한 국 통 계 학 회 논 문 집
2010, 17권, 3호, 459–471

공정능력지수 C_{pmk}를 평가함에서의 바람직한 가설검정

조중재[1,a], 유혜경[a], 한정수[a]

[a]충북대학교 정보통계학과

요 약

일반적으로 고객들은 어떤 상품에 대한 품질수준이 높을수록 보다 높은 만족을 얻는 것으로 알려져 있다. 보통 품질수준은 공정능력지수에 의해 측정된다. 공정능력이란 공정이 관리상태에 있을 때, 그 공정에서 생산, 제공되는 상품의 변동이 어느 정도인가를 나태내는 중요한 개념이다. 3세대 공정능력지수 C_{pmk}는 흔히 현장에서 사용되고 있는 지수 C_p나 C_{pk}보다 공정능력을 평가함에 보다 설명력이 있고 합리적인 지수라고 할 수 있다. 공정능력에 대한 효율성 평가는 대부분 점추정과 구간추정을 통하여 행하여지고 있는 바, 가설검정을 통한 의사결정 또한 중요한 문제라고 할 수 있다. 본 논문에서는 공정능력 여부를 결정하기 위하여 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 보다 유용한 가설검정 방법에 대하여 연구하였다. 제안된 붓스트랩 가설검정 방법은 공정분포가 정규분포에 따르던 그렇지 않던지 간에 매우 유용하며 보다 수월하게 활용할 수 있음을 밝혔다. 그리고 수치적인 모의실험을 통해 공정의 정규성 여부와 상관없이 제안된 가설검정 방법의 타당성을 밝히고자 하였다.

주요용어: 3세대 공정능력지수, 공정분포, 품질수준, 가설검정, 붓스트랩의 일치성, ASL(achieved significance level), 몬테칼로 실험, 극한분포.

1. 서론

공정능력(Process Capability)이란 공정이 관리상태에 있을 때, 그 공정에서 생산되는 제품의 품질변동이 어느 정도인가를 나타내는 중요한 개념이라고 할 수 있는 바, 많은 품질관리분야에서 공정능력분석이 보다 적극적으로 활용되고 있다. 제조업분야든 서비스 산업분야이든 공정(Process)과 관련하여 측정된 자료로부터 품질변동이 작으면 그 공정의 공정능력은 좋다고 말하고, 품질변동이 크면 공정능력이 나쁘다고 말한다. 6시그마 경영의 품질관리분야에서 널리 이용되고 있는 공정능력지수들은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
C_p &= \frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sigma},\\
C_{pk} &= \min\left\{\frac{\mathrm{USL}-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-\mathrm{LSL}}{3\sigma}\right\},\\
C_{pm} &= \frac{\mathrm{USL}-\mathrm{LSL}}{6\sqrt{E(X-T)^2}}.
\end{aligned}
$$

단, USL은 규격상한이고 LSL은 규격하한이다. 또한, μ는 공정평균, σ는 공정 표준편차이고, T는 목표치이다.

이 논문은 2008년도 충북대학교 학술연구 지원사업의 연구비지원에 의하여 연구되었음.
[1]교신저자: (361-763) 충북 청주시 흥덕구 성봉로 410, 충북대학교 정보통계학과, 교수. E-mail: jjcho@chungbuk.ac.kr

특히 위의 공정능력지수들의 단점들을 보완하여, Pearn 등 (1992)이 다음과 같이 정의된 제3세대 공정능력지수 C_{pmk}를 소개하였다.

$$C_{pmk} = \frac{\min(\mathrm{USL} - \mu, \mu - \mathrm{LSL})}{3\sqrt{E(X-T)^2}} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}.$$

단, 두 상수 d와 M은 각각 $d = (\mathrm{USL} - \mathrm{LSL})/2$이고, $M = (\mathrm{USL} + \mathrm{LSL})/2$이다.

여러 가지 공정능력지수들에 대한 통계적 추정 문제 관련 연구는 공정능력분석의 중요성에 비추어 볼 때 대단히 활발한 편이다. 하지만 가설검정에 관한 연구는 상대적으로 미흡하다고 할 수 있다. Wright (1998)은 정규공정하에서 공정능력지수 C_{pmk}의 플러그-인 추정량 $\hat{C}_{pmk}$의 확률밀도함수에 대하여 연구하였다. Pearn 등 (2001)은 정규분포 가정 하에서 공정능력지수 C_{pmk}에 관한 통계적 추론과 응용사례를 곁들여 고찰하였고, Lin과 Pearn (2002)는 정규분포 가정 하에서 편측 규격한계를 갖는 공정능력지수 C_{pu}와 C_{pl}에 대하여 여러 가지 표본크기 n과 유의수준 α에 따른 임계치들을 실험하여 가설검정 연구결과를 제시하였다.

하지만 이들 연구는 정규분포 가정하에서만 공정능력지수에 대한 가설검정 이론을 정립하다 보니 결과가 매우 제한된 내용이라 생각된다. 왜냐하면 간단한 공정능력지수에 대한 플러그-인 추정량의 정확한 확률분포함수를 유도하는 일이 매우 복잡할 뿐만 아니라, 경우에 따라 불가능하기도 하며 공정이 정규분포에 따르지 않는 경우엔 거의 연구결과가 없는 실정이기 때문이다.

한편 붓스트랩 방법은 컴퓨터가 널리 사용되면서 통계량의 표본분포와 추정이나 가설검정 문제에 효과적으로 활용될 수 있는 바, Efron (1979) 등이 여러 통계학 분야에 전반적으로 사용하기 시작하였다. Diciccio와 Tibshirani (1987)는 붓스트랩 신뢰구간과 붓스트랩 근사를 그리고 Hall (1988)은 여러 가지 붓스트랩 신뢰구간들을 이론적으로 폭넓게 비교·연구하였다. 그리고 붓스트랩 방법을 이용한 공정능력지수들에 대한 연구결과는 Franklin과 Wasserman (1992)를 시작으로, Cho 등 (1999)은 생산현장에서 가장 많이 사용되고 있는 공정능력지수 C_{pk}에 대하여 보다 효율적인 붓스트랩 신뢰구간 추정문제를 보다 심도 있게 연구하였다. 그리고 Cho 등 (2008)은 기본적인 공정능력지수 C_p, C_{pk}와 6 시그마 품질수준에 대하여 가설검정 문제를 붓스트랩을 이용하여 보다 효율적으로 연구하였다.

정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$을 갖는 공정분포 하에서는 공정능력지수 C_p와 C_{pk}에 대한 가설검정 문제와 관련된 연구 결과가 있다 (Lin과 Pearn, 2002; Lin, 2005). 그러나 관심공정이 정규분포에 따르지 않는 경우나 관심 모수가 단순하지 않은 경우에 기존의 연구방법으로는 가설검정문제를 해결하기에는 어려움이 있다. 따라서 여러 가지 공정능력지수들에 관한 가설검정 문제를 보다 효율적으로 연구하기 위한 방법으로, 붓스트랩을 활용하는 방법이 좋은 대안이 될 수 있다.

본 논문에서는 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 통계적 추정문제와 극한분포이론을 기초로 통계적 가설검정에 대해 연구하였다. 기존 연구 결과를 간략하게 살펴보고, 본 논문의 핵심적 내용인 붓스트랩 방법을 활용하여 여러 가지 공정분포 상황에 대한 유의확률과 유사한 개념의 ASL(achieved significance level)들을 계산함으로써 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 통계적 가설 검정을 보다 효과적으로 할 수 있음을 연구 · 제시하였다. 또한 정규성을 가정하지 않는 경우에도 다양한 컴퓨터 모의실험을 통하여 공정능력지수 C_{pmk}에 대해 가설검정 문제를 연구하여, 논문에서 제안한 붓스트랩 검정방법이 보다 효율적임을 입증하였다.

2. 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 통계적 추정

2.1. 정규공정 $N(\mu, \sigma^2)$하에서의 통계적 추정

정규공정 $N(\mu, \sigma^2)$로부터의 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 이용한 공정능력지수 C_{pmk}의 플러그-인

(plug-in) 추정량 $\hat{C}_{pmk}$은 다음과 같다.

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{d - |\bar{X} - M|}{3\sqrt{S^2 + (\bar{X} - T)^2}}.$$

단, $\bar{X} = 1/n \sum_{i=1}^{n}(X_i)$은 표본평균이고, $S^2 = 1/(n-1)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$은 표본분산이다.

기존 연구로 Wright (1998)는 추정량 $\hat{C}_{pmk}$의 확률분포함수에 대한 매우 복잡한 연구 결과를 제시하였으며, 이를 통하여 공정능력지수 C_{pmk}의 추정과 가설검정에 대한 연구가 가능하다.

또한 정규성 가정이 없는 경우에 Chen과 Hsu (1995)는 추정량 $\hat{C}_{pmk}$과 관련된 극한 분포결과를 다음과 같이 제시하였다.

정리 1. 4차 중심적률 $\mu_4 = E(X-\mu)^4$이 존재한다는 조건하에

$$\sqrt{n}\left(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk}\right) \xrightarrow{d} \begin{cases} N\left(0, \sigma^2{}_{pmk}\right), & \text{LSL} < \mu < M, \\ -\dfrac{|Y|}{3\tau} - \dfrac{dZ}{6\tau^3}, & \mu = M, \\ N\left(0, \sigma^2{}_{pmk}{}'\right), & M < \mu < \text{USL}, \end{cases}$$

여기서 $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$, $(Y, Z) \sim BN((0,0), \Sigma)$,

$$\begin{aligned} \sigma^2{}_{pmk} = \frac{1}{9\tau^6}\Big[&\left[\tau^2 + (T-\mu)\{d - (M-\mu)\}\right]^2 \sigma^2 - \mu_3\{d - (M-\mu)\} \\ &\times \left[\tau^2 + (T-\mu)\{d-(M-\mu)\}\right] + \frac{1}{4}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)\{d - (M-\mu)\}^2\Big], \\ \sigma^2{}_{pmk}{}' = \frac{1}{9\tau^6}\Big[&\left[\tau^2 + (\mu - T)\{d - (\mu - M)\}\right]^2 \sigma^2 - \mu_3\{d - (\mu - M)\} \\ &\times \left[\tau^2 + (\mu - T)\{d - (\mu - M)\}\right] + \frac{1}{4}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)\{d - (\mu - M)\}^2\Big]. \end{aligned}$$

2.2. 비정규 공정하에서의 통계적 추정

공정평균 μ와 공정분산 σ^2인 확률분포함수 $F(x)$로부터의 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$에 대하여 복원추출방법에 의한 경험분포함수(empirical distribution function) $F_n(x)$를 고려하면 붓스트랩 알고리즘(bootstrap algorithm)은 다음과 같다.

단계 1: 원래의 공정표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$에 기초한 경험분포함수 $F_n(x)$에 따르는 서로 독립이고 분포가 동일한 붓스트랩 표본(bootstrap sample) $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_m^*$을 얻는다.

단계 2: 붓스트랩 표본 $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_m^*$로부터 다음의 붓스트랩 표본평균 $\bar{X}^*$과 붓스트랩 표본 분산 S^2을 계산한다.

$$\bar{X}^* = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^*, \qquad S^{*2} = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i^* - \bar{X}^*\right)^2.$$

단계 3: 붓스트랩 표본평균 $\bar{X}^*$과 표본분산 S^{*2}을 이용하여 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 플러그-인(plug-in) 붓스트랩 추정량 $\hat{C}^*_{pmk}$을 다음과 같이 계산한다.

$$\hat{C}^*_{pmk} = \frac{\min(\text{USL} - \bar{X}^*, \bar{X}^* - \text{LSL})}{3\sqrt{S^{*2} + (\bar{X}^* - T)^2}}.$$

공정능력지수 C_{pmk}에 대한 효율적인 구간추정 문제에 관한 연구결과로 Cho 등 (2004)이 있으며, 위의 붓스트랩 알고리즘을 통한 가설검정 연구에서 매우 중요한 붓스트랩 극한분포이론 결과를 인용하면 다음과 같다 (Cho 등, 2004).

정리 2. 4차 중심적률 $\mu_4 = E(X-\mu)^4$이 존재한다는 조건 하에서, 위의 붓스트랩 알고리즘에서의 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$과 이 표본으로부터의 붓스트랩 표본 $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_m^*$에 대하여 표본크기 n과 m이 무한대(∞)로 커질 때 다음의 결과를 얻는다.

$$\sqrt{n}\left(\hat{C}^*_{pmk} - \hat{C}_{pmk}\right)\Big|\chi_n \xrightarrow{d} \begin{cases} N\left(0, {\sigma^2}_{pmk}\right), & \mu < M, \\ -\dfrac{|Y|}{3\tau} - \dfrac{dZ}{6\tau^3} + \dfrac{dY(T-\mu)}{3\tau^3}, & \mu = M, \\ N\left(0, {\sigma^2}_{pmk}{}'\right), & \mu > M, \end{cases}$$

여기서 $\tau = \sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$, $(Y, Z) \sim BN((0,0), \Sigma)$,

$$\begin{aligned} {\sigma^2}_{pmk} = \frac{1}{9\tau^6}\bigg[&\left[\tau^2 + (T-\mu)\{d-(M-\mu)\}\right]^2\sigma^2 - \mu_3\{d-(M-\mu)\} \\ &\times\left[\tau^2 + (T-\mu)\{d-(M-\mu)\}\right] + \frac{1}{4}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)\{d-(M-\mu)\}^2\bigg], \\ {\sigma^2}_{pmk}{}' = \frac{1}{9\tau^6}\bigg[&\left[\tau^2 + (\mu-T)\{d-(\mu-M)\}\right]^2\sigma^2 - \mu_3\{d-(\mu-M)\} \\ &\times\left[\tau^2 + (\mu-T)\{d-(\mu-M)\}\right] + \frac{1}{4}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)\{d-(\mu-M)\}^2\bigg]. \end{aligned}$$

그리고 정리 1과 정리 2로부터 붓스트랩 일치성을 기초로 포괄적인 모의실험을 통하여 여러 가지 붓스트랩 방법의 AN, SB, PB, BCPB, STUD, HYB, ABC 신뢰구간의 효율성을 중심으로 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 구간추정 연구를 수행하여 보다 유용한 결과를 얻었다 (Cho 등, 2004). 물론 정규근사방법의 신뢰구간을 포함하여 비교, 분석한 결과 SB방법과 STUD방법이 보다 효율적임을 입증하였고, 특히 STUD 방법을 본 논문에서의 가설검정 문제에 응용할 것이다.

3. 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설검정

공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설은 주로 다음과 같은 형태에 관심이 있다.

$$H_0 : C_{pmk} \le c \quad vs. \quad H_1 : C_{pmk} > c,$$

단, $C_{pmk} = (d - |\mu - M|)/(3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}\,)$이다.

우선, 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설검정을 위한 기존 연구결과를 고찰해 본다.

3.1. 정규공정 $N(\mu, \sigma^2)$하에서의 가설검정

정규공정 $N(\mu, \sigma^2)$하에서의 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설검정 연구결과로 Pearn 등 (2001)가 있으며, 이에 대한 개략적인 내용은 다음과 같다.

우선, 주어진 상수 $c(c = 1, 1.33)$에 대하여 관측값 c_0에 대응하는 유의확률(p-value)은 아래의 관계식들을 통하여 계산할 수 있다.

$$P\left\{\hat{C}_{pmk} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\} = P\left\{\frac{\bar{X} - \mathrm{LSL}}{3\sqrt{S_n^2 + (\bar{X} - T)^2}} \geq c_0,\ \frac{\mathrm{USL} - \bar{X}}{3\sqrt{S_n^2 + (\bar{X} - T)^2}} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\}$$
$$= P\left\{\frac{Z + \sqrt{n}d_1}{3\sqrt{Y + (Z + \sqrt{n}Q)^2}} \geq c_0,\ \frac{-Z + \sqrt{n}d_2}{3\sqrt{Y + (Z + \sqrt{n}Q)^2}} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\}.$$

단, $Y = nS_n^2/\sigma^2$, $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$, $d_1 = (\mu - \mathrm{LSL})/\sigma$, $d_2 = (\mathrm{USL} - \mu)/\sigma$, $Q = (\mu - T)/\sigma$이다.

만약 $T = M$이라면, 공정능력지수 C_{pmk}는 다음과 같이 표현된다.

$$C_{pmk} = \frac{d - |\mu - T|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{d/\sigma - |Q|}{3\sqrt{1 + Q^2}}, \quad \left(d = \frac{\mathrm{USL} - \mathrm{LSL}}{2}\right).$$

따라서 $C_{pmk} = c$라는 조건하에서, $d/\sigma = 3c\sqrt{1 + Q^2} + |Q|$이 성립된다.

$$d_1 = \frac{\mu - \mathrm{LSL}}{\sigma} = \frac{T - \mathrm{LSL}}{\sigma} + \frac{\mu - T}{\sigma} = \frac{d}{\sigma} + Q = 3c\sqrt{1 + Q^2} + |Q| + Q,$$
$$d_2 = \frac{\mathrm{USL} - \mu}{\sigma} = \frac{\mathrm{USL} - T}{\sigma} - \frac{\mu - T}{\sigma} = \frac{d}{\sigma} - Q = 3c\sqrt{1 + Q^2} + |Q| - Q.$$

그러므로 구하려고 하는 유의확률은 다음과 같이 표현된다.

$$P\left\{\hat{C}_{pmk} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\} = P\left\{\frac{\left(Z + \sqrt{n}d_1\right)^2}{Y + \left(Z + \sqrt{n}Q\right)^2} \geq 9c_0^2,\ \frac{\left(Z + \sqrt{n}d_2\right)^2}{Y + \left(Z + \sqrt{n}Q\right)^2} \geq 9c_0^2 \middle| C_{pmk} = c\right\}$$
$$= P\Big\{9c_0^2 Y \leq \left(1 - 9c_0^2\right)Z^2 + 2\sqrt{n}\left(d_1 - 9c_0^2 Q\right)Z + nd_1^2 - 9nc_0^2Q^2,$$
$$9c_0^2 Y \leq \left(1 - 9c_0^2\right)Z^2 - 2\sqrt{n}\left(d_2 - 9c_0^2 Q\right)Z + nd_2^2 - 9nc_0^2Q^2 \Big| C_{pmk} = c\Big\}$$
$$P\left\{\hat{C}_{pmk} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\} = P\left\{0 < Y < \Delta,\ A(Y) \leq Z \leq B(Y) \middle| C_{pmk} = c\right\}.$$

여기서, Δ, $A(Y)$, $B(Y)$는 각각 다음과 같다.

$$\Delta = \frac{n\left(3c\sqrt{1 + Q^2} + |Q|\right)^2}{9c_0^2},$$
$$A(Y) = \frac{1}{1 - 9c_0^2}\left[\sqrt{n}\left(9c_0^2 Q - d_1\right) + \sqrt{n\left(9c_0^2 Q - d_1\right)^2 - \left(1 - 9c_0^2\right)\left\{nd_1^2 - 9c_0^2\left(Y + nQ^2\right)\right\}}\right],$$
$$B(Y) = \frac{1}{1 - 9c_0^2}\left[\sqrt{n}\left(9c_0^2 Q + d_2\right) - \sqrt{n\left(9c_0^2 Q + d_2\right)^2 - \left(1 - 9c_0^2\right)\left\{nd_2^2 - 9c_0^2\left(Y + nQ^2\right)\right\}}\right].$$

정규성의 가정 하에서, Y와 Z의 확률밀도함수를 $f_Y(y)$, $\Phi(z)$라 하면 Y와 Z의 결합밀도함수는 $f_{Y,Z}(y, z) = f_Y(y)\Phi(z)$가 되므로 구하고자 하는 유의확률은 다음과 같다.

$$P\left\{\hat{C}_{pmk} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\} = P\left\{0 < Y < \Delta,\ A(Y) \leq Z \leq B(Y) \middle| C_{pmk} = c\right\}$$

$$= \int_0^{\Delta} f_y(y) \int_{A(y)}^{B(y)} \Phi(z) d_z d_y$$
$$= \int_0^{\Delta} f_y(y) \{\Phi(B(y)) - \Phi(A(y))\} d_y$$
$$= \frac{1}{\Gamma[(n-1)/2]2^{(n-1)/2}} \int_0^{\Delta} \{\Phi(B(y)) - \Phi(A(y))\} y^{(n-3)/2} e^{-y/2} d_y,$$

여기서 $\Phi(\cdot)$는 표준정규분포의 누적분포함수이다.

위의 결과로부터 Pearn 등 (2001)은 주어진 값 c, Q, n과 유의확률 α를 충족하는 임계값 c_0를 아래의 방정식에 의해 계산하고, 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설검정 문제를 포괄적으로 연구하여 유용한 표들을 제시하였다.

$$\alpha = P\left\{\hat{C}_{pmk} \geq c_0 \middle| C_{pmk} = c\right\}$$
$$= \frac{1}{\Gamma[(n-1)/2]2^{(n-1)/2}} \int_0^{\Delta} \{\Phi(B(y)) - \Phi(A(y))\} y^{(n-3)/2} e^{-y/2} d_y.$$

3.2. 비정규 공정하에서의 가설검정

두 번째 방법으로는 비정규 공정 하에서의 보다 정확하고 보다 효율적으로 유의확률을 근사적인 방법으로 계산할 수 있는 연구로, 본 논문의 주된 연구 내용 중의 하나라고 할 수 있다. 즉 가설 검정을 위한 보다 효율적인 방법으로 붓스트랩을 적용하는 것이다. 이 방법은 공정분포의 정규성을 가정하지 않는 경우에도 이러한 형태의 가설검정 문제에 활용할 수 있는 보다 포괄적인 방법으로 매우 유용하다고 생각된다.

앞에 있는 2.2절에서 제시한 붓스트랩 알고리즘 하에서 유의확률을 근사적으로 계산하여 결정하게 되는 바, 이에 대한 이론적인 근거로는 Efron과 Tibshirani (1993)와 Cho 등 (2004)를 활용하여 연구하였다.

우선, 공정능력지수 C_p에 대한 가설검정 연구결과 Cho와 Lim (2006)를 참고하여 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 검정절차의 내용은 다음과 같다.

주어진 공정표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 공정능력지수 추정량 $\hat{C}_{pmk}$, 그리고 붓스트랩 추정량 $\hat{C}^*_{pmk}$에 대해 표본크기 n이 커질 때 다음 사실이 성립한다 (Cho 등, 2004 참고).

$$\sqrt{n}\left(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk}\right) \overset{i.d.}{\cong} \sqrt{n}\left(\hat{C}^*_{pmk} - \hat{C}_{pmk}\right)\big|\chi_n$$

$$\sqrt{n}\left(\hat{C}^*_{pmk} - \hat{C}_{pmk}\right)\big|\chi_n \xrightarrow{d} \begin{cases} N\left(0, \sigma^2{}_{pmk}\right), & \mu < M, \\ -\dfrac{|Y|}{3\tau} - \dfrac{dZ}{6\tau^3} + \dfrac{dY(T-\mu)}{3\tau^3}, & \mu = M, \\ N\left(0, \sigma^2{}_{pmk}{}'\right), & \mu > M. \end{cases}$$

위에서 제시한 이론적 근거(붓스트랩 일치성)로 2.2절에서의 붓스트랩 알고리즘에 의해 붓스트랩 표본을 독립적으로 B번 확률추출하여 다음을 계산함으로써 공정능력지수 C_{pmk}의 가설검정에 필요한 유의확률을 근사적으로 계산하게 될 것이다.

$$\mathrm{ASL}_{boot} = \frac{\sum_{b=1}^{B} I\left(t(X^{*b}) \geq t_{obs}\right)}{B},$$

단, 함수 $I(t(x^{*b}) \geq t_{obs})$는 붓스트랩 알고리즘에 의해 계산되는 b번째 통계량으로, 연구결과 Cho 등 (2004)에 의해 다음의 STUD방법이 보다 더 효율적임을 알 수 있다. 물론, 많은 경우의 구간추정문제에서도 STUD방법이 매우 효율적임은 잘 알려져 있다.

이와같은 내용을 기초로 본 논문에서 제안할 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 검정방법은 STUD방법을 활용하는바, 함수 $I(t(X^{*b}) \geq t_{obs})$이 다음과 같은 경우이다.

$$I\left(t(X^{*b}) \geq t_{obs}\right) = I\left(\frac{\sqrt{n}\left(\hat{C}^{*b}_{pmk} - \hat{C}_{pmk}\right)}{\hat{\sigma}^{*b}_{pmk}} \geq \frac{\sqrt{n}\left(\hat{C}_{pmk} - c\right)}{\hat{\sigma}_{pmk}} \middle| C_{pmk} = c\right)$$

단, LSL $< \mu < M$인 경우의 분산 σ^2_{pmk}은 앞의 2절의 정리 1이나 정리 2에 제시되어있고, 그리고 플러그-인 추정량 $\hat{\sigma}^2_{pmk}$와 붓스트랩 추정량 $\hat{\sigma}^{2*}_{pmk}$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{pmk} &= \frac{1}{9\tau^6}\Bigg[\left[\tau^2 + (T-\mu)\{d-(M-\mu)\}\right]^2\sigma^2 - \mu_3\{d-(M-\mu)\} \\
&\quad \times \left[\tau^2 + (T-\mu)\{d-(M-\mu)\}\right] + \frac{1}{4}\left(\mu_4 - \sigma^4\right)\{d-(M-\mu)\}^2\Bigg], \\
\hat{\sigma}^2_{pmk} &= \frac{1}{9\hat{\tau}^6}\Bigg[\left[\hat{\tau}^2 + \left(T-\bar{X}\right)\left\{d-\left(M-\bar{X}\right)\right\}\right]^2 S^2 - \hat{\mu}_3\left\{d-\left(M-\bar{X}\right)\right\} \\
&\quad \times \left[\hat{\tau}^2 + \left(T-\bar{X}\right)\left\{d-\left(M-\bar{X}\right)\right\}\right] + \frac{1}{4}\left(\hat{\mu}_4 - \hat{\sigma}^4\right)\left\{d-\left(M-\bar{X}\right)\right\}^2\Bigg], \\
\hat{\sigma}^{*2}_{pmk} &= \frac{1}{9\hat{\tau}^{*6}}\Bigg[\left[\hat{\tau}^{*2} + \left(T-\bar{X}^*\right)\left\{d-\left(M-\bar{X}^*\right)\right\}\right]^2 S^{*2} - \hat{\mu}^*_3\left\{d-\left(M-\bar{X}^*\right)\right\} \\
&\quad \times \left[\hat{\tau}^{*2} + \left(T-\bar{X}^*\right)\left\{d-\left(M-\bar{X}^*\right)\right\}\right] + \frac{1}{4}\left(\hat{\mu}^*_4 - \hat{\sigma}^{*4}\right)\left\{d-\left(M-\bar{X}^*\right)\right\}^2\Bigg].
\end{aligned}$$

물론, 공정분포가 $N(\mu, \sigma^2)$인 경우에 표본분산 S^2과 τ^2의 추정량 $\hat{\tau}^2$, 그리고 3차 중심적률 μ_3와 4차 중심적률 μ_4의 추정량 $\hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4$는 각각 다음과 같다.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2, \quad \hat{\tau}^2 = S^2 + \left(\bar{X} - T\right)^2, \quad \hat{\mu}_3 = 0, \quad \hat{\mu}_4 = 3S^4.$$

하지만 공정분포에 대한 가정이 없으면, 위 식에서 3차 중심적률 μ_3와 4차 중심적률 μ_4의 추정량 $\hat{\mu}_3$와 $\hat{\mu}_4$는 다음과 같음에 유의해야 할 것이다.

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^3, \qquad \hat{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^4.$$

나아가 위의 추정량들로부터 붓스트랩 추정량들도 자연스럽게 붓스트랩 표본들로 표현되는 형태임을 고려하면 된다.

또한, $\mu = M$인 경우와 $M < \mu <$ USL인 경우에도 앞의 2절의 정리 1이나 정리 2에 있는 결과로부터 유사한 방법으로 점근적 분산에 대한 추정량들을 알 수 있다.

결론적으로 공정능력지수 C_{pmk}의 가설검정에 필요한 유의확률은 근사적인 값으로 다음의 ASL_{boot}로 표현되는 값들을 다음과 같이 제안하여 4절 모의실험으로 구현, 분석하고자 한다.

$$\text{ASL}_{boot} = \frac{\sum_{b=1}^{B} I\left(t(X^{*b}) \geq t_{obs}\right)}{B}$$

$$= \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I\left(\frac{\sqrt{n}\left(\hat{C}^{*b}_{pmk} - \hat{C}_{pmk}\right)}{\hat{\sigma}^{*b}_{pmk}} \geq \frac{\sqrt{n}\left(\hat{C}_{pmk} - c\right)}{\hat{\sigma}_{pmk}} \middle| C_{pmk} = c\right).$$

이러한 방법으로 계산될 근사적인 유의확률 ASL_{boot}은 붓스트랩 알고리즘에 의해 컴퓨터 실험으로 계산하여 얻게 되는 바, 유의확률(p-value)과 유사한 의미를 갖는 achieved significance level의 약자인 ASL_{boot} (Efron과 Tibshirani, 1993)를 사용하게 되며, 이는 계산 과정이 정규공정 하에서의 이론적인 유의확률의 계산보다 훨씬 간편하고 유용할 뿐만 아니라, 정규공정에 한정되지 않고 여러 가지 다른 공정들에도 쉽고 편하게 활용될 수 있다는 장점을 갖는다.

4. 모의실험

본 논문에서는 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설검정을 위한 관련된 모의실험을 수행하는데 있어서 붓스트랩 방법을 이용한다. 기존의 정규공정 하에서의 연구 결과와 달리 붓스트랩을 활용한 가설검정은 관심공정이 어떠한 형태의 분포를 따르더라도 보다 효과적이고 편리하게 응용할 수 있는 장점을 지니고 있다. 본 논문에서는 여러 붓스트랩 방법 중 보다 효율적인 추정방법 중 하나인 STUD방법을 사용하여 모의실험을 수행하였으며, (1) 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$, 그리고 (2) 카이제곱분포 $\chi^2(5)$를 이용한 간단한 변환과 (3) t분포 $t(5)$을 이용한 간단한 변환을 하여 공정분포의 평균은 공통적으로 $\mu = 50$이고, 분산 σ^2은 몇가지 값의 경우에 대해 모의실험을 수행하여 유의확률과 유사한 의미를 갖는 ASL_{boot}을 계산하였다.

특히, 모의실험을 수행하기 위하여 필요한 여러 가지 값들은 다음과 같다.

각각의 확률분포에 대해 목표값 $T = 51$, 중앙값 $M = 49$ 그리고 편의상 규격상한 USL = 59, 규격하한 LSL = 39로 설계하였다.

본 논문에서 수행한 모의실험 절차는 다음과 같다.

1단계: 주어진 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$으로부터 복원추출 방법에 의해 $n(30, 40, \ldots, 200)$개의 붓스트랩 표본 $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$을 얻는다.

2단계: 1단계의 붓스트랩 표본으로부터 붓스트랩 표본평균 $\bar{X}^*$와 붓스트랩 표본분산 S^{*2}을 계산하여 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 다음의 붓스트랩 추정량을 얻는다.

$$\hat{C}^*_{pmk} = \frac{d - |\bar{X}^* - M|}{3\sqrt{S^{*2} + (\bar{X}^* - T)^2}}.$$

3단계: 1, 2단계의 절차를 $B(= 1000)$번 반복 실행하여 ASL_{boot}값을 계산한다.

4단계: 1, 2, 3단계의 절차를 $N(= 1000)$회 반복수행하여 ASL_{boot}값들의 평균값과 표준편차(SD)를 계산한다.

위의 절차에 의한 모의실험을 수행하여 붓스트랩 검정의 타당성을 연구하고자 하는 바, 우선 3.1절의 가설검정 방법보다 유용하게 활용할 수 있을 것이다.

다음의 표 1은 공정의 분포가 정규분포를 따른다는 가정 하에서 가설

$$H_0 : C_{pmk} \leq c_0 \quad vs. \quad H_1 : C_{pmk} > c_0$$

을 검정하기 위해 표본크기를 달리하여 편의상 각각 $c_0 = 1, 4/3$인 경우에 대하여 붓스트랩 STUD방법에 의한 평균적인 ASL_{boot}값과 이 값들을 기초로 표준편차를 계산하였다.

표 1: 정규분포하에서의 ASL_{boot}값들의 평균과 표준편차

n	$H_0 : C_{pmk} \leq 1$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > 1$		$H_0 : C_{pmk} \leq 4/3$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > 4/3$	
	$N(50, 2.83^2)$	$N(50, 2.02^2)$	$N(50, 2.02^2)$	$N(50, 1.50^2)$
30	0.4899(0.3423)	0.0398(0.1360)	0.5183(0.3612)	0.0786(0.1928)
40	0.5034(0.3418)	0.0224(0.0957)	0.5067(0.3581)	0.0535(0.1536)
50	0.5018(0.3431)	0.0108(0.0613)	0.5257(0.3569)	0.0329(0.1160)
60	0.5081(0.3486)	0.0093(0.0592)	0.5099(0.3551)	0.0271(0.1067)
70	0.5047(0.3485)	0.0029(0.0229)	0.5107(0.3484)	0.0156(0.0692)
80	0.5145(0.3429)	0.0015(0.0162)	0.4999(0.3433)	0.0094(0.0545)
90	0.5076(0.3440)	0.0004(0.0075)	0.5062(0.3504)	0.0054(0.0339)
100	0.4965(0.3457)	0.0003(0.0052)	0.5064(0.3498)	0.0044(0.0308)
110	0.5134(0.3411)	0.0010(0.0196)	0.5160(0.3493)	0.0051(0.0432)
120	0.5048(0.3502)	0.0003(0.0047)	0.5080(0.3484)	0.0036(0.0294)
130	0.5127(0.3483)	0.0000(0.0011)	0.4831(0.3472)	0.0015(0.0177)
140	0.4950(0.3474)	0.0000(0.0008)	0.5005(0.3453)	0.0011(0.0109)
150	0.4928(0.3413)	0.0001(0.0043)	0.5006(0.3493)	0.0012(0.0211)
160	0.5125(0.3381)	0.0000(0.0000)	0.5083(0.3423)	0.0002(0.0019)
170	0.4956(0.3400)	0.0000(0.0000)	0.4997(0.3438)	0.0004(0.0079)
180	0.4976(0.3442)	0.0000(0.0000)	0.4992(0.3482)	0.0004(0.0067)
190	0.4756(0.3448)	0.0000(0.0000)	0.4977(0.3410)	0.0003(0.0061)
200	0.4943(0.3459)	0.0000(0.0000)	0.5009(0.3343)	0.0002(0.0065)

예를 들어, 표 1에서 공정분포 $N(50, 2.83^2)$로부터 크기 30의 표본을 임의추출하여, 가설 $H_0 : C_{pmk} \leq 1$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > 1$에 대한 가설검정을 위해 STUD방법으로 ASL_{boot}값을 계산하고 이를 $N(= 1000)$회 반복 수행한 결과 ASL_{boot}값들의 평균은 0.4899(표준편차 0.3423)이고, 표본크기가 40의 경우엔 ASL_{boot}값들의 평균이 0.5034(표준편차 0.3418), 그리고 표본의 크기가 200의 경우엔 ASL_{boot}값들의 평균이 0.4943(표준편차 0.3459)으로 모두 0.5에 가까운 값들을 보여주고 있다. 이는 귀무가설이 참이라는 확률이 대략 0.5, 대립가설이 참이라는 확률이 대략 0.5로 매우 자연스런 결과임을 뜻하며, 이 방법은 현 실험조건하에서 모의실험 알고리즘의 정당성을 보여주는 유용한 방법이라고 할 수 있다. 또한 공정분포 $N(50, 2.02^2)$로부터 크기 30의 표본을 임의추출하여, 가설 $H_0 : C_{pmk} \leq 1$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > 1$에 대한 가설검정을 위해 STUD방법으로 ASL_{boot}값을 계산하고 이를 $N(= 1000)$회 반복 수행한 결과 ASL_{boot}값들의 평균은 0.0398(표준편차 0.1360)으로 유의수준 0.05에서 귀무가설을 기각하여 C_{pmk}가 1보다 크다고 결론을 내릴 수 있으며, 표본의 크기 n이 증가할수록 ASL_{boot}이 작아 유의수준 0.01하에서도 귀무가설을 기각하여 보다 확실한 증거를 가지고 공정능력지수 C_{pmk}가 1보다 크다고 결론을 내릴 수 있는 지극히 자연스러운 결과임을 알 수 있다. 또한 표 1에서 가설

$$H_0 : C_{pmk} \leq \frac{4}{3} \quad vs. \quad H_1 : C_{pmk} > \frac{4}{3}$$

에 대한 모의실험 결과에서도 앞에서와 유사한 결과를 나타내고 있음을 알 수 있다.

특히, 특정 공정하에서는 3.1절의 가설검정 내용과 같은 매우 복잡하고 까다로운 계산을 거쳐 가설검정을 수행하여야 하지만, 논문에서 제안한 붓스트랩 방법을 통하여 보다 수월하게 검정을 할 수 있고 그리고 만족스러운 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

다음의 표 2와 표 3은 공정이 오른쪽으로 비스듬하고(right-skewed) 평균 μ와 분산이 σ^2이 되도록 카이제곱 분포 $\chi^2(5)$를 선형변환한 경우와 꼬리가 두터운(heavy-tailed) 분포로 평균 μ, 분산 σ^2이 되도록 $t(5)$분포를 선형변환한 경우에 대하여 각각 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설검정을 위해 모의실험한 결과이다. 즉, 각각의 경우에 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 가설 $H_0 : C_{pmk} \leq c_0$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > c_0$에

표 2: $\chi^2(5)$ 변환분포하에서의 ASL_{boot}값들의 평균과 표준편차

n	$H_0: C_{pmk} \le 1$ vs. $H_1: C_{pmk} > 1$		$H_0: C_{pmk} \le 4/3$ vs. $H_1: C_{pmk} > 4/3$	
	$\mu = 50$, $\sigma = 2.83$	$\mu = 50$, $\sigma = 2.02$	$\mu = 50$, $\sigma = 2.02$	$\mu = 50$, $\sigma = 2.15$
30	0.4603(0.2958)	0.0343(0.1096)	0.4787(0.3203)	0.0488(0.1347)
40	0.4728(0.2961)	0.0222(0.0822)	0.4782(0.3161)	0.0348(0.1078)
50	0.4711(0.2876)	0.0141(0.0666)	0.4719(0.3131)	0.0217(0.0851)
60	0.4693(0.2862)	0.0087(0.0484)	0.4756(0.3074)	0.0149(0.0666)
70	0.4699(0.2931)	0.0065(0.0401)	0.4921(0.2989)	0.0124(0.0553)
80	0.4930(0.2807)	0.0053(0.0391)	0.4767(0.2974)	0.0088(0.0516)
90	0.4739(0.2844)	0.0040(0.0320)	0.4820(0.2975)	0.0067(0.0439)
100	0.4638(0.2758)	0.0029(0.0231)	0.4635(0.2946)	0.0053(0.0357)
110	0.4848(0.2732)	0.0019(0.0220)	0.4912(0.2979)	0.0042(0.0326)
120	0.4791(0.2690)	0.0010(0.0126)	0.4889(0.2915)	0.0023(0.0214)
130	0.4892(0.2738)	0.0002(0.0032)	0.4950(0.2878)	0.0010(0.0098)
140	0.4824(0.2737)	0.0003(0.0044)	0.4654(0.2953)	0.0011(0.0110)
150	0.4688(0.2668)	0.0003(0.0051)	0.4916(0.2906)	0.0010(0.0121)
160	0.4958(0.2660)	0.0005(0.0062)	0.4717(0.2906)	0.0019(0.0197)
170	0.4999(0.2705)	0.0007(0.0148)	0.4748(0.2891)	0.0015(0.0202)
180	0.4914(0.2789)	0.0002(0.0024)	0.4895(0.2927)	0.0008(0.0088)
190	0.4840(0.2708)	0.0003(0.0097)	0.4998(0.2799)	0.0006(0.0118)
200	0.4895(0.2710)	0.0002(0.0038)	0.4773(0.2887)	0.0006(0.0089)

대한 붓스트랩 STUD방법의 검정 내용을 예시하기 위해 ASL_{boot}값들의 평균값과 표준편차를 계산하였다($c_0 = 1, 4/3$).

자유도가 5인 카이제곱 분포 $\chi^2(5)$와 자유도가 5인 t분포 $t(5)$에 대하여, 평균이 μ이고 분산이 σ^2이 되도록 각각 다음과 같은 선형변환을 통하여 모의실험을 수행하였다.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{10}}\left(\chi^2(5) - 5\right) + \mu, \qquad \frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{5}}t(5) + \mu.$$

이는 매우 복잡하고 까다로운 계산을 하여야 하겠지만, 본 논문에서 제안한 붓스트랩 방법을 통하여 매우 편리하고 유용한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

예를 들어, 공정평균 $\mu = 50$이고 분산이 $\sigma^2 = 2.83^2$이 되도록 위의 식과 같이 카이제곱 분포 $\chi^2(5)$를 선형변환한 모집단으로 부터 표본을 임의추출하였다고 하자.

이 때 다음의 표 2에서는 가설 $H_0 : C_{pmk} \le 1$ $vs.$ $H_1 : C_{pmk} > 1$에 대한 붓스트랩 검정을 위해 표본크기 30인 경우 STUD방법으로 ASL_{boot}값을 계산하고 이를 $N(= 1000)$회 반복 수행한 결과 근사적인 유의확률인 ASL_{boot}값들의 평균은 0.4603(표준편차 0.2958)임을 뜻한다. 또한, 표본크기 40인 경우 ASL_{boot}값들의 평균은 0.4728(표준편차 0.2961)으로 모두 0.5에 가까운 값들을 보여주고 있다. 이는 귀무가설이 참인 확률이 대략 0.5, 대립가설이 참인 확률이 0.5임을 뜻한다. 이 결과는 원래의 공정으로부터 계산된 공정능력지수가 $C_{pmk} = 1$이므로 붓스트랩 검정에 의한 당연한 결과로, 붓스트랩 모의실험 알고리즘의 유효함을 보여주는 유용한 방법이라 할 수 있다.

또한 공정평균이 $\mu = 50$, 분산이 $\sigma^2 = 2.02^2$이 되도록 $\chi^2(5)$를 변환한 모집단으로부터 표본크기 30인 확률표본을 추출한 경우, 그 때의 ASL_{boot}값들의 평균은 0.0343(표준편차 0.1096)으로 유의수준 5%하에서 유의하고, 또한 표본크기 40인 경우 그 때의 ASL_{boot}값들의 평균은 0.0222(표준편차 0.0822)으로 유의함을 알 수 있다. 그리고 표본의 크기가 증가하면 ASL_{boot}값들의 평균값은 0으로 수렴함을 알 수가 있다. 이러한 사실은 공정능력지수가 $C_{pmk} = 4/3$인 경우이므로 지극히 자연스러운 결과임을 알 수 있다. 또한 표 2에서 가설 $H_0 : C_{pmk} \le 4/3$ $vs.$ $H_1 : C_{pmk} > 4/3$에 대한 모의실험 결과도

표 3: $t(5)$ 변환분포하에서의 ASL_{boot}값들의 평균과 표준편차

n	$H_0 : C_{pmk} \leq 1$ *vs.*	$H_1 : C_{pmk} > 1$	$H_0 : C_{pmk} \leq 4/3$ *vs.*	$H_1 : C_{pmk} > 4/3$
	$N(50,\ 2.83^2)$	$N(50,\ 2.02^2)$	$N(50,\ 2.02^2)$	$N(50,\ 1.50^2)$
30	0.4202(0.3495)	0.0687(0.1843)	0.4324(0.3544)	0.1010(0.2200)
40	0.4293(0.3421)	0.0524(0.1597)	0.4540(0.3530)	0.0793(0.1932)
50	0.4446(0.3466)	0.0492(0.1508)	0.4572(0.3481)	0.0793(0.1871)
60	0.4481(0.3413)	0.0380(0.1315)	0.4344(0.3452)	0.0600(0.1647)
70	0.4571(0.3421)	0.0368(0.1254)	0.4393(0.3494)	0.0611(0.1643)
80	0.4604(0.3372)	0.0271(0.1056)	0.4585(0.3431)	0.0483(0.1390)
90	0.4570(0.3390)	0.0197(0.0906)	0.4404(0.3424)	0.0366(0.1200)
100	0.4652(0.3381)	0.0196(0.0934)	0.4456(0.3430)	0.0366(0.1254)
110	0.4519(0.3424)	0.0155(0.0763)	0.4510(0.3400)	0.0302(0.1088)
120	0.4616(0.3399)	0.0136(0.0736)	0.4472(0.3334)	0.0260(0.1044)
130	0.4578(0.3349)	0.0117(0.0742)	0.4555(0.3268)	0.0222(0.0977)
140	0.4433(0.3366)	0.0100(0.0698)	0.4551(0.3316)	0.0194(0.0887)
150	0.4667(0.3425)	0.0155(0.0847)	0.4534(0.3303)	0.0273(0.1093)
160	0.4753(0.3334)	0.0112(0.0726)	0.4629(0.3315)	0.0199(0.0919)
170	0.4564(0.3347)	0.0059(0.0451)	0.4631(0.3302)	0.0145(0.0698)
180	0.4566(0.3352)	0.0052(0.0467)	0.4636(0.3318)	0.0119(0.0649)
190	0.4577(0.3405)	0.0075(0.0567)	0.4443(0.3315)	0.0137(0.0748)
200	0.4632(0.3354)	0.0066(0.0561)	0.4630(0.3324)	0.0128(0.0724)

모집단 공정의 품질수준에 따라 앞에서와 유사한 실험결과를 나타내고 있음을 알 수 있다.

다음의 경우는 공정평균 $\mu = 50$이고 분산이 $\sigma^2 = 2.83^2$이 되도록 앞에서의 t분포 $t(5)$를 선형변환한 모집단으로 부터 표본을 임의추출하였다고 하자.

이 때 아래의 표 3에서는 가설 $H_0 : C_{pmk} \leq 1$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > 1$에 대한 붓스트랩 검정을 위해 표본크기 30인 경우 STUD방법으로 ASL_{boot}값을 계산하고 이를 $N(= 1000)$회 반복 수행한 결과 근사적인 유의확률인 ASL_{boot}값들의 평균은 0.4202(표준편차 0.3495)임을 뜻한다. 또한, 표본크기 40인 경우 ASL_{boot}값들의 평균은 0.4293(표준편차 0.3421)으로 모두 0.5에 가까운 값들을 보여주고 있다. 이는 귀무가설이 참인 확률이 대략 0.5, 대립가설이 참인 확률이 0.5임을 뜻한다.이 결과는 원래의 공정분포로부터 계산된 공정능력지수가 $C_{pmk} = 1$이므로 붓스트랩 검정에 의한 당연한 결과로, 붓스트랩 모의실험 알고리즘의 정당성을 보여주는 유용한 방법이라 할 수 있다.

또한 공정평균이 $\mu = 50$, 분산이 $\sigma^2 = 2.20^2$이 되도록 t분포 $t(5)$을 변환한 모집단으로부터 표본크기가 30인 확률표본을 추출한 경우, 그 때의 ASL_{boot}값들의 평균은 0.0687(표준편차 0.1843)으로 유의수준 10%하에서 유의하고, 또한 표본크기 40인 경우 그 때의 ASL_{boot}값들의 평균은 0.0524(표준편차 0.1597)으로 유의함을 알 수 있다. 물론, 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$와 선형변환한 $\chi^2(5)$ 변환분포의 경우보다는 ASL_{boot}값들의 평균이 상대적으로 큰 값을 갖는 특징이 있지만, 역시 표본의 크기가 증가하면 ASL_{boot}값들의 평균이 상대적으로 큰 값을 갖는 특징이 있지만, 역시 표본의 크기가 증가하면 ASL_{boot}값들의 평균값은 0으로 수렴함을 알 수가 있다. 이러한 사실은 공정능력지수가 $C_{pmk} = 4/3$인 경우이므로 지극히 자연스러운 결과임을 알 수 있을 것이다. 또한 표 3에서 가설 $H_0 : C_{pmk} \leq 4/3$ *vs.* $H_1 : C_{pmk} > 4/3$에 대한 모의실험 결과도 모집단 공정의 품질수준에 따라 앞에서와 유사한 실험결과를 나타내고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 3세대 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 통계적 추정문제와 관련된 연구결과들을 기초로

몇가지 공정 하에서 붓스트랩을 이용한 가설검정문제를 중심으로 연구하였는 바, 다음과 같은 유용한 연구 결과를 얻었다.

우선, 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 통계적 추정문제와 관련 극한분포이론을 소개하여 붓스트랩 방법의 일치성을 기초로, 보다 효율적인 신뢰구간을 제공해 주는 STUD 붓스트랩 방법을 연구배경으로 고려, 연구하였다.

결론적으로 논문의 핵심적 내용이라 할 수 있는 STUD 붓스트랩 방법을 활용하여 유의확률과 유사한 개념의 ASL_{boot}(achieved significance level)을 제안하고, 몇가지 공정 하에서 모의실험을 통해 공정능력지수 C_{pmk}에 대한 통계적 가설 검정을 보다 효과적으로 수행할 수 있음을 연구하였다. 이는 정규공정을 가정하지 않는 경우에도 컴퓨터 모의실험을 통하여 공정능력지수 C_{pmk}에 대해 가설검정 문제를 제안된 검정방법을 통해 보다 수월하게 보다 효율적으로 수행 할 수 있다는 것을 입증하였다.

참고 문헌

Chen, S. M. and Hsu, N. F. (1995). The asymptotic distribution of the process capability index C_{pmk}, *Communications in Statistics: Theory and Methods,* **24**, 1279–1291.

Cho, J. J., Park, B. S. and Kim, J. S. (1999). Better nonparametric bootstrap confidence intervals for capability index C_{pk}, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **12**, 45–65.

Cho, J. J., Park, B. S. and Park, H. I. (2004). Better confidence limits for process capability index C_{pmk} under the assumption of normal process, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **32**, 229–241.

Cho, J. J., Sim, K. Y. and Park, B. S. (2008). Statistical inference for process capability indices and 6 Sigma quality levels, *Communications of the Korean Statistical Society*, **15**, 451–464.

Cho, J. J. and Lim, S. D. (2006) Better statistical test for process capability index C_p, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **34**, 66–72.

Diciccio, T. J. and Tibshirani, R. (1987). Bootstrap confidence intervals and bootstrap approximations, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 163–170.

Efron, B. (1979). Bootstrap methods: Another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, **9**, 139–172.

Efron, B. and Tibshirani, R. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall, Inc..

Franklin, L. A. and Wasserman, G. S. (1992). Bootstrap lower confidence interval limits for capability indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 196–210.

Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals, *Annals of Statistics*, **16**, 927–953.

Lin, H. C. (2005). Using normal approximation for calculating the p-value in assessing process capability index C_{pk}, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **25**, 160–166.

Lin, P. C. and Pearn, W. L. (2002). Testing process capability for one-sided specification limit with Application to the voltage level translator, *Microelectronics Reliability*, **42**, 1975–1983.

Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capabiblity indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 216–231.

Pearn, W. L., Yang, S. L., Chen, K. S. and Lin, P. C. (2001). Testing process capability C_{pmk} with an application, *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering*, **8**, 15–34.

Wright, P. A. (1998). The probability density function of Process Capability Index C_{pmk}, *Communication in Statistics : Theory and Methods*, **27**, 1781–1789.

2010년 3월 접수; 2010년 4월 채택

Test of Hypothesis in Assessing Process Capability Index C_{pmk}

Joong-Jae Cho[1,a], Hye-Kyung Yu[a], Jung-Su Han[a]

[a]Department of Information & Statistics, Chungbuk National University

Abstract

Higher quality level is generally perceived by customers as improved performance by assigning a correspondingly higher satisfaction score. Usually, the quality level is measured by process capability indices. The index is used to determine whether a production process is capable of producing items within a specified tolerance. The third generation index C_{pmk} is more powerful than two useful indices C_p and C_{pk}. which have been widely used in six sigma industries to assess process performance. Most evaluations on process capability indices focus on point estimates, which may result in unreliable assessments of process performance. In this paper, we consider better testing procedure on assessing process capability index C_{pmk} for practitioners to use in determining whether a given process is capable. It is easy to use the proposed method for assessing process capability index C_{pmk}. Whether a process is clearly normal or nonnormal, our bootstrap testing procedure could be applied effectively without the complexity of calculation. A numerical result based on our proposed method is illustrated.

Keywords: Process capability index, test of hypothesis, p-value, bootstrap method, achieved significance level, monte-carlo experiment, limiting distribution.

This work was supported by Chungbuk National University Research Grant in 2008.
[1] Corresponding author: Professor, Department of Information & Statistics, Chungbuk National University, Cheongju 361-763, Korea. E-mail: jjcho@chungbuk.ac.kr