

## 단일항 안장점근사법에 의한 확산모형의 추정

이은경<sup>a</sup>, 이윤동<sup>1,b</sup>, 최영수<sup>c</sup>

<sup>a</sup>이화여자대학교 통계학과, <sup>b</sup>서강대학교 경영학부, <sup>c</sup>한국외국어대학교 수학과

### 요약

최근 확산모형의 추정을 위한 매우 다양한 방법론들이 제시되고 연구 되어 왔다. 본 연구에서는 제안된 확산모형의 추정 방법 중에서, 안장점근사법을 이용한 확산모형의 모수 추정방법에 대하여 살펴보게 되고, 가장 단순한 형태의 안장점근사법인 단일항 안장점근사법의 사용을 제안하게 된다. 단일항 안장점근사법은 오일러근사법과 마찬가지로 계산속도가 빠르고, 다양한 모형에 적용이 가능하면서도 최대우도추정량과 마찬가지로 성능이 우수한 특성을 갖고 있음을 살펴보게 된다. OU 확산모형을 대상으로 한 시뮬레이션 연구를 통하여 단일항 안장점근사법을 이용한 추정량과 다른 추정량들과의 성질을 비교한다.

주요어: 확산모형, 안장점근사법, 전이확률밀도.

### 1. 서론

이또확산과정은 금융현상의 확률적 해석을 위하여 자주 사용되는 수리적 모형으로 다음과 같이 정의된다. 이또확산과정(Itô diffusion process)  $X_t$ 는, 추세계수  $a_t = a(X_t)$ 와 확산계수  $b_t = b(X_t)$ 를 갖는 확률편미분방정식

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t \quad (1.1)$$

의 해로서 주어지는 연속형 표본경로를 갖는 연속시간 마코프 확률과정이다. 이또확산과정에 대한 수리적 성질은 Kloeden과 Platen (1999, p.36)과, Oksendal (2003, p.114, p.149)에서 찾을 수 있다.

금융현상을 설명하기 위하여 다양한 형태의 이또확산모형이 제안되고 연구되었다. Chan 등 (1992)과 Ahn과 Gao (1999)에는 이들 모형들에 대하여 잘 정리되어 있다. 대표적인 (이또)확산모형으로는 Cox (1975)가 제안한 CEV 모형, Ornstein-Uhlenbeck(OU) 확률과정에 해당하는 Vasicek (1977) 모형, Cox 등 (1985)에 의하여 제안된 CIR 모형 등이 있다. Chan 등 (1992)이 제안한 CKLS 모형은 확률편미분방정식

$$dX_t = (\alpha + \beta X_t)dt + \sigma_0 X_t^\gamma dW_t$$

을 만족하는 확산확률과정이다. 이때  $\gamma = 0$ 인 경우가 Vasicek 모형이고,  $\gamma = 0.5$ 인 경우가 CIR모형이다.

확률편미분방정식 (1.1)의 추세계수  $a_t$ 와 확산계수  $b_t$ 는 특정 모수들을 포함하는 형태로 정의된다. 예를들어 CKLS 모형은 모수  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_0, \gamma)$ 를 포함하고 있고, Vasicek 모형은 모수  $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_0)$ 를 포

본 연구는 한국연구재단(NRF) 중점연구소 지원사업(2009-0093827), 서강대학교 2009년 교내연구비, 2009학년도 한국외국어대학교 교내학술연구비의 지원에 의하여 수행되었음.

<sup>1</sup> 교신저자: (121-742) 서울시 마포구 신수동 1번지, 서강대학교 경영학부, 부교수. E-mail: widylee@sogang.ac.kr

함하고 있다. 추정대상이 되는 모수들의 집합을  $\theta$ 라고 표시할 때, 추계계수  $a_t$ 와 확산계수  $b_t$ 가  $\theta$ 의 함수임을 명시하기 위하여, 필요에 따라  $a(x, \theta)$ 나  $b(x, \theta)$ 와 같은 방법으로 나타내기도 한다.

추계계수가  $a(\cdot, \theta)$ 이고 확산계수가  $b(\cdot, \theta)$ 로 주어지는 확률편미분방정식 (1.1)은 확률과정  $X_t$ 에 대한 연속된 시구간에서의 확률분포를 특정하는데 반하여, 모형의 추정을 위하여 자료로 제공되는 값  $\{X_{t_i}\}_{i=0}^n$ 들은 이산적인 시점  $\{t_i\}_{i=0}^n$ 에서 관측된 값들이다. 자료는 이산 시점에서 얻어진 자료인데 반하여, 주어진 모형은 연속 시간 모형이므로, 이산 시점 관측자료로부터 확산모형을 추정하기 위해서는 관측되지 않은 많은 시점에서의 자료가 결측치가 되는 그런 경우에 대한 추정 방법이 필요하다. 이를 위하여 사용되는 대표적인 추정방법으로는, 크게 우도 중심의 추정법과 적률 중심의 추정법으로 나눌 수 있다. 적률 중심의 추정법에는, 일반화 적률추정법(Generalized Method of Moments; GMM), 시물레이션 적률추정법(Simulated Method of Moments; SMM) 등의 방법이 있다. 적률추정법은 우도추정법과 달리 정확한 우도를 알 필요 없고, 모형으로 가정되는 분포의 적률과 자료에서 얻어지는 표본 적률 사이의 관계만 일치시키면 되므로, 제시된 모형과 자료가 정확하게 일치하지 않아도 사용할 수 있는 강건한(robust) 추론법으로, 전통적으로 널리 사용되어온 확산모형 추정방법이다. 우도추정법과 적률추정법 이외에도 비모수적추정법이나 간접추정법(indirect inference) 등의 방법이 연구되고 제안되기도 하였다. Hurn 등 (2007)은 다양한 추정방법들의 성질을 심도있게 비교연구하였다.

최근의 금융관련 분야의 연구들에서 제안되는 확산모형은 그 모형의 형태가 점점 더 복잡해지고 사용되는 모수도 많아지는 경향이 있다. 그에 맞추어 추정방법 측면에서도 이전에 자주 사용되던 방법들보다 정교한 추정이 가능한 방법들에 대한 관심이 커지고 있고 관련연구가 진행되고 있다. 이에 따라 이전에 자주 사용되던 일반화 적률법보다, 모형에 대한 민감한 추정이 가능한 우도추정법들에 대한 학술적 관심이 증가하고 있다.

우도추정법은 확산모형으로부터 다양한 방법을 통하여 이산 시점들 사이에서의 전이확률밀도(transition density)를 구하고 그에 관측자료를 대입하여 얻어지는 값들의 곱으로 우도를 구하고, 이를 최대화 하는 모수의 값을 추정량으로 하는 방법이다. 전이확률밀도  $p^i(x_0, x)$ 는 확률과정이  $X_0 = x_0$ 인 조건으로부터  $X_t = x$ 로 변화될 조건부 확률밀도를 의미한다. 즉,

$$\Pr(X_t \in dx | X_0 = x_0) = p^i(x_0, x) d\lambda(x)$$

이다. 여기서  $\lambda(\cdot)$ 는 르베그측도(Lebesgue measure)이다. 확산모형에 대한 우도추정법은 전이확률밀도를 구하는 방법에 따라 근사적 최대우도추정법(Approximated Maximum Likelihood Estimation method; AMLE), 혹은 시물레이션 최대우도추정법(Simulated Maximum Likelihood Estimation method; SMLE) 등의 방법이 제안되었다.

Ait-Sahalia와 Yu (2006)는 확산모형의 전이확률밀도에 대한 안장점근사법에 대해 연구하였다. 본 연구에서는 이에 안장점근사법을 보다 단순화한 단일항 안장점근사법을 이용하여 확산모형의 모수를 추정하는 방안에 대하여 살펴보게 된다. 먼저 2절에서는 확산모형의 안장점근사법과 확산모형의 추정 방법에 대한 일반적 내용을 살펴보고, 3절에서는 단일항 안장점근사를 이용하여 모수를 추정하는 방안을 살펴보게 될 것이다. 이후 시물레이션으로 자료를 생성한 후, 다른 추정방법들과 비교분석한다.

## 2. 전이확률밀도에 대한 안장점근사법

확률편미분방정식 (1.1)에서 확산계수  $b_t$ 의 영향을 분리하기 위해 보통 다음과 같은 확산계수 안정 변환이 고려된다. 확산계수 안정변환은 확산계수가  $b(x) = \sigma(x)$ 와 같이  $x$ 의 함수로 주어진 경우,

$$h(x) = \int^x \frac{1}{\sigma(u)} du \quad (2.1)$$

인 함수  $h(\cdot)$ 를 이용하여,  $Y_t = h(X_t)$ 인 변환을 통하여 얻어지는 확산확률과정  $Y_t$ 는

$$dY_t = \mathbf{a}(Y_t)dt + dW_t \tag{2.2}$$

와 같이 확산계수가 상수가 되는 특성을 갖는다. 여기서

$$\mathbf{a}(h(x)) = \frac{a(x)}{\sigma(x)} - \frac{1}{2} \sigma'(x) \tag{2.3}$$

인 관계가 있다. 이때 확산과정  $X_t$ 에 대한 전이확률밀도  $p'(x_0, x_t)$ 와 변환된 확산과정  $Y_t$ 에 대한 전이확률밀도  $q'(y_0, y_t)$  사이에는

$$p'(x_0, x_t) = \frac{q'(h(x_0), h(x_t))}{\sigma(x_t)}$$

인 관계가 성립한다. 따라서 확산과정  $Y_t$ 에 대한 전이확률밀도  $q'(y_0, y_t)$ 를 아는 것은 확산과정  $X_t$ 에 대한 전이확률밀도를 아는 것과 동일한 의미가 된다. 이런 이유로 확산모형에 대한 우도추정법에 관한 연구에서, 확률편미분방정식 (2.2)로 주어지는 확산과정  $Y_t$ 에 대한 전이확률밀도와 그 추정방법을 연구하는 것만으로 문제가 해결된 것으로 보아도 무방하다. 물론 CKLS 모형과 같이 확산계수에 모수가 개입되어 있는 경우는 별도의 처치가 필요하지만 기본적인 틀에서는 큰 차이가 없기 때문이다. 그러므로 본 논문에서 다루는 이후의 내용에서는 식 (2.2)에서와 같이 확산계수가 1로 주어진 경우의 확산과정  $Y_t$ 의 전이확률밀도  $q'(y_0, y_t)$ 를 근사하는 문제를 다루게 된다.

허미트시리즈(Hermite series) 확장법이나 에지워스(Edgeworth) 확장법 보다 정교한 근사가 필요한 경우 고려되는 방법이 안장점근사법이다. 안장점 근사에 대하여는 Daniels (1954), Barndorff-Nielsen과 Cox (1989), Goutis와 Casella (1999) 등에 잘 소개되어 있다. Edgeworth 근사법은 분포의 중앙부근에서는 상대적으로 높은 정확도를 보이는데 비하여, 분포의 중앙에서 많이 떨어진 곳에서는 상대적으로 부정확한 값을 주는 것으로 알려져 있다. 이에 반하여 안장점 근사는 지수적 기울임(exponential tilting) 방법을 이용하여, 분포의 중앙에서 많이 떨어진 곳에서의 근사값도 정확하게 구해주는 장점이 있다. 반면 안장점 근사는 근사 위치별로 안장점 값을 다시 계산해야 한다.

어떤 확률변수  $X$ 가 갖는 확률밀도함수  $f(\cdot)$ 에 대한 안장점근사는 다음과 같다. 적률생성함수  $M(u) = E[e^{uX}]$ 에 대하여,  $K(u) = \log M(u)$ 라 하면, 적당한 상수  $\hat{u}$ 에 대하여

$$f(x) = (2\pi i)^{-1} \int_{\hat{u}-i\infty}^{\hat{u}+i\infty} \exp\{K(u) - ux\} du$$

이다. 이때  $\hat{u}$ 가  $K'(\hat{u}) = x$ 인 조건을 만족한다고 하자. 그러면

$$K(u) - ux = [K(\hat{u}) - \hat{u}x] + \frac{1}{2} K''(\hat{u})(u - \hat{u})^2 + \frac{1}{3!} K^{(3)}(\hat{u})(u - \hat{u})^3 + \dots$$

이므로,  $c_j = K^{(j)}(\hat{u})/[j! \{K''(\hat{u})\}^{j/2}]$ ,  $j = 3, 4, \dots$ 라 하면,

$$f(x) = e^{K(\hat{u}) - \hat{u}x} \cdot \{2\pi K''(\hat{u})\}^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \cdot e^{\{c_3 (iv)^3 + c_4 v^4 + \dots\}} dv$$

이다. 이때  $B = c_3 (iv)^3 + c_4 v^4 + \dots$ 라 하고,  $e^B$ 를 테일러전개하여  $v$ 의 차수에 따라 항을 정리하여 푸리에 역변환을(Fourier inversion) 적용하면, 다음과 같이 확률밀도함수  $f(\cdot)$ 에 대한  $J$ -차 유한급수 근사식  $f_J(\cdot)$ 를 얻게 된다.

$$f_J(x) = f_0(x) \cdot \left( 1 + \sum_{j=2}^J \left[ \prod_{l=1}^j (2l-1) \right] C_{2j} \right) \tag{2.4}$$

이다. 여기서  $C_4 = c_4$ ,  $C_6 = -\{c_6 + (c_3^2/2)\}$ ,  $C_8 = \{c_8 + c_3c_5 + (c_4^2/2)\}$ 와 같이 주어진다. 또

$$f_0(x) = e^{K(\hat{u}) - \hat{u}x} \cdot [2\pi K''(\hat{u})]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

이다. 안장점근사  $f_j(x)$ 는 단일항 안장점근사  $f_0(x)$ 에,  $f(x)/f_0(x)$ 에 대한 에지워스 확장법을 적용하여 얻은 결과가 곱해져 나타난다고 해석된다.

확산과정  $Y_s$ 에 대한 전이확률밀도  $q'(y_0, y)$ 를 근사하기 위한 안장점근사법은

$$K(u) = K_t(u|y_0) = \log E[e^{uY_t}|Y_0 = y_0]$$

라 하고, 위에서 설명한 안장점근사법과 동일한 방법을 적용하는 것이다. Ait-Sahalia와 Yu (2006)는  $K_t(u|y_0)$ 를 시간  $t$ 의 함수로 근사하기 위한 방법으로, 딘킨(Dynkin) 연산자  $\mathcal{A}_y$ 를 이용한 Itô-Taylor 전개 방법

$$E[f(t, Y_0, Y_t)|Y_0 = y_0] = \sum_{j=0}^J \mathcal{A}_y^j \cdot f(0, y_0, y_0) + O(t^{J+1})$$

을 사용하였다. 이를 적용하여  $E[e^{uY_t}|Y_0 = y_0]$ 에 대한 유한급수 근사식을 구하고, 이로부터  $K_t(u|y_0)$ 에 대한 근사식을 얻게된다.  $J = 2$ 인 경우의 근사식  $\tilde{K}_t(u|y_0)$ 는

$$m(t, y_0) = \frac{4t a(y_0) + t^2 \{2a(y_0) a'(y_0) + a''(y_0)\}}{4} \quad (2.6)$$

$$s^2(t, y_0) = t + t^2 a'(y_0) \quad (2.7)$$

에 대하여 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{K}_t(u|y_0) = u [y_0 + m(t, y_0)] + \frac{1}{2} u^2 s^2(t, y_0),$$

여기서  $\tilde{K}'_t(\hat{u}|y_0) = y$ 라 하면, 전이확률밀도  $q'(y_0, y)$ 에 대한 근사식은 식 (2.4)와 (2.5)에서  $K$ 대신  $\tilde{K}$ 를 대입하여

$$q'_J(y_0, y) = q'_0(y_0, y) \cdot \left( 1 + \sum_{j=2}^J [\Pi_{l=1}^j (2l-1)] C_{2j} \right) \quad (2.8)$$

라고 얻어진다. 여기서  $c_j = \tilde{K}_t^{(j)}(\hat{u}|y_0)/[j! \{\tilde{K}_t''(\hat{u}|y_0)\}^{j/2}]$ ,  $j = 3, 4, \dots$ 이고,  $C_4 = c_4$ ,  $C_6 = -\{c_6 + (c_3^2/2)\}$ ,  $C_8 = \{c_8 + c_3c_5 + (c_4^2/2)\}$ 이다. 또

$$\begin{aligned} q'_0(y_0, y) &= e^{\tilde{K}_t(\hat{u}|y_0) - \hat{u}y} \cdot [2\pi \tilde{K}_t''(\hat{u}|y_0)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{N}(y; y_0 + m(t, y_0), s^2(t, y_0)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

이다. 여기서  $\mathcal{N}(y; \mu, \sigma^2)$ 은 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\sigma^2$ 인 정규분포의 밀도함수이다.

### 3. 단일항 안장점근사법과 OU모형의 추정

식 (2.9)은 단일항 안장점근사법으로 얻은 전이확률밀도에 대한 근사식으로,  $Y_t$ 가 평균이  $y_0 + m(t, y_0)$ 이고 분산이  $s^2(t, y_0)$ 인 정규분포로 근사될 수 있음을 말하고 있다. 단일항 안장점근사법

(2.9)은 안장점근사법 (2.8)에 비하여  $\tilde{K}_t(u|y_0)$ 의  $u$ 에 대한 고차 미분을 구할 필요가 없기 때문에, 구체적인 확산모형에 적용하기 편리하다는 장점을 갖는다. 또한 Hurn 등 (2007)은 Ait-Sahalia (1999, 2002)에서 제안된 에지워스 확장법을 이용한 전이확률밀도의 근사방법이 계산의 복잡성과 상대적으로 긴 계산시간에도 불구하고 그다지 추정량의 정확도를 높여주지 못한다는 점을 보여주고 있다. 본 논문에서는 이런 점을 고려하여, 안장점근사식 (2.8)에서 에지워스 확장법에 의한 근사항들을 무시하고 얻어지는 단일항 안장점근사법 (2.9)를 이용한 확산모형의 추정법을 고려하게 된다. 단일항 안장점근사법은 (2.8)으로 주어지는 일반 안장점근사법에 비하여 단순하여 적용하기가 쉽고, 그 단순성에도 불구하고 상당히 정확성이 높은 결과를 줄 것이라는 예측이 가능하다.

단일항 안장점근사법의 성질을 비교 평가하기 위하여, 다음과 같은 OU 확산모형을 대상으로 추정량이 어떻게 구해지는지를 구체적으로 살펴보기로 하자.

$$dY_t = \alpha(\beta - Y_t)dt + \sigma dW_t. \tag{3.1}$$

특별히 OU 확산과정을 비교 기준으로 삼는 이유는 OU 확산과정은 다른 확산모형들에 비하여 단순한 형태로 정의되는 이유로 여러 모형들에 대한 대표성이 높다. 또한 OU 확산과정은 그 우도가 잘 알려져 있는 모형으로 최대우도 추정량을 구하는 것이 용이하여, 추정량의 성질을 비교하기 용이하기 때문이다. OU 확산모형의 전이확률밀도  $q_V^t$ 는

$$m_V(t, y_0) = (\beta - y_0)(1 - e^{-\alpha t}), \quad s_V^2(t, y_0) = \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}$$

라 할때

$$q_V^t(y_0, y) = \mathcal{N}(y; y_0 + m_V(t, y_0), \sigma^2 s_V^2(t, y_0))$$

로 주어진다 (Ref., Hurn 등, 2007).

단일항 안장점근사의 경우에는 식 (2.6)과 (2.7)에 (3.1)인 경우를 대입하여 얻게되는

$$m_0(t, y_0) = (\beta - y_0)\alpha t \left(1 - \alpha \frac{t}{2}\right),$$

$$s_0^2(t, y_0) = t(1 - \alpha t)$$

에 대하여, 전이확률밀도는  $q_0^t$ 가

$$q_0^t(y_0, y) = \mathcal{N}(y; y_0 + m_0(t, y_0), \sigma^2 s_0^2(t, y_0))$$

로 표현된다. 그러므로 매  $t$ 시점 마다 관측된 (즉,  $t_i = i \cdot t$ ) 표본  $Y_{t_i} = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ 에 대한 단일항 안장점근사에 의한 로그우도는

$$-2 \log L_0 = -2 \sum_{i=0}^{n-1} \log q_0^t(y_i, y_{i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\{y_{i+1} - y_i - m_0(t, y_i)\}^2}{\sigma^2 s_0^2(t, y_i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \log(2\pi\sigma^2 s_0^2(t, y_i))$$

이다. 또 여기서

$$\frac{\partial m_0(t, y_0)}{\partial \alpha} = (\beta - y_0)t(1 - \alpha t)$$

이므로

$$\frac{\partial \log L_0}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=0}^{n-1} (\beta - y_i)(y_{i+1} - y_i - m_0(t, y_i)) \quad (3.2)$$

$$- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(y_{i+1} - y_i - m_0(t, y_i))^2}{(1 - \alpha t)^2} + \frac{nt}{2(1 - \alpha t)}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \log L_0}{\partial \beta} = \frac{\alpha(1 - \alpha t/2)}{\sigma^2(1 - \alpha t)} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{i+1} - y_i - m_0(t, y_i)), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \log L_0}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(y_{i+1} - y_i - m_0(t, y_i))^2}{t(1 - \alpha t)} - \frac{n}{\sigma} \quad (3.5)$$

이다. 식 (3.2)와 (3.3) 그리고 식 (3.4), (3.5) 각각의 우변을 0으로 놓아서 만들어지는 비선형 연립방정식을 풀어서 얻는 근이 단일항 안장점근사법을 이용한 추정량이 된다. 다음에 주어진 식에 따라 초기값으로부터 시작하여 이미 구해진  $\theta^{old} = (\alpha^o, \beta^o, \sigma^o)$ 로부터 새로운 값  $\theta$ 를 얻는 반복적 절차를 통해서 위의 비선형 연립방정식을 쉽게 풀 수 있다.

$$\alpha = \frac{1}{t} \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \left( \frac{\sum (\beta^o - y_i)(y_{i+1} - y_i)}{\sum (\beta^o - y_i)^2} \right)} \right), \quad (3.6)$$

$$\beta = \frac{1}{n} \sum y_i + \frac{1}{\alpha^o t (1 - \alpha^o t/2)} \cdot \frac{1}{n} \sum (y_{i+1} - y_i), \quad (3.7)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{nt(1 - \alpha^o t)} \sum \left[ y_{i+1} - y_i - (\beta^o - y_i) \alpha^o t \left( 1 - \alpha^o \frac{t}{2} \right) \right]^2. \quad (3.8)$$

초기값의 계산이 단순한 다른 추정 방법을 통하여 얻은 값을 대입하는 것도 가능하다. 위의 식 (3.7)과 (3.8)은 식 (3.4)와 (3.5)로부터 직접적으로 얻을 수 있는데 비하여, 식 (3.6)을 얻는 과정에 대하여는 설명이 필요하다. 식 (3.2)와 (3.3)에서 얻어지는 방정식은  $\alpha$ 에 대한 고차 방정식이 되어 이를 일반적으로 풀기 위해서는 다소 복잡한 과정이 요구된다. 이를 피하고 위의 식 (3.6)을 얻기 위하여 다음과 같은 근사적 방법을 사용하였다. 먼저  $s_0^2(t, y_0)$ 에 대한 미분과 관계되는 식 (3.3)에서의  $\alpha$ 값들을  $\alpha^o$ 로 대체하고, 식 (3.2)에 개입되어 있는  $\alpha$ 만을 미지수로 보고 얻어지는 2차방정식을 만든다. 이때  $\sigma^o$ 에 대하여 식 (3.8)에서 얻은 관계를 대입하여 식을 간략하게 한다. 이렇게 얻어지는 2차방정식의 두 근 중에서 작은 값을 선택한다. 그 이유는 먼저  $s_0^2(t, y_0)$ 가 양수이어야 하므로  $\alpha t$ 의 값이 0과 1사이의 값을 가져야 할 뿐만 아니라, 오일러-마루야마(Euler-Maruyama) 근사법에서  $m(t, y_0)$ 를  $(\beta - y_0)\alpha t$ 로 근사하는 점을 고려하면  $1 - \alpha t/2 \approx 1$ 이어야 한다, 즉  $\alpha t \approx 0$ 이다. 이런 점에 근거하여, 식 (3.6)을 얻는다.

#### 4. 추정량들의 비교

추정량들의 성질을 비교하기 위하여, 다음 세가지 추정량을 시뮬레이션 방법을 통하여 비교하였다. 하나는 최대우도추정량(Maximum Likelihood Estimator; MLE)이고, 다른 하나는 오일러 근사법에 근거한 추정량(Euler)이고, 다른 하나는 단일항 안장점근사법을 이용한 추정량이다. 단일항 안장점근사 추정량을 구하는 수치적 방법에 따라 두 가지 경우를 비교하였다. 한 가지는 통계소프트웨어 R에 주어진 최적화 함수 nlm을 이용하여 단일항 안장점근사 추정량을 구하는 방법 (SPA1)과 식 (3.6), (3.7)과 (3.8)을 이용하여 반복적인 방법으로 단일항 안장점근사 추정량을 구하는 방법(SPA2)이다.

표 1: 각 추정량에 대한 평균오차와 평균제곱오차의 제곱근(RMSE)

	Euler	MLE	SPA1	SPA2
$\alpha$	2.7868 (7.0426)	3.5206 (7.7454)	3.5390 (7.7689)	3.5392 (7.7690)
$\beta$	-0.0223 (4.5436)	-0.0224 (4.5436)	-0.0223 (4.5436)	-0.0223 (4.5436)
$\sigma$	-0.2519 (0.3961)	0.0361 (0.3313)	-0.1049 (0.3322)	0.0495 (0.3357)

\* 괄호안은 RMSE 이고, 모든 값은 100을 곱해서 나타냄.

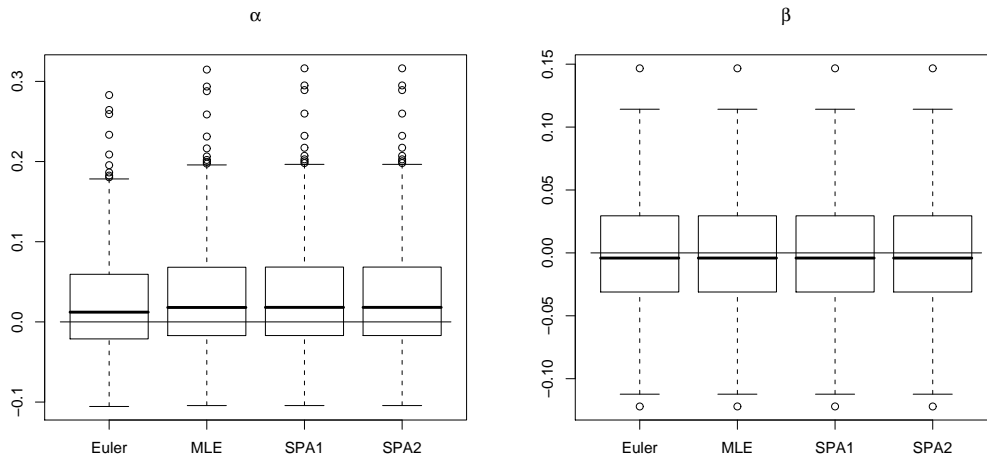


그림 1: 추세모수  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 추정오차에 대한 상자그림

비교 방법은 Hum 등 (2007)에 제시된 방법과 가능한 유사하도록 실험을 설계하고 그 결과를 비교 하였다. 실험에 사용된 확산모형은  $(\alpha, \beta, \sigma) = (0.2, 0.08, 0.1)$ 인 OU 확산모형이다. Hum 등 (2007)에서  $\sigma = 0.03$ 을 사용한 것과 달리  $\sigma = 0.1$ 을 사용하였고,  $t$ 변수 값으로는 월별 자료를 의미하는 1/12 대신에 분기별 자료를 의미하는 1/4을 사용하였다. Hum 등 (2007)에서는 이를  $\Delta = 1/12$ 라고 표현하였다. 이런 변경은 각 추정량들의 특징의 차이가 보다 두드러지게 보이도록 하기 위함이었다. 500개의 관측치로 이루어진 500개의 표본을 대상으로 얻은 추정량을 비교하였다. 표본 생성을 위해서는 Hum 등 (2007)과 동일한 방법을 사용하였으나, 계산시간을 줄이기 위하여 각 관측치들 사이의 시간 간격  $t$  (혹은  $\Delta$ )를 1/500시간 간격으로 분할하여 생성하였다.

전체 500개의 표본에서 MLE는 55회 수렴에 실패하였고, SPA1은 8회 수렴 실패하였다. 2개의 표본에 대하여는 MLE와 SPA1 모두 수렴에 실패하였다(SPA2는 반복적 방법을 사용하므로 함수최적화 단계가 없음). 모의실험 결과는 표 1에 정리되어 있다. 표에서 제시된 값은 평균오차 (average error)와 평균제곱오차의 제곱근(Root Mean Square; RMSE)이다. 그림 1과 2는 추정량에서 실제 모수값  $\theta = (0.2, 0.08, 0.1)$ 를 뺀, 추정오차를 상자그림으로 보여주고 있다. 추정오차에 대한 상자그림이므로 0을 중심으로 밀집되어 분포할수록 좋은 추정량을 의미한다. 표 1와 그림 1과 2로 부터, 비교에 사용된 각 추정량들은 모수  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 추정에 있어서는 그 차이가 거의 없음을 살펴볼 수 있다. 반면,  $\sigma$ 의 추정에 있어서는 MLE가 가장 우수하고, 오일러 근사법이 가장 큰 편의와 MSE를 갖고 있음을 알 수 있다. 특히 SPA2는 MLE와 거의 유사한 정도의 성질을 보여주고 있을 뿐만 아니라, 수치적으로도 매우 안정적인 결과를 제공하고 있다.

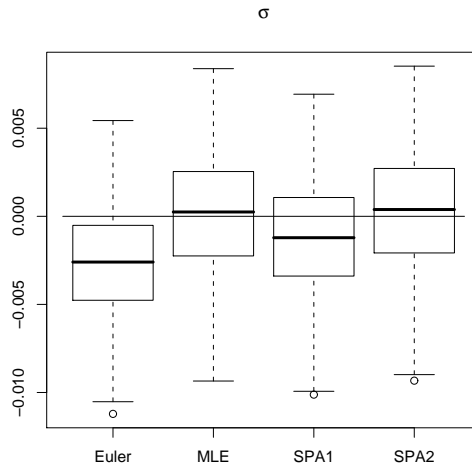


그림 2: 확산모수  $\sigma$ 의 추정오차에 대한 상자그림

## 5. 결론

일반적인 형태의 확산모형에 대한 추정 문제는 금융현상의 해석 등에서 매우 중요한 문제이다. 그러나 확산모형에 대하여 사용하기 쉽고 신뢰할 만한 추정방법이 아직 개발되어 있지 않고 의미있는 연구들이 계속적으로 진행중이다. 오일러 근사법은 범용성은 있으나, 이산적인 시간에 관측된 자료에 맞추기 위하여 연속시간 모형을 이산시간 모형으로 바꾸어 접근한다는 접근법 자체가 갖는 한계 때문에, 추정량의 정확성에 대한 원론적 의문이 계속적으로 제기되는 점에서 추정량이 주는 논리적 신뢰감에 한계 있다. 반면 최대우도추정량(MLE)은 통계학적으로 잘 연구되어진 좋은 추정방법이기는 하지만, 적용할 수 있는 확산모형이 극히 제한되어 있다. 이런 이유로 확산모형에 대한 추정방법으로는 그동안 많은 경우에 일반화적률법(GMM)과 같은 변형적인 추정법이 자주 사용되어 왔다. 그러나, 최근 학계의 관심이 되는 확산모형들이 점점 더 복잡해져 감에 따라, 일반화적률법으로는 더 이상 신뢰성 있는 통계적 추론을 해결하기에 어려운 점이 발생하였다. 이러한 이유로 최근 다양한 접근법을 통한 우도적 추론 방법이 관심있게 연구되고 있고 다양한 방법들이 제안되어 오고 있다.

본 연구에서는 근사적 우도추론법의 일종인 단일항 안장점근사를 이용한 추정방법에 대하여 살펴 보았고, OU 확산모형의 경우에 적용하여 그 특성을 살펴보았다. 단일항 안장점근사에 의한 확산모형의 추정방법이 MLE와 매우 유사한 통계적 특성을 보이고 있으면서도, 계산이 쉽고 적용범위가 더 넓다는 특성을 가지고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 단일항 안장점근사 추정량에 대한 보다 깊은 수리적 특성 연구가 필요한 것으로 보인다. 또한 다양한 자료와 다양한 확산모형 등에 실험되어보는 과정을 통해서 추정량의 일반적 특성에 대한 현실적이고 깊이있는 연구가 필요할 것이다.

## 참고 문헌

- Ahn, D. and Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics, *The Review of Financial Studies*, **12**, 721–762.
- Ait-Sahalia, Y. (1999). Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions, *Journal of Finance*, **54**, 1361–1395.
- Ait-Sahalia, Y. (2002). Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: A closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223–262.



- Aït-Sahalia, Y. and Yu, J. (2006). Saddlepoint approximations for continuous -Time Markov processes, *Journal of Econometrics*, **134**, 507–551.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1989). *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman & Hall, New York.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.
- Cox, J. (1975). Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions. Working paper, Stanford University (reprinted in *Journal of Portfolio Management*, 1996, **22**, 15–17).
- Cox, J., Ingersoll, J. and Ross, S. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385–407.
- Daniels, H. (1954). Saddlepoint approximations in statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 631–650.
- Goutis, C. and Casella, G. (1999). Explaining the Saddlepoint Approximation, *The American Statistician*, **53**, 216–224.
- Hurn, A., Jeisman, J. and Lindsay, K. (2007). Seeing the wood for the trees: A critical evaluation of methods to estimate the parameters of stochastic differential equations, *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 390–455.
- Kloeden, P. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer.
- Oksendall, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

## A Brief Review of a Term Saddlepoint Approximation Method for Estimating Diffusion Processes

Eun-kyung Lee<sup>a</sup>, Yoon Dong Lee<sup>1,b</sup>, Young-soo Choi<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, Ewha Womans University

<sup>b</sup>Sogang Business School, Sogang University

<sup>c</sup>Department of Mathematics, Hankuk University of Foreign Study

---

### Abstract

Recently various methods were suggested and reviewed for estimating diffusion processes. Out of suggested estimation method, we mainly concerns on the estimation method using saddlepoint approximation method, and we suggest a term saddlepoint approximation(ASP) method which is the simplest saddlepoint approximation method. We will show that ASP method provides fast estimator as much as Euler approximation method(EAM) in computing, and the estimator also has good statistical properties comparable to the maximum likelihood estimator(MLE). By simulation study we compare the properties of ASP estimator with MLE and EAM, for Ornstein-Uhlenbeck diffusion processes.

**Keywords:** Diffusion processes, saddlepoint approximation, transition density.

---

---

Research of the first author was supported by Priority Research Centers Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(2009-0093827). Research of the second author was supported by university Research Grant 2009 of Hankuk University of Foreign Studies. Research of the third author was supported by Sogang University Research Grant of 2009.

<sup>1</sup> Corresponding author: Associate Professor, Sogang University, 1st SinSoo-Dong, Mapo-Gu, Seoul 121-742, Korea. E-mail: widyle@sogang.ac.kr