\to\{a,b\}\})$는 집합 $\{a,b,c\}$에서 집합 $\{a,b\}$로의 함수 전체의 집합의 기수(cardinal number)이다.

다음으로 2^0은 밑이 0이 아닌 거듭제곱으로서 이것의 의미와 값은 다음과 같이 간단히 지수법칙을 이용하여 충분히 파악할 수 있다.

$$2^0 = 2^{3-3} = 2^3/2^3 = 1.$$

그리고 극한을 이용하여 다음과 같이 설명하는 것이 가능하다.

$$\lim_{x\to0} 2^x = 1.$$

위의 사실을 좀 더 일반화하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{x\to0} 2^{f(x)} = 1,\ \text{여기서}\ \lim_{x\to0} f(x) = 0.$$

세 번째로 0^0에 대해서는 코시에 의하여 최초로 부정형이라고 이해되었는데, 코시는 $f(x)$와 $g(x)$가 각각 독립적으로 0에 접근할 때 $f(x)^{g(x)}$의 극한값은 어떤 값으로 결정될 수 없으므로 0^0을 부정형 지수 형태(exponential indeterminate form)라고 생각하였다(Knuth, 1992; Moritz, 1921).

즉, 0^0의 경우에는 단순히 지수법칙을 이용하여 그 의미를 파악할 수 없으며 다음과 같은 극한을 이용한다.

$$\lim_{x\to0} f(x)^{g(x)},\ \text{여기서}\ \lim_{x\to0} f(x)=0,\ \lim_{x\to0} g(x)=0.$$

위의 극한 식에서 $f(x)$와 $g(x)$가 0에 접근하는 속도나 형태가 다를 수 있으므로 어떤 유일한 극한값이 존재하지 않게 된다는 것이다.

0^0에 대한 연구결과들을 살펴보면, 먼저 Lovitt(1918)은 아래의 간단한 상수 수열 예를 사용하여 0^0이 다양한 값으로 표현됨을 보였다.

$$(2^{-2})^{1/2}, (2^{-3})^{1/3}, (2^{-4})^{1/4}, \ldots.$$
$$(3^{-2})^{1/2}, (3^{-3})^{1/3}, (3^{-4})^{1/4}, \ldots.$$

Paige(1954)는 많은 학생들이 대수의 법칙을 토대로 하여 '0^0의 값은 1이 되어야 하지 않은가'라는 의문을 가지고 있음에 주목하면서 다음의 명제를 제시하고 증명하였다.

$f(0)=0$이고 $x=0$ 근방에서 $f(x)$의 도함수가 존재하며, $f'(x)$가 연속이고 $f'(0)\neq0$를 만족할 때, 만약 $\lim_{x\to0} x^{f(x)}$의 극한값이 존재한다면 그 값은 1이 되어야 한다.

이 명제에 대한 증명은 다음과 같다.

먼저 $\lim_{x\to0} x^{f(x)}$에 로그를 취하면, $\lim_{x\to0} \frac{\log x}{1/f(x)}$가 되고, 다시 로피탈 법칙을 적용하면 $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$가 된다. 위의 식에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}$의 극한값이 존재하고 그 값이 0임을 보임으로써 $\lim_{x\to0} x^{f(x)}=1$임을 증명하고자 한다. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}$의 극한값이 있다고 가정하면 0은 $f'(x)=0$이 되는 x 값들의 한 극한점이 될 수 없다. 왜냐하면 만약 그렇지 않다면 0이 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{f'(x)}$가 ∞이거나 '부정형'이 되는 x 값들의 극한점이 되기 때문이다. 그러므로

$$0<|x|<\delta\text{인 } x\text{에 대하여 } f'(x)\neq0$$

이 성립한다. 이것은 곧바로

$$0<x<\delta\text{인 } x\text{에 대하여 } f(x)\neq0$$

이 된다. 왜냐하면 만약 그렇지 않다면

$$0<\xi<\delta\text{인 어떤 } \xi\text{에 대하여 } f'(\xi)=0$$

이 되기 때문이다. 여기서 일반성을 잃지 않고 $0<x<\delta$ 구간에서 $f(x)>0$라고 둘 수 있다. 그

리고 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)} = L > 0$라고 가정하면, 다음을 만족하는 δ'이 존재한다.

$$0 < x < \delta' \text{인 } x\text{에 대하여 } \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{f'(x)} < \frac{3L}{2},\ \frac{2}{L} > \frac{f(x)}{f'(x)} > \frac{2}{3L}.$$

$f(x)$에 대하여 평균값정리를 적용하면 $0 < x < \delta''$인 x(δ''은 δ, δ'중에서 작은 수)와 $0 < \xi < x$인 어떤 ξ에 대하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = x\frac{f'(\xi)}{f'(x)} = x \cdot \frac{f(\xi)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

그리고 $f'(x) > 0$을 만족해야 함으로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{f(x)}{f'(x)} < \frac{3L}{2},\ \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} < \frac{2}{L},\ \frac{f(\xi)}{f(x)} < 1.$$

따라서 $0 < x < \delta''$인 x에 대하여 $\frac{f(x)}{f'(x)} < x \cdot 3$이 성립하며, 이로부터 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$이 된다. 이것은 $L \neq 0$라는 가정에 모순이 된다. 그러므로 $L = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$이 되어야 한다.

미적분학 책(Stain, 1982; Stewart, 2005)에서는 0^0의 형태를 다루기 위하여 $\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$와 같은 예가 사용되고 있고, 이들의 극한은 1이다.

Watson(1961)은 미적분학 책에서 0^0의 형태를 다루기 위하여 $\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$ 와 같은 예가 주로 사용됨으로써 '$a^0 = 1$, 단 $a \neq 0$'라고 정의하는 이유에 대하여 의문을 품는 학생들을 위하여 0^0이 1이 되지 않는 다음의 예를 제시하였다.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{a/\ln x},\ a\text{는 임의의 상수}$$

여기서 $z = x^{a/\ln x}$라 두고, 양변에 로그를 취하면

$$\ln z = \frac{a}{\ln x} \cdot \ln x = a$$

이고, 그러므로 $\lim_{x\to 0^+}\ln z = a$이다. 그런데 $\ln z = a$이므로 $z = e^a$이고,

$$\lim_{x\to 0^+} z = \lim_{x\to 0^+} x^{a/\ln x} = e^a$$

이다. 따라서, a가 0이 아니 경우에는 $\lim_{x\to 0^+} x^{a/\ln x} \neq 1$임을 알 수 있다. 그리고 이러한 예를 일반화하여 다음과 같은 정리를 제시하였다.

만약 $f(x)$는 연속이고 $0 < b < \infty$를 만족하는 b에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = b$이며, $g(x)$는 원점에서 연속이며 $h(x)$는 $0 < c < \infty$를 만족하는 c에 대하여 $\lim_{x \to 0^+} \frac{h(x)}{\ln x} = c$이고, 이 함수들이 모두 로피탈 법칙을 적용할 수 있는 도함수 성질을 만족한다면, $\lim_{x \to 0^+} [f(x)]^{g(x)/h(x)} = e^{g(0)/c}$ 이다.

Rotando(1977)는 초급 미적분학 책에서 자주 등장하는 예로서, 0^0의 극한값이 1이 되는 다음과 같은 식들을 제시하였다.

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\tan x},$$
$$\lim_{x \to 0^+} (e^{x+1} - e)^x,$$
$$\lim_{x \to 0^+} (\arctan x)^x,$$
$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{\sinh(x-1)}.$$

그리고 0^0 형태의 극한값이 항상 1이 되는 것은 아니라는 것을 Watson이 제시한 반례로써 설명하고, 0^0에 대한 그의 연구결과로서 다음과 같은 정리를 제시하고 증명하였다.

함수 f, g가 $x = 0$에서 0이 아닌 실수 값을 가지는 해석적(analytic) 함수이고, 0에 충분히 가까운 양의 x에 대하여 $f(x) \geq 0$라고 할 때, 만약 $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$이면, $\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = 1$이 된다.

위의 정리에서 한 점에서 함수가 해석적이라는 것은 테일러 급수로 나타낼 수 있음을 의미한다. 정리에 대한 증명은 다음과 같다.

먼저 로피탈 법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)^{g(x)} = \exp\left[\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}\right] = \exp\left[\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) g^2(x)}{-f(x) g'(x)}\right].$$

함수 f, g는 해석적이며 x가 0으로 접근할 때 두 함수의 극한값은 0이므로 연속성에 의하여 $f(0) = g(0) = 0$이 된다. 그리고 $x = 0$의 근방에서 함수 f, g는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(x) = x^m F(x),\ F(0) \neq 0,\ m\text{은 양의 정수},$$
$$g(x) = x^n G(x),\ G(0) \neq 0,\ n\text{은 양의 정수}.$$

여기서 함수 F, G는 $x=0$에서 해석적이다. 이 식을 위의 극한값 계산식에 대입함으로써 다음 식을 구할 수 있다.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{x^n[xF'(x)+mF(x)]G^2(x)}{-F(x)[xG'(x)+nG(x)]}\right].$$

분자 $N(x)\equiv x^n[xF'(x)+mF(x)]G^2(x)$와 분모 $D(x)\equiv -F(x)[xG'(x)+nG(x)]$ 는 모두 $x=0$에서 해석적이다. 그리고 $D(0)\neq 0$ 이고 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0^+} D(x)\neq 0$이다. 그러므로 $\lim_{x\to 0^+}[N(x)/D(x)]=0$이 되고, 따라서 $\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=1$이다.

지금까지 부정형 0^0과 관련된 연구들을 살펴보았다. 그러나 주로 이산수학적 관점에서 $0^0=1$로 계산되어야 한다는 주장도 있다. 대표적으로 Vaughan(1970)은 다음과 같은 몇 가지 이유를 내세우면서 0^0의 값은 보통 1로 취급되는 것이 바람직하다고 주장하였다.

첫째, $|x|<1$인 경우에 기하급수(geometric series)는 다음과 같이 계산된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

$|0|<1$이므로 $x=0$인 경우에도 위의 식을 그대로 사용하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0^{n-1} = \frac{1}{1-0}$$

이 되고, 이 식으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$0^0+0^1+0^2+\ldots=1.$$

위 식이 성립하기 위해서는 $0^0=1$로 정의되어야 한다.

둘째, 초월함수 e^x을 테일러정리를 이용하여 모든 x에 대하여 다음과 같이 다항함수로 근사적으로 나타낼 수 있다.

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$0!=1$이라고 정의할 때, 위의 식이 $x=0$인 경우에도 성립하려면 당연히 $0^0=1$이 되어야 한다.

셋째, 멱함수(power function)의 연속적인 곱셈을 편리하게 정의하기 위하여 Π 기호를 사용하여 재귀적으로 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{cases} \prod_{p=1}^{0} a_p = 1 \\ \prod_{p=1}^{n} a_p = \prod_{p=1}^{n-1} a_p \cdot a_n \end{cases}.$$

여기서 다음의 경우를 생각하자.

$$k \geq 0 \text{에 대하여, } x^k = \prod_{p=1}^{k} x.$$

그러면 다음과 같은 정의가 수반되어야 한다.

$$\text{모든 } x\text{에 대하여, } x^0 = \prod_{p=1}^{0} x = 1.$$

넷째, 만약 2^3을 아래와 같은 함수 집합의 농도(cardinality)로 정의할 경우에, 공집합에서 자신으로의 함수는 역시 공집합이지만 정확히 하나의 함수만 존재한다.

$$\{f | f : \{a,b,c\} \rightarrow \{a,b\}\}.$$

따라서 $0^0 = 1$이 된다.

끝으로 교육용으로도 사용될 수 있는 몇 가지 중요한 컴퓨터 소프트웨어들의 처리 방법을 살펴보면, GSP, MATLAB, 자바, 비주얼 C++, 비주얼 베이직, 플래시 액션스크립트 등을 사용하여 0^0을 계산하면 1이 된다. 반면에 Mathematica와 EXCEL에서는 부정형으로 표시된다.

Ⅳ. 0^0의 지도 방안

앞 절에서 부정형 0^0의 해석에 대하여 역사적, 수학적 분석을 통하여 살펴보았다. 0^0은 특정한 값을 가지지 않는 부정형으로 정의되며, 여러 수학자들에 의해 부정형임을 보여주는 예와 정리 등이 제시되었다. 또한 0^0의 값이 1이어야 되지 않겠느냐는 주장을 낳게 하는 예들도 있었으며, 그리고 몇 가지 컴퓨터 소프트웨어를 사용하여 0^0을 계산하면 그 결과가 1이 된다는 사실도 알 수 있었다.

극한과 미적분을 처음으로 배우기 시작하는 고등학생들은 본 연구의 실태조사뿐만 아니라 관련 자료를 통하여 판단할 때 0^0에 대하여 정확하게 이해하지 못하고 있는 경우가 많으며, 또한 0^0의 값이 무엇인지 궁금해 하는 경우도 종종 있다고 판단된다. 그러나 고등학교 현장의 교사들은 0^0의 값에 대하여 대체로 관심을 가지고 있지 않고, 0^0의 본질에 대한 보충설명 등을 하고 있지 않는 것으로 보인다. 따라서 교사나 예비교사는 본 고의 Ⅲ장에서 정리된 정도의 이론적 지식은 숙지하는 것이 바람직하다고 생각한다.

이 주제와 관련하여 먼저 중학교 과정에서의 지도 방안을 생각해 본다면, 8-가 단계의 '식의 계산' 단원에서 간단한 지수법칙에 대한 이해를 바탕으로 거듭제곱 계산을 할 수 있도록 하고 있는데, 지수가 자연수인 경우로 한정하고 있다. 극한개념이 아직 도입되지 않는 중학교 과정에서는 학생들의 인지수준을 고려할 때 서론에서 언급되었던 형식 불역의 원리에 입각하여 '정의할 수 없음(undefined)'으로 지도할 수 있다고 사료된다.

현 고등학교 교육과정에서는 지수를 유리수와 실수까지 확장하고 있으며 지수가 0인 경우에 대해서는 단지 '$a^0 = 1$(단 $a \neq 0$)' 이라고 정의하고 있다. 이러한 상황에서 교사가 0^0에 대하여 올바로 지도하는 것은 여러 가지 주변 여건과 학생들의 인지 수준을 함께 고려할 때 부담스러운 과제가 될 수 있다고 보아서 우리는 다음과 같은 지도 방안을 제시한다.

1. 0^0은 부정형이라는 사실에 대한 지도

학생들이 '0^0은 부정형'이라는 것을 모른다면 먼저 이 사실을 분명히 숙지시켜야 한다. 물론 0^0의 값에 대한 학생들의 구체적인 질문이 있을 경우는 더 말할 나위가 없다. 부정형임을 지도함에 있어서 부정형에 대한 개념을 학생들이 명확하게 파악하고 있는가를 먼저 확인해야 한다. 만약 그렇지 못하다면, 부정(不定, indeterminate)이란 '분명하게 정해지지 않는 것' 또는 '하나의 값으로 확정되어지는(determinate) 것이 아닌 경우'를 의미하는 것으로 정확하게 지도해야 한다. 이 때 학생들의 명확한 이해를 돕기 위하여 다음과 같은 가장 간단한 부정방정식, $ax = b$에서 $a = 0$, $b = 0$이 되는 경우에 x의 값이 무수히 많아지는 경우를 예로 사용하는 것도 좋을 것이다.

2. 부정형이 되는 이유에 대한 지도 방법

0^0이 부정형이 되는 이유를 다음의 예들을 사용하여 설명하는 것이 효과적이라고 사료된다.

(1) 가장 이해하기 쉬운 예로서 Ⅲ장에서 기술되었던 상수 수열들을 사용하여 그 수열들이 다양한 값으로 수렴됨을 보일 수 있다.

(2) 간단한 예 가운데 하나인 $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$을 증명과 함께 제시한다. 이 식에 대한 증명은 다음과 같다.

먼저 $y = x^x$라고 두면

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

이며, 로피탈 법칙을 사용하면

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

이 된다. 따라서

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

이 성립한다.

(3) 앞 장에서 기술되었던 다음의 예를 사용하여 극한값이 a의 값에 따라서 다양한 값이 될 수 있음을 설명한다.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{a/\ln x},\ a\text{는 임의의 상수}$$

3. 0^0은 1이 되어야 한다는 주장과 관련된 지도 방법

0^0의 값은 1이 되어야 한다고 잘못 생각할 수 있는 예들 가운데 고등학교 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 다음의 예를 제시해 줄 수 있다.

(1) 먼저 이항정리

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r,\ n \in N,\ N\text{은 자연수집합}$$

을 $n \in N \cup \{0\}$의 경우로 단순 확장하였을 때, 이 식에서 $a=1,\ b=-1$인 경우에는 ${}_0C_0 = 1$이므로 $0^0 = 1$이 된다.

(2) Vaughan(1970)이 제시한 예 즉, $|x| < 1$인 경우에 기하급수(geometric series) 계산식 즉,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

을 $x = 0$인 경우에도 그대로 사용하려면 0^0의 값은 1로 취급되어야 한다는 것도 좋은 예가 될 수 있다.

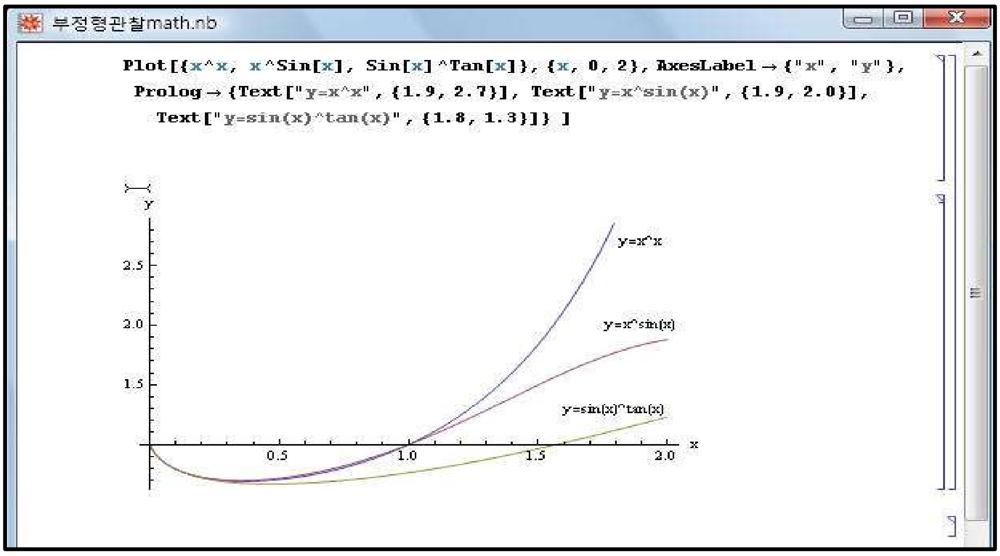
(3) 역시 Vaughan(1970)이 제시한 예로서 함수 집합 $\{f | f: \{a,b,c\} \to \{a,b\}\}$의 농도를 2^3으로 정의할 경우에, 공집합에서 자신으로의 함수는 역시 공집합이지만 정확히 하나만 존재하므로 $0^0 = 1$이 된다.

여러 단원에 걸쳐진 다양한 내용을 제시함으로써 그 자체만으로도 학생들의 수학에 대한 호기심, 그리고 수학적 사고를 장려할 수 있을 것이다. 그러나 주로 편의성(convenience)에 기반을 둔 이러한 주장들로 인하여 학생들이 0^0의 본질에 대하여 잘못 이해하는 일이 발생하지 않도록 주의해야 할 것이다.

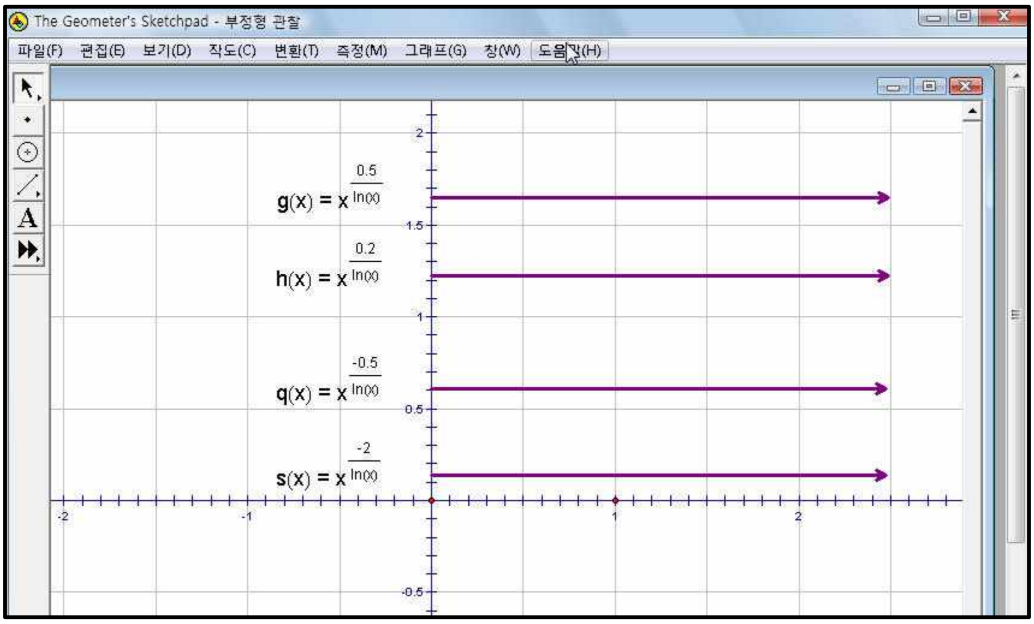
4. 시각화를 통한 지도

교사는 적당한 소프트웨어를 사용하여 시각화(visualization) 자료를 만들어 수업에 활용할 수 있다. 이러한 자료를 통하여 학생들이 0^0은 부정형이 됨을 직관적으로 예측해 볼 수 있게 할 수 있다. 또한 다양한 구체적인 그래프들을 하나의 창에 제시함으로써 0^0의 성질에 대한 학생들의 이해를 촉진할 뿐만 아니라 0^0에 대한 올바른 심상(mental image)을 가질 수 있도록 도와줄 수 있다. 그리고 이러한 자료는 형식적 증명의 전 단계에서 활용하여도 좋을 것으로 생각한다. <그림 1>은 mathematica를 사용하여 $\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$, $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$가 각각 서로 다른 접근 형태로 극한값이 1이 됨을 보여주는 자료이다. <그림 2>는 Watson(1961)이 제시하였던 예 즉, $\lim_{x\to 0^+} x^{a/\ln x}$는 상수 a의 값에 따라서 서로 다른 극한값을 가진다는 것을 시각적으로 보여주기 위하여 GSP를 사용하여 만들어진 자료이다.

끝으로 0^0은 하나의 값으로 확정되지 않는 부정형이라고 분명하게 교육되어야 한다. 그리고 학생들이 충분히 사고할 수 있는 시간이 주어지기 어려운 고등학교 수업 현장의 여건을 고려해 볼 때 수업시간에 어느 정도까지, 그리고 어떻게 이 주제에 대하여 설명할 것인가는 교사의 교수학적 판단에 의하여 결정되어야 할 것이다.



<그림 1> mathematica를 사용한 0^0에 대한 시각화 자료



<그림 2> GSP를 사용한 0^0에 대한 시각화 자료

Ⅴ. 요약 및 결론

고등학생들이 0^0과 같은 부정형을 처음 접할 때 모호성으로 인하여 이들을 올바로 이해하는데 상당한 어려움을 느끼는 것으로 알려져 있다. 고등학교 교과서는 지수가 0인 경우에 대하여 단지 '$a^0 = 1$(단 $a \neq 0$)' 이라고 정의하고 있다. 이러한 상황에서 교사의 올바른 지도가 없으면 자칫 학생들이 0^0의 값에 대한 잘못된 개념을 가질 수도 있다.

본 연구에서는 0^0과 관련하여 교육현장에서 발생 가능한 문제에 대하여 대비할 뿐만 아니라 이 주제에 대한 올바른 지도 방안을 모색한다. 이를 위하여 먼저 현장의 교수실태가 어떠한지 대략 파악하고, 0^0에 대한 역사적·수학적 분석을 통하여 그것의 본질을 정리하고, 효과적인 지도 방안을 논의해 봄으로써 현직교사 및 예비교사에게 0^0에 대한 하나의 교수 자료를 제공하고자 한다.

본 연구에서 수행한 학생과 현직 교사를 대상으로 한 실태조사뿐만 아니라 관련 자료를 통하여 판단할 때 많은 학생들이 0^0에 대하여 정확하게 이해하고 있지 못하며, 또한 평소에 0^0의 값이 무엇인지 궁금해 하는 경우도 종종 있는 것으로 보인다. 그러나 고등학교 현장의 교사들은 대체로 0^0의 정확한 해석에 대하여 별로 관심을 가지고 있지 않고, 평소에 0^0의 본질에 대한 설명을 거의 하고 있지 않는 것으로 보인다.

0^0의 해석에 대하여 정리해 본 바로는 0^0은 특정한 값으로 정해지지 않는 부정형으로 정의되며, 오랜 기간 동안 여러 수학자들에 의해 부정형임을 보여주는 다수의 예나 정리가 제시되었다. 또한 주로 이산수학적인 관점에서 0^0의 값이 1이 되어야 한다는 주장을 낳게 하는 예들도 있었다.

여유가 없는 고등학교 교육현장의 현실을 고려해 볼 때 교과서에 있는 내용만을 수업시간에 교수하는 데도 어려움이 많은 것으로 생각되지만, 적어도 이 주제에 대해서는 학생들의 정확한 개념 정립을 위하여 교사가 적정 수준의 보충설명을 하는 것이 바람직하다고 판단된다. 본 연구에서 제시한 지도 방안은, 먼저 만약 학생들이 '0^0은 부정형'이라는 것을 모른다면 이 사실을 부정형의 수학적 개념과 함께 분명히 숙지시키고, 부정형이 되는 이유는 고등학생들이 이해할 수 있는 수준의 예를 사용하여 설명한다. 그리고 0^0의 값은 1이라는 오류를 범할 수 있는 예들 가운데 고등학생들의 인지수준에서 이해할 수 있는 예들도 함께 제시해 주는 것도 학생들의 수학에 대한 흥미와 호기심 유발에 도움이 된다. 또한 적당한 소프트웨어를 사용하여 만든 시각화 자료를 수업에 활용함으로써 학생들이 0^0은 부정형이 됨을 직관적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있다. 고등학교 수학에서는 지수가 실수까지 확장되고, 학생들이 극한 개념을 학습하기 때문에, 단순히 형식불역의 원리에 기반한 '정의할 수 없음(undefined)'이라고 지도하는 것은 바람직하지 않으며 그것의 본질은 부정형이라고 정확하게 교육되어야한다고 사료된다.

마지막으로 본 연구에서 수행한 최근 고교졸업자와 현직 교사를 대상으로 한 실태조사의 결과는 대략적인 실태 파악을 위한 것으로서 전체적인 경향이라고는 볼 수 없다는 사실을 연구의 제한점으로 밝혀둔다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2007). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제 2007-79호.

박배훈 외 6인 (2002). 고등학교 수학I 교사용 지도서. 서울: 법문사.

박지현 (2007). 중학교 영재학생과 예비교사의 영(0)에 관한 인식과 오류. 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 46(4), pp.357-369.

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈 (2006). 수학교육학 연구방법론, pp.31-68. 서울: 경문사.

이강섭 외 6인 (2002). 고등학교 수학I 교사용 지도서. 서울: 지학사.

Knuth, D. E. (1992). Two Notes on Notation. *American Mathematical Monthly*, 99(5), pp.403-422.

Lovitt, W. V. (1918). Geometrical and Other Illustrations of Indeterminate Forms. *American Mathematical Monthly*, pp.41-44.

Moritz, R. E. (1921). On the Geometrical Representation of Indeterminate Forms. *American Mathematical Monthly*, 28(5), pp.211-217.

Paige, L. J. (1954). A Note on Indeterminate Forms. *American Mathematical Monthly*, 61, pp.189-190.

Rotando, L. M., & Korn, H. (1977). The Indeterminate Form 0^0. *Mathematics Magazine*, 50(1), pp.41-42.

Stain, S. K. (1982). Calculus and Analytic Geometry, Third Edition, pp.356-357. Columbus: McGraw-Hill.

Stewart, J. (2005). 대학미적분학, 제2판, pp.316-317. 서울: 경문사.

Vaughan, H. E. (1970). The Expression 0^0. *The Mathematics Teacher*, pp.111-112. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Watson, G. C. (1961). A Note on Indeterminate Forms. *American Mathematical Monthly*, 68(5), pp.490-492.

A Study on Teaching 0^0 in High School Mathematics

Kim, Dong Hwa

Department of Mathematics Education, Pusan National University, Jangjeon-dong, Geumjeong-gu, Pusan, 609-736 Korea
E-mail : dhgim@pusan.ac.kr

Hong, Woo Chorl

Department of Mathematics Education, Pusan National University, Jangjeon-dong, Geumjeong-gu, Pusan, 609-736 Korea
E-mail : wchong@pusan.ac.kr

It has been recognized for a long time that high school students have difficulty in properly interpreting the form 0^0. The treatment of 0^0 was still a subject of a slight controversy among mathematicians until relatively recently. Since the mathematics curriculum in high school does not provide the definite treatment of 0^0, some students might be inclined to ask what the value of the form is.

In this research, we review materials dealing with 0^0 and analyze historically and mathematically the form, whose true meaning is an indeterminate form. We identify the reality of the mathematics education in high school by conducting simple surveys targeting some high school teachers and the students who graduated from high schools recently. Then we discuss, for teachers and pre-service teachers, how to teach the form 0^0 in high school mathematics.

* ZDM Classification : D44
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : 0^0, indeterminate form, high school mathematics, teaching