East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 2, pp. 179-190

연산의 관점에서 본 등식의 성질에 관한 고찰

김 부 윤 · 정 영 우 · 박 영 식

ABSTRACT. We study the theoretical background on the relationship between the equality property and operations treated in different sub-areas in secondary school mathematics curriculum respectively studied. Furthermore, we discuss in detail the equality property in rational numbers field $\mathbb{Q}$ and the real numbers field $\mathbb{R}$. Through this study, professional knowledges of school teachers are enhanced so that these aforementioned knowledges are connected smoothly to teaching activities in classrooms.

Ⅰ. 서 론

중등학교 수학과 교육과정의 한 영역인 '수와 연산'은 수 개념의 이해와 수 연산의 이해 및 숙달을 목표로 한다. 바꾸어 말하면, 각 수 체계에 대한 이해를 목표로 하는 것이다. 수 체계에 대한 이해는 또한 방정식의 해를 구하기 위해 수를 확장시켜 온 인간 활동에 대한 이해이기도 하다. 자연수로부터 정수, 유리수, 실수, 복소수로 필요에 의해 수를 확장하여 정의하고 나면, 확장된 수 집합이 수 체계를 형성하는가가 과제가 된다. 이 때 수 체계를 형성한다는 것은 연산이 정의됨으로써 가능하게 된다. 따라서 연산에 대한 이해는 수 체계의 이해에 있어 중요한 요소이다.

현행 수학과 교육과정에서 '연산'에 관한 내용은 고등학교 1학년에서 다루어지고 있는데 그 내용은 다음과 같다.

2010년 1월 투고, 2010년 2월 심사 완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: 등식의 성질, 연산, 통분, Cauchy수열, Equality Property, Operations, Reduction (of fractions) to a common denominator, Cauchy Sequence

일반적으로 집합 A의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 어떤 연산 $\circ$을 한 결과가 항상 A의 원소일 때, 즉

$$a \circ b \in A$$

일 때, 집합 A는 그 연산 $\circ$에 대하여 **닫혀 있다**고 한다.

이 내용은 '*주어진 연산*에 대해 닫혀 있다.'는 정의를 한 것이다. 그러므로 이 내용이 도입되기 전에 '연산'에 대한 정의의 도입이 필요하다. 왜냐하면 현행 중등학교 교육과정에서는 사칙연산만을 다루고 있음에도 위와 같은 일반연산의 내용을 아무런 맥락 없이 사용함으로써 학생들은 연산 $\circ$를 사칙연산을 대표하는 문자 정도로 오해할 가능성이 있다. 실제로 이 후의 내용도 사칙연산에 관한 것만이 다루어지고 있다.

임의의 두 자연수를 더하거나 곱한 값은 항상 자연수이므로 자연수 전체의 집합은 덧셈과 곱셈에 대하여 닫혀 있다. 그러나 두 자연수를 빼거나 나눈 값은 자연수가 아닌 경우도 있으므로 자연수 전체의 집합은 뺄셈과 나눗셈에 대하여는 닫혀 있지 않다.

문제 2 정수 전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈(0으로 나누는 것은 제외) 중 어느 연산에 대하여 닫혀 있는지 조사하여라.

유리수 전체의 집합은 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 0으로 나누는 것을 제외하면 나눗셈에 대하여도 닫혀 있다.

실수 전체의 집합도 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 0으로 나누는 것을 제외하면 나눗셈에 대하여도 닫혀 있다.

그렇다면 왜 우리는 주어진 연산에 대해 닫혀 있는가를 판단해야 하는가? 그리고 주어진 연산은 어디에서 주어진 것인가? 이러한 의문에 대한 답을 위의 내용에서는 얻을 수 없다. 그러므로 교사는 방정식의 해를 구하기 위해 대수적 구조를 구성할 때의 핵심 요소인 '연산'의 의의가 잘 드러나도록 교과서의 내용을 재구성할 필요가 있다. 이를 위해 교사는 자신이 가르칠 지식에 대한 심도 있는 이해가 필요하다.

본 연구에서는 교사의 전문성 신장을 위하여 연산에 대한 배경적 이론을 제공한다는 의도에서 ① '연산'과 '등식의 성질'과의 관계를 알아보고, ② 등식의 성질이 가지는 '연산을 규정짓는 조건'이란 관점에서 등식의 성질에 대해 고찰하며, 마지막으로 ③ 연산이 가지는 의의를 경험시키기 위한 지도 방안을 제안한다.

Ⅱ. 본 론

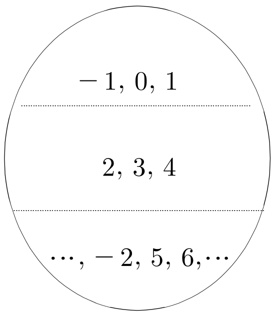
가. 연산의 정의와 등식의 성질과의 관계

김종태(2010)에 의하면, 일반적으로 집합 C에서 $\oplus$가 연산이 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다 :

① 만일 c_1, $c_2 \in C$이면, $c_1 \oplus c_2 \in C$이다. (닫혀 있다)
② 만일 $c_1 = d_1$이고 $c_2 = d_2$이면, $c_1 \oplus c_2 = d_1 \oplus d_2$이다. (등식의 성질)

예를 들어, 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$에 다음 그림과 같은 분할을 생각해 보자 :

$\mathbb{Z}$



$$\mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{\cdots, -2, 5, 6, 7, \cdots\}$$

즉, 분할 C를 $C = \{[-1], [2], [-2]\}$라 두자. 그리고 임의의 주어진 $[a_1]$, $[a_2] \in C$에 대하여 $\oplus$를

$$[a_1] \oplus [a_2] = [a_1 + a_2]$$

로 정의하자. 그러면 $\oplus$에 대해 다음 표를 얻을 수 있다 :

$\oplus$	$[-1]$	$[2]$	$[-2]$
$[-1]$	$[-2]$	$[-1]$	$[-2]$
$[2]$	$[-1]$	$[2]$	$[-1]$
$[-2]$	$[-2]$	$[-1]$	$[-2]$

위의 표에서 알 수 있듯이, C는 $\oplus$에 대해 닫혀 있다. 그러나 등식의 성질은 만족하지 않는다. 왜냐하면 예를 들어, $[-1]=[1]$이고 $[2]=[4]$이지만 $[-1]\oplus[2]=[1]=[-1]$이고 $[1]\oplus[4]=[5]=[-2]$이다. 그러므로 $[-1]\neq[-2]$이 되기 때문이다. 이렇게 등식의 성질이 성립하지 않으면 다음과 같은 문제가 생긴다. 예를 들어, 집합 C에서 방정식

$$\alpha\oplus[-1]=[2]$$

의 해를 구해보자. 그러면

$$\alpha=[3](=[2]),\ [5](=[-2])$$

와 같이 두 개의 해가 얻어지는데, 이것은 일차방정식의 해가 한 개 이하라는 명제에 위배된다. 이러한 결과는 위와 같은 분할 아래에서는 등식의 성질이 성립하지 않기 때문에 일어나게 된 것이다. 즉, 연산은 닫힘성과 함께 등식의 성질이 성립하여야 한다. 이처럼 등식의 성질은 연산을 규정짓는 중요한 개념이다.

그러나 실제 중학교에서 등식의 성질을 다루는 것은 중학교 1학년 '일차방정식의 풀이'와 관련된 단원인데, 이 때 다루는 수의 범위는 정수이다. 개정 수학과 교육과정에서도 다음과 같이 밝히고 있다 :

② 등식의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있다.

◦ 등식의 성질을 이해하게 한다.

등식의 양변에 같은 수를 더하거나 빼거나 곱하거나, 또는 0이 아닌 같은 수로 양변을 나누어도 등식이 성립함을 알게 한다.

◦ 등식의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있게 한다.

등식의 성질을 이용하여 '이항'의 뜻을 이해하고, 이항을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있게 한다.

그런데 정수는 그 표현이 유일하므로 똑같은 것을 더하고, 빼고, 곱하고, (0이 아닌 것으로) 나누어도 결과가 같다는 것은 어쩌면 너무나 자연스러운 현상이다. 그러나 이런 현상은 등식의 성질이 가지고 있는 가치의 한 단면만을 다루고 있을 뿐이다.

실제로 연산은 이항연산을 의미하며, 다음과 같이 정의한다 :

<정의 2.1> 집합 $A(\neq \varnothing)$의 임의의 원소 $x,\ y$에 대하여 A의 단 하나의 원소 z를 대응시키는 함수

$$f : A \times A \to A,\ f(x,\ y) = z$$

를 A 위의 이항연산(binary operation) 또는 간단히 연산이라 한다. 또 $\circ$와 같은 기호를 사용하여 $f(x, y)$를 $x \circ y$로 나타내고, f 대신에 $\circ$를 A 위의 연산이라 한다. 그리고 집합 A 위에 연산 $\circ$이 정의되어 있다(defined)고 한다.

<정의 2.2> 집합 A 위에 연산 $\circ$이 정의되어 있을 때, A의 부분집합 B에 대하여

$$a,\ b \in B \Rightarrow a \circ b \in B$$

인 경우에 집합 B는 연산 $\circ$에 대해 닫혀 있다(closed)고 한다.

이항연산의 정의에서 알 수 있듯이, 연산의 결과는 집합 A의 원소이다. 즉, 연산의 정의는 이미 닫혀 있다를 만족한다. 그러므로 '연산에 대하여 닫혀 있는가?' 라는 질문은 연산이 정의되는 집합에서는 의미가 없다. 만일 집합 A의 부분집합 B를 생각할 때 이 집합이 체의 구조를 이루기 위해서는 집합 A의 연산이 집합 B에서 만족되는가가 문제가 되는데, 이때 '등식의 성질'은 이미 구축되어 있으므로 '닫혀 있다'가 중요한 요소가 되는 것이다. 따라서 <정리 2.2>가 정의될 필요가 있는 것이다.

이제 수 집합의 경우로 한정하여 생각해 보자. 먼저 자연수와 정수는 그 표현이 유일하므로 연산을 정의할 때는 이 조건만으로도 충분하다. 그러나 잉여류 전체의 집합 $\overline{\mathbb{Z}_n}$이나 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$의 경우에는 한 집합 안에 상등에 의해 같은 것으로 분류되는 값들이 많이 존재한다. 집합에서는 같은 것을 하나의 원소로 처리한다. 따라서 집합에서는 같은 것과 다른 것을 구별 짓는 것이 중요하므로, 무엇을 같은 것으로 볼 것인가 하는 상등의 정의가 반드시 주어져야 한다. 예를

들어, $\overline{\mathbb{Z}_n}$이나 $\mathbb{Q}$의 경우, 상등은 동치관계와 동치류 개념을 이용하여 정의한다.

<정의 2.3> 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$ 위에 정의된 합동관계 $a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$에 의하여 결정되는 법 n에 관한 잉여류(residue class modulo n)를 다음과 같이 정의한다 :

$$\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)\}$$

<정리 2.1> 양의 정수 n에 대하여 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$이라 하고, 법 n에 관한 잉여류 전체의 집합을 $\overline{\mathbb{Z}_n}$이라고 하면, 다음이 성립한다 :

(1) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a \equiv b (\mathrm{mod}\ n)$

(2) 각 주어진 $a \in \mathbb{Z}$에 대하여 $a \equiv r\ (\mathrm{mod}\ n)$ 즉, $\overline{\mathbb{Z}_n}$에서 $\overline{a} = \overline{r}$인 정수 $r \in \mathbb{Z}_n$가 단 하나 존재한다. 따라서

$$\overline{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{a} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\},\ |\overline{\mathbb{Z}_n}| = |\mathbb{Z}_n| = n$$

이다. 여기서 $\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a\ (\mathrm{mod}\ n)\}$이다.

<정리 2.2> 양의 정수 n과 정수 a, b, c, d에 대하여, 만일 $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$, $c \equiv d\ (\mathrm{mod}\ n)$이면,

$$a + c \equiv b + d\ (\mathrm{mod}\ n),\ ac \equiv bd\ (\mathrm{mod}\ n)$$

이 성립한다.

법 n에 관한 잉여류 전체의 집합 $\overline{\mathbb{Z}_n} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$ 위에 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의하자.

$$\text{(i)}\ \overline{a} + \overline{c} = \overline{a+c} \qquad \text{(ii)}\ \overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{ac}$$

그러면 덧셈과 곱셈은 잉여류 $\overline{a}, \overline{c}$의 대표원 a, c에 관계없이 잘 정의된

(well-defined) 연산이다. 즉, $\overline{a}=\overline{b}$, $\overline{c}=\overline{d}$일 때, $\overline{a}+\overline{c}=\overline{a+c}=\overline{b+d}=\overline{b}+\overline{d}$, $\overline{a}\cdot\overline{c}=\overline{ac}=\overline{bd}=\overline{b}\cdot\overline{d}$ 이 성립한다. 실제로 $\overline{a}=\overline{b}$, $\overline{c}=\overline{d}$이면 $a\equiv b \pmod n$, $c\equiv d \pmod n$이므로

$$a+c\equiv b+d \pmod n,\ ac\equiv bd \pmod n$$

이고, 따라서 $\overline{a+c}=\overline{b+d}$, $\overline{ac}=\overline{bd}$이다.

여기서 '$\overline{a}=\overline{b}$, $\overline{c}=\overline{d}$일 때, $\overline{a+c}=\overline{b+d}$, $\overline{ac}=\overline{bd}$이 성립한다.'는 것이 등식의 성질이다. 그리고 자연수나 정수는 동치류를 자기 자신만을 원소로 가지게 정의할 수 있으므로 잘 정의된다. 그러므로 김종태(2010)의 연구에서 연산의 조건을 '닫혀 있다'와 '등식의 성질'로 규정한 것은 정당하다고 할 수 있다.

나. 유리수 체계에서의 등식의 성질

유리수는 $\frac{b}{a}(a,\ b\in\mathbb{Z},\ (a,\ b)=1)$로 정의되어진다. 이것은 유리수의 개념들 중 '비'에 대한 개념인데, 이 경우도 동치관계에 의한 동치류로 유리수의 집합을 정의한다. 또한 이것은 그리스 시대의 '통약가능성'을 내포하고 있는 개념이다. 이를 위해 먼저 상등(equality)의 개념을 다음과 같이 정의한다 :

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\ \Leftrightarrow\ ad=bc$$

서로 같은 것과 다른 것이 분류되고 나면, 이들 사이의 연산을 생각하게 된다. 유리수에서의 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 정의한다 :

$$\text{덧셈}:\ \frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$$

$$\text{곱셈}:\ \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$$

이제 이것이 연산이 됨을 보이자. 먼저 자연수는 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀 있

으므로 위의 덧셈과 곱셈은 $\dfrac{b}{a}(a,\ b \in \mathbb{Z})$ 꼴이 되어 유리수에 대해 닫혀 있다. 다음으로 등식의 성질을 만족하는지 보이자.

만일 $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$ 이고 $\dfrac{d_1}{c_1} = \dfrac{d_2}{c_2}$ 이면 $b_1 a_2 = a_1 b_2$ 이고 $d_1 c_2 = c_1 d_2$ 이다. 그리고 이것이 등식의 성질을 만족한다면, $\dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{d_1}{c_1} = \dfrac{b_1 c_1 + a_1 d_1}{a_1 c_1}$ 와 $\dfrac{b_2}{a_2} + \dfrac{d_2}{c_2} = \dfrac{b_2 c_2 + a_2 d_2}{a_2 c_2}$ 에 대해

$$\frac{b_1 c_1 + a_1 d_1}{a_1 c_1} = \frac{b_2 c_2 + a_2 d_2}{a_2 c_2}$$

이어야 한다. 그런데

$$\begin{aligned} \frac{b_1 c_1 + a_1 d_1}{a_1 c_1} = \frac{b_2 c_2 + a_2 d_2}{a_2 c_2} &\Leftrightarrow a_2 c_2 (b_1 c_1 + a_1 d_1) = a_1 c_1 (b_2 c_2 + a_2 d_2) \\ &\Leftrightarrow a_2 c_2 b_1 c_1 + a_2 c_2 a_1 d_1 = a_1 c_1 b_2 c_2 + a_1 c_1 a_2 d_2 \\ &\Leftrightarrow a_1 c_2 b_2 c_1 + a_2 c_1 a_1 d_2 = a_1 c_1 b_2 c_2 + a_1 c_1 a_2 d_2 \end{aligned}$$

이 되는데, 정수는 덧셈에 대해 교환법칙이 성립하므로 마지막 등식은 성립한다. 따라서 덧셈은 등식의 성질을 만족한다.

이제 곱셈에 대해 조사하자. 만일 $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$ 이고 $\dfrac{d_1}{c_1} = \dfrac{d_2}{c_2}$ 이면 $b_1 a_2 = a_1 b_2$ 이고 $d_1 c_2 = c_1 d_2$ 이다. 그리고 이것이 등식의 성질을 만족한다고 하면, $\dfrac{b_1}{a_1} \cdot \dfrac{d_1}{c_1} = \dfrac{b_1 d_1}{a_1 c_1}$ 와 $\dfrac{b_2}{a_2} \cdot \dfrac{d_2}{c_2} = \dfrac{b_2 d_2}{a_2 c_2}$ 에 대해 $\dfrac{b_1 d_1}{a_1 c_1} = \dfrac{b_2 d_2}{a_2 c_2}$ 이어야 한다. 그런데

$$\begin{aligned} \frac{b_1 d_1}{a_1 c_1} = \frac{b_2 d_2}{a_2 c_2} &\Leftrightarrow b_1 d_1 a_2 c_2 = a_1 c_1 b_2 d_2 \\ &\Leftrightarrow b_2 d_1 a_1 c_2 = a_1 c_2 b_2 d_1 \end{aligned}$$

이다. 정수는 곱셈에 대하여 교환법칙이 성립하므로 마지막 등식은 성립한다. 그러므로 곱셈은 등식의 성질을 만족한다. 따라서 위의 덧셈과 곱셈은 연산이다.

그런데 이것은 통분의 개념이기도 하다. 다음 예를 살펴보자. $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$이고 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$이다. 즉, 통분의 개념은 등식의 성질을 이용한 계산법이다. 그러므로 유리수의 성질에 대한 지도의 마지막 부분에서 '등식의 성질'을 지도해야 한다. 특히 '연산' 개념을 엄밀하게 지도하지 않는 중학교의 경우에는, 유리수가 체(field)임을 암묵적으로 지도하기 위하여 등식의 성질을 이용해서 연산의 의미를 충분히 경험시킬 필요가 있다. 그런 후에 일차방정식의 지도가 이루어져야 할 것이다. 더 나아가 시계산술(Clock Arithmetic)을 도입하는 것도 좋을 것이다. 왜냐하면, 유리수 체계와 시계산술은 둘 다 방정식을 만들 수 있는데, 유리수는 체가 되므로 해를 구할 수 있고, $n-$시계산술의 경우 ① 만일 n이 소수이면 체가 되어 해를 구할 수 있지만, ② n이 합성수이면 체가 되지 않으며, 따라서 방정식을 풀 수 없기 때문이다. 이러한 지도 내용은 대비 개념을 이용하여 체의 의미를 경험시키는 것으로 상승효과를 기대할 수 있는 소재가 된다.

다. 실수 체계에서의 등식의 성질

실수 역시 같은 값에 수렴하는 유리수 수열들을 동치류로 하여 상등을 정의할 수 있다. 그렇다면 $x,\ y\in\mathbb{R}$에 대하여 $x+y$와 $x\cdot y$를 어떻게 정의할 것인가? 먼저, '$x,\ y$가 실수이다.'는 것은 '$x,\ y$에 각각 수렴하는 유리수 수열이 존재한다.'는 것이다. 여기서 $x=\lim\limits_{n\to\infty}p_n,\ p_n\in\mathbb{Q}\ \ y=\lim\limits_{n\to\infty}q_n,\ q_n\in\mathbb{Q}$ 일 때,

$$x+y=(\lim_{n\to\infty}p_n)+(\lim_{n\to\infty}q_n)=\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n),\quad p_n+q_n\in\mathbb{Q}$$

$$x\cdot y=(\lim_{n\to\infty}p_n)(\lim_{n\to\infty}q_n)=\lim_{n\to\infty}(p_n\cdot q_n),\quad p_n\cdot q_n\in\mathbb{Q}$$

라 정의하자. 이 덧셈과 곱셈이 연산이 됨을 보이기 위해서는 등식의 성질이 만족됨을 보여야 한다. 이제 $x,\ y$로 수렴하는 또 다른 유리수 수열

$$x=\lim_{n\to\infty}p_n',\quad p_n'\in\mathbb{Q},\ y=\lim_{n\to\infty}q_n',\quad q_n'\in\mathbb{Q}$$

$$x+y=(\lim_{n\to\infty}p_n')+(\lim_{n\to\infty}q_n')=\lim_{n\to\infty}(p_n'+q_n'),\quad p_n'+q_n'\in\mathbb{Q}$$

을 생각하자. 그러면 $\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n)=\lim_{n\to\infty}(p_n'+q_n')$이어야 한다. 이것을 보이기 위해서는 $\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}r_n'=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ 이 성립함을 증명하여야 한다. 그런데 실수에서의 덧셈과 곱셈은 반드시 이렇게 정의할 수밖에 없다. 왜냐하면 유리수 체계가 가지고 있는 체의 구조를 보존하도록 실수 체계를 구성하고 있기 때문이다. 따라서 위의 덧셈과 곱셈이 연산이 되어야 하며, 이는 등식의 성질을 만족하게끔 하는 것이다.

이 문제를 해결하는 데에는 Cauchy수열이 사용된다. 여기서 $\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}r_n'$이라는 것은 수열 $\{r_n-r_n'\}_{n=1}^{\infty}$가 Cauchy수열이 된다는 것을 의미한다. 그러므로 Cauchy수열은 등식의 성질을 보이는 보조수단이 된다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}p_n'$라는 것은 수열 $\{p_n-p_n'\}_{n=1}^{\infty}$가 Cauchy수열이라는 뜻이고, 마찬가지로 $\lim_{n\to\infty}q_n=\lim_{n\to\infty}q_n'$이라는 것은 수열 $\{q_n-q_n'\}_{n=1}^{\infty}$가 Cauchy수열이라는 뜻이다. 그리고 위에서 정의한 덧셈 $\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n)=\lim_{n\to\infty}(p_n'+q_n')$은 수열 $\{(p_n+q_n)-(p_n'+q_n')\}_{n=1}^{\infty}$이 Cauchy수열이라는 뜻이다. $x\cdot y$도 마찬가지이다.

이처럼 정수와 유리수에서는 등식의 성질이 대수적인 관점에서 다루어질 수 있지만, 실수에서는 등식의 성질을 대수적으로 다룰 수 없기 때문에 Cauchy수열이 사용되게 되었다. 이것은 유리수 체계의 구조를 확장하여 실수 체계를 구축하기 위해 인간이 각고의 노력을 하는 과정에서 연산을 정의하는 것이 반드시 필요했기 때문이다.

Ⅲ. 결 론

'등식의 성질'과 '연산'은 중등학교 수학과 교육과정에서 '일차방정식의 풀이'와 '실수의 연산'을 위해 도입되고 있다. 그러나 연산, 특히 일반 연산을 정의함에 있어 등식의 성질은 필수적인 요소이다. 이러한 등식의 성질이 일차방정식의 풀이와 관련되어 지도되고 있는 탓으로, '연산을 규정짓는 조건'이란 측면이 가볍게 다루어지고 있음은 물론, 차후의 연산 지도에 있어서도 '닫혀 있다'라는 조건만이

강조되고 있다. 이는 <정의 2.2>에 관한 내용으로, 이 개념을 논하기 위해서는 전체집합과 그 집합에서 정의된 연산이 전제되어야 한다. 따라서 이것과 관련된 내용이 도입되어야 한다. 그리고 연산을 정의하려는 과정에서 등식의 성질을 만족시키려는 노력은 유리수의 계산이나 실수의 계산에서 또 다른 중요한 개념들인 통분의 개념을 형식화하거나 Cauchy수열의 또 다른 활용을 이끌어 수학적으로 그러한 지식들의 가치를 발하게 하고 있다.

따라서 중등학교에서의 등식의 성질은 중학교에서 유리수의 사칙연산을 지도할 때 도입되어야 하며, 통분이 등식의 성질에 의해 보장된다는 것을 지도하여야 한다. 그리고 이러한 것을 바탕으로 하여 고등학교에서 연산을 지도할 때에도 등식의 성질을 고려하여 연산에 대한 오개념이 생기지 않도록 하여야 할 것이다. 연산이란 '닫혀 있음'과 '등식의 성질'을 만족할 때 정의되는 개념이다. 그리고 연산의 조건은 방정식의 해의 존재성을 보장하는 요소이다. 그러므로 이러한 연산의 의의가 잘 드러나도록 지도할 필요가 있다. 따라서 다음과 같이 두 가지 지도 방안을 제안한다.

(방안 1) 관계나 규칙이란 용어로 계산규칙을 주고 '닫혀 있음'과 '등식의 성질'을 고려하여 연산을 정의하여야 한다. 예로써 자연수부터 실수까지의 수 집합에서 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 규칙이 연산이 되는지를 다룬다.

(방안 2) 연산이 정의된 임의의 집합의 부분집합에 대해 그 부분집합이 전체집합에서 주어진 연산에 대해 닫혀 있는지를 묻는 것이 바람직하다. 예를 들어, 실수에서 사칙연산을 정의하고 이 연산에 대해 자연수, 정수, 유리수가 닫혀 있는지를 다루는 것이다. 현행 교육과정의 내용은 후자의 내용에 가까우나 도입배경이 엄밀하지 못하며, 지도 순서도 실수가 가・감・승・제에 대하여 연산임을 보이고, 그 부분집합인 자연수, 정수, 유리수가 사칙연산에 대하여 닫혀 있는지 알아보아야 한다.

마지막으로, 연산을 정의하는 의의를 경험시키기 위해 시계산술을 도입하여 연산의 정의, 연산의 성질, 항등원, 역원을 지도하고, 체가 되는 경우와 그렇지 못한 경우를 경험시켜 방정식의 풀이와 연관시킬 필요가 있다.

더불어 교사들은 가르칠 지식에 대한 배경적 이해를 위하여 끊임없는 연구를 하여야 하며, 이를 통해 학생들이 자연스럽게 자주적으로 학습을 할 수 있는 환경을 구성해야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. 강철중 · 김부윤 (2002), 수학의 이모저모, 보성각.
2. 교육과학기술부 (2008), 고등학교 교육과정 해설 5-수학, 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.
3. 교육과학기술부 (2008), 중학교 교육과정 해설 Ⅲ, 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.
4. 김부윤 · 송영무 외 (2009), 중학교 수학 1, 교과서다음(주).
5. 김응태 · 박승안 (2003), 현대대수학, 경문사.
6. 김종태 (2010), 등식의 성질과 연산의 정의에 관한 연구, 부산대학교 대학원 교육학박사학위논문.
7. 이기안 · 소광호 · 김원기 (1996), 現代數學의 初步的 概念과 手法, 학문사.
8. 정동명 · 조승제 (2004), 실해석학 개론, 경문사.
9. 황선욱 · 강병개 · 김수영 (2009), 고등학교 수학, (주)좋은책 신사고.
10. 小松勇作 (1969). *解析概論(Ⅰ)*, 東京 : 廣川書店.

Kim Boo Yoon
Pusan National University
E-mail address: kimby@pusan.ac.kr

Chung Young Woo
University of Ulsan
E-mail address: nahime1130@hanmail.net

Park Young Sik
University of Ulsan
E-mail address: yspark@ulsan.ac.kr