East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 2, pp. 141-150

삼각형 한 내각의 삼등분선 길이

이 상 근 · 이 춘 구

ABSTRACT. In this study, we study on the length of bisector of angle by the method using the area, the method using the vector and the method using the similarity, also the length of trisector of angle by the method using the sine law, the method using the area and the method using the second law of cosine in triangle, respectively. And we study on the length of trisector of angle with the length of bisector in angle. This study is expected to use the learning materials for the interesting construction and the problem solving using trigonometric functions.

I. 서 론

수학과 교육과정(교육부, 1998, p. 29)에 의하면, 수학교육의 목표들 중의 하나는 '수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결'하는 것이다.

각은 평면도형을 구성하는 기본 요소들 중의 하나로, 역사적으로 많은 수학자들의 탐구 대상이 되어왔다. 예를 들어, 각의 이등분선 탐구, 각의 삼등분선 탐구, 각의 작도 가능성 탐구 등등이다.

임의 각의 삼등분에 관련된 최근의 연구로 종이접기를 이용한 각의 삼등분선 구하기를 들 수 있다. 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002)는 유클리드적 도구를 이용해 작도가능한 수들의 집합보다 종이접기를 이용해 표현할 수 있는 수들의 집합이 더 크다는 것을 대수적으로 보이면서, 임의의 각의 삼등분선을 접는 한 방법을 소개하였고, 이상근 · 이춘구(2007, 2008)는 각의 삼등분선에 대한 탐구를 종이접기에서 시작하여 각의 '삼등분선들의 다양한 위치와 방정식의 탐구'와 '각의 이등분선, 삼등분선의 방정식'을 연구하였다. 삼각형의 세 내각의 교점에 대한 연구는 미국 수학자 Frank Morley에 의해서 1899년에 발표되었다. 그리고 이상근 · 이춘구(2009)는 삼각형 세 내각의 교점이 만드는 정삼각형의 면

2010년 1월 투고, 2008년 2월 심사완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key Words: 이등분선, 삼등분선, 이등분선의 길이, 삼등분선의 길이

적을 각과 외접원의 반지름을 이용하여 표현하였다.

본 연구는 삼각형 내각의 이등분선과 삼등분선의 길이를 다양한 방법으로 구하는 문헌 연구이다. 본 연구로 얻어진 결과는 중등학교 수학에서 작도와 관련한 지식과 삼각형내각의 이등분선 및 삼등분선과 관련한 교과내용 영역을 넓힐 수 있을 것이다.

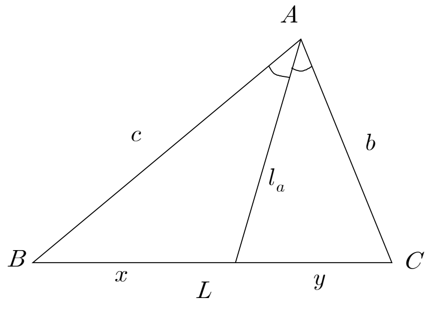
II. 삼각형 내각의 등분선 길이 구하기

1) 삼각형 한 내각의 이등분선의 길이 구하기

(1) 면적을 이용한 이등분선의 길이 구하기

삼각형 ABC의 각 A의 이등분선 l_a길이를 면적을 두 가지 방법으로 구하는 과정에서 사용되는 변의 길이를 이용하여 구할 수 있다. 면적을 이용하여 이등분선이 대변의 길이를 분할하는 비를 구할 수 있다는 것은 잘 알려진 방법이다. 이등분선에 의해서 분할되는 두 삼각형에서 이등분선이 공통변이고, 두 삼각형의 높이는 이등분선의 길이에 이등분각의 $\sin$값을 곱하여 구할 수 있다. 이렇게 구해진 이등분선은 삼각형 ABC의 면적을 $\overline{AB}:\overline{AC}$의 비율로 분할한다. 하지만 이등분선의 길이를 계산하는 방법이나 결과는 중등학교 교육과정에서 소개하는 내용이 아니라서 중등학생이나 교사가 쉽게 접할 수 있는 내용은 아니다. 그리고 이등분선의 길이는 면적을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있으며 사인법칙과 코사인 법칙, 비례식을 익힌 학생에게 이등분선과 연관하여 소개할 수 있는 심화교육 내용이다.

이등분선의 길이를 면적을 이용하여 계산하는 방법을 정리해 보자. (그림1)과 같이 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선을 l_a, $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AL}=l_a$, $\overline{BL}=x$, $\overline{CL}=y$라 두자. 그러면 $\overline{BC}=x+y$가 된다.



(그림1)

삼각형 ABC 면적은 삼각형 ABL 면적과 삼각형 ALC 면적의 합과 같으므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2}$$

이 식에 $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$2bc\cos\frac{A}{2} = (b+c)l_a.$$

한편 삼각형 ABL에서 코사인 제 2법칙을 적용하여 각을 표현하면 식

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{c^2+l_a^2-x^2}{c\,l_a}$$

이다. 이를 $2bc\cos\frac{A}{2} = (b+c)l_a$에 대입하면 $\frac{b(c^2+l_a^2-x^2)}{l_a} = (b+c)l_a$을 얻는다. 따라서

(1.1.1) $$bc^2 - bx^2 = c\,l_a^2$$

이다.

다음은 선분 BL의 길이 x를 삼각형 변의 길이 b, c를 이용하여 표현해보자. 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선 l_a는 밑변 BC를 $b:c$의 비로 분할하므로 $\frac{c}{b} = \frac{x}{y}$이 성립한다. 식 (1.1.1)에 $x = ck$, $y = bk$(k는 상수)를 대입하여 정리하면 $bc^2 - b(ck)^2 = cl_a^2$이고, 각 항을 c로 나누고 $bck^2 = bk(ck)$로 변형하면

(1.1.2) $$l_a^2 = bc - xy$$

이다. 그리고 (그림1)에서 $k = \frac{a}{b+c}$로 설정하면 $x = \frac{c}{b+c}a$, $y = \frac{b}{b+c}a$이다. 이것을 $l_a^2 = bc - xy$에 대입하여 정리하면 이등분선의 길이 l_a의 길이는 다음과 같이 표현된다.

$$l_a^2 = bc - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 bc = bc\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\right) = \frac{(a+b+c)(b+c-a)bc}{(b+c)^2}$$

따라서 이등분선의 길이 l_a는

(1.1.3) $$l_a = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)bc}}{(b+c)}$$

이다.

이등분선의 길이를 또 다른 방법으로 표현해 보자. 삼각형 세변의 길이의 합을 $2p$라 하면 이등분선의 길이는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

(1.1.4) $$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c},\ 2p = a+b+c$$

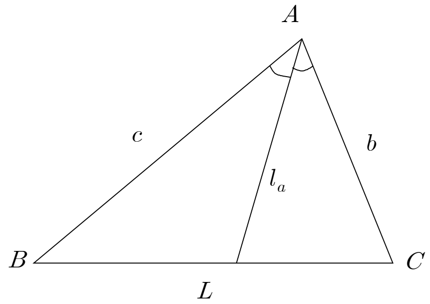
한각의 이등분선이 대변과 만나 대변을 분할하는 비율에 대해서는 중등학교 교육과정에 소개되고 있다. '각의 이등분선을 길이 구하기'는 한 각의 이등분선의 성질과 연계하여 심화과정의 학습 자료로 제시하기에 적당한 내용이다.

다음에 소개하는 '벡터를 활용한 이등분선의 길이 구하기'는 학생에게 벡터에 관한 이해

와 활용을 점검해 볼 수 있고 작도에 관한 흥미를 높일 수 있는 소재가 될 것이다.

(2) 벡터를 활용한 이등분선의 길이 구하기

(그림2)와 같이 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선을 l_a, 변 AB의 길이를 c, 변 AC의 길이를 b 그리고 각 A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 L이라 하고, 선분 AL의 길이를 l_a이라 하자.



(그림2)

이때, A를 시점으로 하는 위치벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 생각하면 벡터 $\overrightarrow{AL}$을 다음과 같이 표현할 수 있다.

(1.2.1) $$\overrightarrow{AL}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \quad (s+t=1,\ s,\ t\text{는 실수})$$

이를 활용하면 각 A의 이등분선의 길이 l_a는 $\|\overrightarrow{AL}\|$와 같으므로 내적을 활용하여 계산하면

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AL}\|^2 &= (s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\\ &= s^2\|\overrightarrow{AB}\|^2+2st(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})+t^2\|\overrightarrow{AC}\|^2\\ &= s^2c^2+2st(bc)\cos A+t^2b^2\end{aligned}$$

이다. 따라서 이등분선의 길이는 다음과 같이 표현될 수 있다.

(1.2.2) $$\|\overrightarrow{AL}\|=s^2c^2+2st(bc)\cos A+t^2b^2$$

삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선은 변 AB의 길이와 변AC의 길이에 따라 결정되며 이등분선이 만나는 점 L은 선분 BC를 $c:b$로 내분하는 점이다. 따라서 각 A를 이등분하는 벡터 $\overrightarrow{AL}$을 두 벡터$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$로 나타낼 때, s와 t는 각각 $s=\dfrac{b}{b+c}$, $t=\dfrac{c}{b+c}$이고, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로 이것을 (1.2.2)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AL}\|^2 &= \left(\frac{b}{b+c}\right)^2c^2+2\left(\frac{b}{b+c}\right)\left(\frac{c}{b+c}\right)(bc)\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+\left(\frac{c}{b+c}\right)^2b^2\\ &= 2\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2\left\{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2\left\{\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}\right\}$$
$$=bc\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\right)=\frac{(a+b+c)(b+c-a)bc}{(b+c)^2}$$

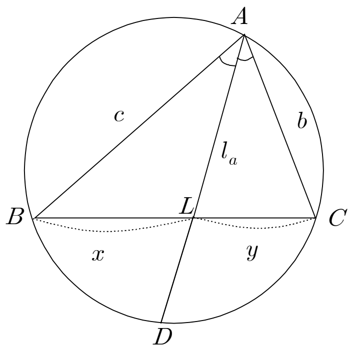
이다. 따라서 이등분선의 길이 l_a는 벡터 $\overrightarrow{AL}$의 크기 $\|\overrightarrow{AL}\|$와 같으며 그 값은

(1.2.3) $$l_a=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)bc}}{(b+c)}$$

이다.

벡터의 내적을 이용한 계산 결과는 면적과 삼각함수 덧셈정리를 이용하는 계산과 일치한다. 이것은 계산과정을 비교할 수 있는 교수학습 도구가 될 수 있으며, 나아가 삼등분선의 길이를 계산할 수 있는 가능성과 접근 방법을 제공한다고 할 수 있다.

(3) 삼각형의 닮음을 이용하여 이등분선 길이 구하기



(그림3)

(그림3)과 같이 삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선을 연장하여 변 BC와 만나는 점을 L, 외접원과 만나는 점을 D라 하고, 변 AC의 길이를 b, 변 AB의 길이를 c, 변 AL의 길이를 l_a, 변 BL의 길이를 x, 변 CL의 길이를 y라 하자. 그러면 삼각형 ACL와 삼각형 ABD는 닮음이므로

$$AB\cdot AC=AL\cdot AD=AL\cdot(AL+LD)=AL^2+AL\cdot LD=AL^2+BL\cdot CL$$

이 성립한다. 따라서

(1.3.1) $$AL^2=AB\cdot AC-BL\cdot CL$$

이고, $l_a^2=bc-xy$이 되어 식 (1.1.1)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

한편

$$x=\frac{ac}{b+c}=\frac{c\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}}{b+c}\ ,\ y=\frac{ab}{b+c}=\frac{b\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}}{b+c}$$

이므로

$$xy=\frac{bc(b^2+c^2-2bc\cos A)}{(b+c)^2}$$

이다. 이것을 (1.1.1) 대입하여 정리하면

$$l_a^2=bc-\frac{bc(b^2+c^2-2bc\cos A)}{(b+c)^2}=\frac{(bc)^2 2(1+\cos A)}{(b+c)^2}$$

이고, $1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}$ 이므로 이등분선의 길이 l_a는

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \tag{1.3.2}$$

로 표현된다.

2) 삼각형 한 내각의 삼등분선 길이 구하기

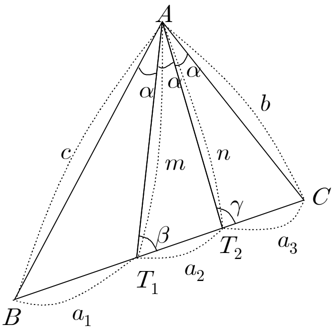
삼각형 내각의 삼등분선 길이를 '사인법칙을 이용한 방법', '삼각형의 면적을 이용한 방법', '각의 이등분선의 길이를 이용한 방법', '코사인 제2법칙을 이용한 방법' 등으로 구해 보자.

(1) 사인법칙을 이용한 삼등분선의 길이 구하기

(그림4)와 같이 각 BAC의 크기를 3α, 각 AT_1T_2의 크기를 β, 각 AT_2C의 크기를 γ라 하면

$$2\alpha+\beta+\angle C=\pi,\ \alpha+\gamma+\angle C=\pi$$

가 성립한다.



(그림4)

각 A의 삼등분선에 의하여 새롭게 만들어지는 삼각형 ABT_1, 삼각형 AT_1T_2, 삼각형 AT_2C의 세 삼각형에 사인법칙을 다음과 같이 각각 적용해 보자.

삼각형 ABT_1에서 $\dfrac{a_1}{\sin\alpha}=\dfrac{m}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin(\pi-\beta)}$ 이고,

(2.1.1) $$\frac{a_1}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin B}=\frac{c}{\sin(2\alpha+C)}$$

이다. 삼각형 AT_1T_2에서 $\dfrac{a_2}{\sin\alpha}=\dfrac{m}{\sin(\pi-\gamma)}=\dfrac{n}{\sin\beta}$ 이고,

(2.1.2) $$\frac{a_2}{\sin\alpha}=\frac{m}{\sin(\alpha+C)}=\frac{n}{\sin(2\alpha+C)}$$

이다. 또 삼각형 AT_2C에서 $\dfrac{a_3}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\gamma}=\dfrac{n}{\sin C}$ 이고,

(2.1.3) $$\frac{a_3}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin(\alpha+C)}=\frac{n}{\sin C}$$

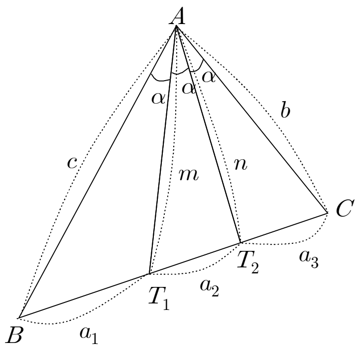
이 성립한다. 식 (2.1.1) 와 식 (2.1.3) 에서 삼등분선의 길이 m, n를 구하면 다음과 같다.

$$m=\frac{c\sin B}{\sin(2\alpha+C)}, \qquad n=\frac{b\sin C}{\sin(\alpha+C)}$$

그리고 이를 이용하여 삼각형의 한 내각의 삼등분선이 변을 분할하는 길이 a_1, a_2, a_3를 구하면 다음과 같다.

$$a_1=\frac{c\sin\alpha}{\sin(2\alpha+C)},\ a_2=\left(\frac{c\sin B}{\sin(2\alpha+C)}\right)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+C)},\ a_3=\frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+C)}$$

(2) 넓이를 이용하여 삼등분선의 길이 구하기



(그림5)

(그림5)에서 $S(\triangle ABC)=S(\triangle ABT_1)+S(\triangle AT_1C)$, ($S(\triangle ABC)$는 삼각형 ABC의 면적)가 성립하므로 각각의 면적을 구하여 비교해 보면 다음과 같다.

$$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}bc\sin3\alpha,$$

$$S(\triangle ABT_1)=\frac{1}{2}cm\sin\alpha,$$

$$S(\triangle ACT_2) = \frac{1}{2} bm \sin 2\alpha$$

따라서

(2.2.1) $$\frac{1}{2} bc \sin 3\alpha = \frac{1}{2} cm \sin\alpha + \frac{1}{2} bm \sin 2\alpha$$

이 되므로 삼등분선의 길이 m은

(2.2.2) $$m = \frac{bc \sin 3\alpha}{c \sin\alpha + b \sin 2\alpha}$$

이다. 또 식을 정리하면

$$bc(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) = cm \sin\alpha + bm 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$bc(3 - 4\sin^2\alpha) = cm + bm 2\cos\alpha$$

이므로

(2.2.3) $$m = \frac{bc(3 - 4\sin^2\alpha)}{c + 2b\cos\alpha}$$

이다.

코사인의 3배각의 공식에서 $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$와 같이 나타낼 수 있고, 또 삼각형 ABC에서 각A에 대한 코사인 제2법칙을 적용하면 $\cos 3\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$이 되므로

$$4t^3 - 3t - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0, \ (t = \cos\alpha)$$

을 계산하면 삼각형 한각의 삼등분선의 길이를 변의 길이만으로 표현할 수 있다.

(3)코사인 제2법칙을 이용하여 삼등분선의 길이 구하기

(그림5)에서 이등분선의 성질과 코사인 제2법칙을 적용해 보면

(2.3.1) $$c : n = a_1 : a_2,, \quad m : b = a_2 : a_3$$

(2.3.2) $$a_1^2 = c^2 + m^2 - 2cm\cos\alpha, \ a_2^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha, \ a_3^2 = b^2 + n^2 - 2bn\cos\alpha$$

을 얻을 수 있다. 그리고 식(2.3.2)을 변형하면

(2.3.3) $$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \frac{c^2 + m^2 - 2cm\cos\alpha}{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha} \ , \ \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2 = \frac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}{b^2 + n^2 - 2bn\cos\alpha}$$

을 얻을 수 있고 식 (2.3.3)에 식 (2.3.1)을 변형한 $a_1 = \dfrac{c}{n} a_2$, $a_2 = \dfrac{m}{b} a_3$을 대입하여 정리하면

(2.3.4) $$(c+n)m = 2cn\cos\alpha \ , \quad (m+b)n = 2bm\cos\alpha$$

이 된다. $(m+b)n = 2bm\cos\alpha$에서 n값을 구하여$(c+n)m = 2cn\cos\alpha$에 대입하여 정리하면

$$\left(c + \frac{2mb\cos\alpha}{m+b}\right)m = 2c\frac{2mb\cos\alpha}{m+b}\cos\alpha,$$

$$c(m+b) + 2mb\cos\alpha = 4bc\cos^2\alpha$$

이다. 따라서 삼등분선의 길이는

(2.3.5) $$m=\frac{bc(4\cos^2\alpha-1)}{c+2b\cos\alpha}$$

이다. (2.3.5)를 $(m+b)n=2bm\cos\alpha$에 대입하면 n값도 얻을 수 있다. 따라서 삼등분선의 길이 m, n은

(2.3.5) $$m=\frac{bc(4\cos^2\alpha-1)}{c+2b\cos\alpha},\ n=\frac{2b^2c\cos\alpha(4\cos^2\alpha-1)}{4bc\cos^2\alpha+2b^2\cos\alpha}$$

가 된다.

(4) 이등분선의 길이를 이용하여 삼등분선의 길이 구하기

(그림5)에서 이등분선의 길이를 식 (1.3.2)와 같이 표현해 보면 다음과 같다.

(2.4.1) $$m=\frac{(2cn)(\cos\alpha)}{(c+n)},\ n=\frac{(2bm)(\cos\alpha)}{(b+m)}$$

이다. 식 (2.4.1)에서 $n=\frac{(2bm)(\cos\alpha)}{(b+m)}$을 $m=\frac{(2cn)(\cos\alpha)}{(c+n)}$에 대입하면

$$m=\frac{(4bcm)(\cos^2\alpha)}{c(b+m)+(2bm)(\cos\alpha)}$$

$$mbc+cm^2+2bm^2\cos\alpha=4bm\cos^2\alpha$$

$$m^2(c+2b\cos\alpha)+m(bc-4bc\cos^2\alpha)=0$$

이 된다. 따라서 삼등분선의 길이는

$$m=\frac{bc(4\cos^2\alpha-1)}{c+2b\cos\alpha}$$

이 되고 식 (2.3.5)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

III. 결론

삼각형 내각의 이등분선 길이를 '삼각형의 넓이를 이용하는 방법'과 '벡터를 이용하는 방법', '삼각형의 닮음을 이용하는 방법'으로 구하여 이등분선 길이 l_a를 다음과 같이 표현하였다.

$$l_a=\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)bc}}{(b+c)}$$

또 삼각형 ABC에서 크기가 3α인 각 A의 삼등분선 각각의 길이 m, n을 '사인법칙'을 이용하여

$$m=\frac{c\sin B}{\sin(2\alpha+C)},\quad n=\frac{b\sin C}{\sin(\alpha+C)}$$

와 같이 구하였고, '삼각형의 면적', '이등분선의 길이', '코사인 제2법칙'을 이용하여

$$m = \frac{bc(4\cos^2\alpha - 1)}{c + 2b\cos\alpha}, \quad n = \frac{2b^2c\cos\alpha(4\cos^2\alpha - 1)}{4bc\cos^2\alpha + 2b^2\cos\alpha}$$

와 같이 구하였다. 그리고 각의 삼등분선이 대변과 만나는 점에 의해 분할되는 길이 a_1, a_2, a_3를 다음과 같이 표현하였다.

$$a_1 = \frac{c\sin\alpha}{\sin(2\alpha + C)}, \ a_2 = \left(\frac{c\sin B}{\sin(2\alpha + C)}\right)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + C)}, \ a_3 = \frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha + C)}$$

이와 같이 이등분선 길이와 삼등분선 길이를 다양한 방법으로 구하는 것은 중등학교학생들의 심화학습 자료로 활용가치가 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 수학교육논문집 13(2), pp. 457-475.

이상근 · 이춘구(2007). 각의 이등분 및 삼등분선의 탐구, 수학교육논문집 21(3), pp. 515-525.

이상근 · 이춘구(2008). 각의 삼등분선의 다양한 위치와 방정식의 탐구, 수학교육논문집 22(1), pp. 79-89.

이상근 · 이춘구(2008) Morley 정리의 한 증명방법과 그 활용에 대한 연구, East Asian Math. J. 24 No. 5. pp. 521-526.

박윤범 외 3명(2002). 수학8-나. 대한교과서(주).

임재훈 외 9명(2003). 수학Ⅱ. (주)두산.

한인기(2006). 수학교육학의 이론과 실제, 경남: 경상대출판부.

Lee, Sang Keun
Dept. of Math. Edu, and Education Research Institute
Gyeongsang National University
660-701, Korea
E-mail address: sklee@gnu.ac.kr

Lee, Chun Goo
Gyeongnam Science high school
668-851, Korea
E-mail address: chunn92@hanmail.net