

# 개별요소법을 이용한 삼각망 생성기법 개발

† 김남형 · 윤현철\* · 허영택\*\*

† 제주대학교 토목공학과/해양과경연구소 교수, \*제주대학교 대학원 토목해양공학과, \*\*한국수자원공사 물관리센터 선임연구원

## Development of Generating Technique for Triangular Mesh by using Distinct Element Method

† Nam-Hyeong Kim · Hyeon-Cheol Yun\* · Young-Teck Hur\*\*

† Department of Civil Engineering/Marine & Environmental Research Institute, Jeju National University, Jeju, 690-756, Korea

\* Department of Civil and Ocean Engineering, Graduated School, Jeju National University, Jeju, 690-756, Korea

\*\* Korea Water Resources Corporations, Water Resources Operations Center, Daejeon, 306-711, Korea

**요 약** : 수치해석을 수행할 경우 좀 더 정확한 수치모의를 위하여 해석영역의 특성에 따라 적절하게 요소를 배치하는 것이 필요하다. 본 연구에서 사용한 개별요소법(DEM)은 입자의 마찰력 및 항력을 제외한 반발력과 인장력만을 적용하였다. 초기 쿼드트리(Quad-tree)형식으로 충전된 입자들을 DEM을 이용하여 재배치할 경우 입자의 형상이 원형이기 때문에 입자사이에 존재하는 빈 공간을 최소화 할 수 있다. 결국 입자 중심점의 배치가 정삼각형에 가깝게 되는 특징을 보여준다. 이 재배치된 입자를 대상으로 Delaunay 삼각기법을 이용하여 삼각망을 구성하고, Laplace 보간을 수행하여 격자 품질을 향상시켰다. Laplace 보간 전·후의 형상비(Aspect Ratio: AR)를 비교한 결과 DEM을 이용하여 작성한 격자의 품질도 우수하지만, Laplace보간을 수행한 이후 보다 높은 품질의 격자가 생성되는 것을 확인하였다.

본 연구에서 개발한 기법은 기존의 삼각격자망 생성기법에 비해 다소 계산시간이 오래 걸리는 단점이 있지만, 복잡한 형상과 정확한 지형의 재현을 필요로 하는 파랑 해석용 유한요소 격자망 작성 및 다양한 수치모의 분야에서 그 적용 가능성이 매우 높다고 사료된다.

**핵심용어** : 개별요소법(DEM), Delaunay 삼각기법, Laplace보간, 형상비(AR)

**Abstract** : When the numerical analysis is carried out, it is necessary to set proper elements as a feature of analysis domains for more accurate simulations. In this study, Distinct Element Method(DEM) is applied, only considering repulsive force and tensile force except for frictional force and resisting force of particle. When the filled particles with initial Quad-tree type is relocated by DEM, a blank space existing among the particles can be minimized because the shape of particle is circular. Finally, it is the effective feature that the centroidal disposition of the particles is similar to an equilateral triangle. Triangular mesh are formed by using the Delaunay triangular technique on these relocated particles, the quality of triangular mesh is more improved by carrying out Laplace interpolations. The compared result of Aspect Ratio before and after the Laplace interpolation is shown that although the quality of triangular mesh made by DEM is good, the later triangular mesh are higher quality than the formers. In this study, although the developed technique takes a longer calculational time than the previous technique to generate triangular mesh, it is considered that the applicable possibility is very high in the generation of finite element mesh about wave analysis and various numerical simulation to need a complex or reappearance of exact topography.

**Key words** : Distinct element method(DEM), Delaunay triangular technique, Laplace interpolation, Aspect ratio(AR)

## 1. 서 론

수치해석을 수행할 경우 해석영역의 특성에 따라 적절히 요소를 배치하여 모의하는 것이 필요하다. 해석영역을 삼각형 격자망으로 분할할 경우 격자의 형태는 정삼각형에 가깝게 하여 계산의 정확도를 높이고 대상영역에 분할된 격자의 총 개수를 최소화 함으로써 계산 수행시간을 단축시킬 수 있도록 적절한 크기의 요소를 배치할 필요가 있다. 최근까지 수치모의를 위한 최적의 삼각망 작성기법에 대해 국내 및 해외의 수많은 연구자들에 의해 많은 연구가 수행되었다(김 등, 2000; 정과 김,

2001a, b; Shimada, 1993; Shimada and Gassard, 1998).

기존의 자동요소법은 우수한 격자 품질을 얻거나 수심지형이 복잡한 해안에서 수심을 보간하는데 매우 어려운 점이 있다. 이런 부분을 보완하기 위하여 개발한 입자를 이용한 격자 생성방법은 외부경계와 내부절점들을 절점이 아닌 입자간의 반발력과 인장력을 통한 spring and dashpot system과 같은 개념을 적용하여 절점위치를 제어하여 보다 좋은 질의 격자를 얻을 수 있다. 그리고 수심에 따른 차등분할이 가능하며 Laplace보간을 함으로써 보다 우수한 삼각형 격자 품질과 수심이 실제지형에 가깝게 표현될 수 있는 장점을 가지고 있다.

† 교신저자 : 정희원, nhkim@jejunu.ac.kr 064) 754-3452

\* jidan0529@hanmail.net 064) 754-3453

\*\* Korcivil@Kwater.or.kr 042) 629-3460

본 연구에서는 개별요소법을 이용하여 수심에 따른 절점 배치를 선행하고, Delaunay삼각기법을 이용한 절점의 연결로 삼각형 격자를 생성한 후에 Laplace보간을 수행하고 최종적으로 얻어진 격자망에 지형을 보간함으로써 대상영역의 형상과 지형을 고려한 삼각망 자동생성 기법을 개발하였다.

## 2. 삼각망 생성 기법

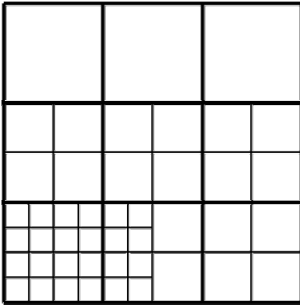


Fig. 1 Quad-tree search

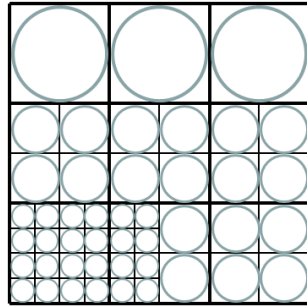


Fig. 2 Particle location

삼각형 격자를 생성하기 위한 과정은, 우선 대상영역을 전부 포함하는 크기의 사각망을 작성하고 각 사각망 내부에는 격자 크기를 지정할 수 있는 밀도값을 부여한다. 격자의 크기가 밀도값보다 클 경우에는 그 격자를 4등분하고 이러한 과정을 반복하여 쿼드트리를 작성한다(Fig. 1).

Fig. 2에서 보여지는 바와 같이 경계선상 및 대상영역 내부에 밀도값에 대응하는 크기의 입자들을 분포시키고 개별요소법(DEM)을 적용하면 입자들간의 상호작용력에 의해 위치이동이 시작된다. 입자의 위치가 이동될 경우 입자의 크기는 쿼드 트리에 의해 각각의 밀도값에 의해 재산정된다. 이러한 과정을 충분히 반복하면 입자 재배열이 완료되고, Delaunay 삼각기법에 의해 입자의 중심점들을 연결하여 삼각형 격자망을 작성한다. 작성된 삼각망은 Laplace보간기법을 이용하여 보다 정삼각형에 가깝도록 보간한다. 최종적으로 얻어진 삼각망은 다양한 보간기법을 이용하여 절점 및 요소에 지형값을 부여한다. 이러한 삼각망 작성과정을 Fig. 3에 나타내었다.

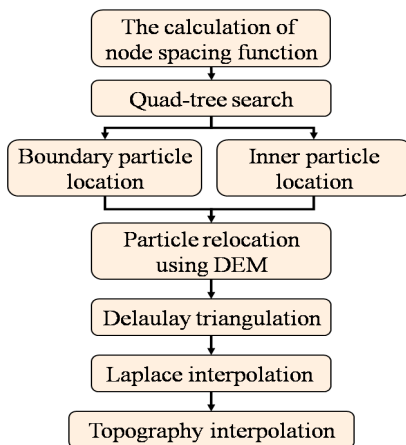


Fig. 3 Flow chart of triangular meshing process

### 2.1 개별요소법을 이용한 입자 재배치

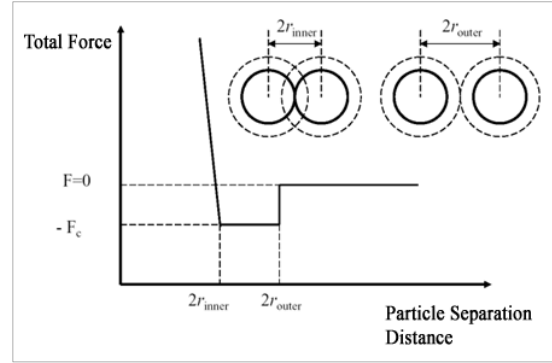


Fig. 4 The square-well potential by cohesive interactions

본 연구에서 사용한 개별요소법은 Hur(2006)가 개발한 3차원 하상변동 모형을 참고로 입자간 마찰력 및 항력을 제외하여 반발력과 인장력만을 적용하였다. Fig. 4에 입자간 반발력과 인장력의 관계를 나타내었다. 두 입자가 접촉한 직후부터 입자는 반발력이 발생하고 반발력에 의해 두 입자간 간격이 멀어질 경우에는 인장력이 발생하는 구조로 되어있다. 초기 쿼드트리 형식으로 충전된 입자들을 개별요소법을 이용하여 재배치할 경우 입자의 형상이 원형이기 때문에 입자사이에 존재하는 빈 공간을 최소화 할 수 있어, 결국 입자 중심점의 배치가 정삼각형에 가깝게 되는 특징이 있다.

두 개의 인접한 입자들 사이에서 에너지 함수는 Fig. 4에 보여지게 된다. 만일, Fig. 4에서 보여지는 바와 같이 Total Force를  $F_t$ 로 나타내고, 여기서,  $F_t = (2r_{inter})$ 이면,  $2r_{inter}$ 는 두 개의 버블사이의 안정적인 거리이고, 두 개의 입자들은 안정된 거리가 되기 위해 함수  $F_t$ 는 식(1)을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} F_t(2r_{outer}) &= 0 \\ F_t(2r_{inter}) &= 0 \\ F_t(0) &= 0 \\ F_t(2r_{inter}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

만일,  $F_t > 0$ 이면, 반발력은 두 개의 입자사이에 존재하고,  $F_t < 0$ 이면, 인장력은 두 개의 입자사이에 존재하는 것으로 가정한다.

운동방정식은 다음과 같다.

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} = f(t) \quad (2)$$

여기서,  $2r_{outer}$ 는 두 개의 충분히 먼 입자들의 거리,  $F_t$ 는 두 개의 인접한 입자사이의 힘,  $m$ 은 입자의 질량,  $c$ 는 댐핑계수,  $x(t)$ 는 I번째 입자의 위치를 나타낸다.

Range-kutta법에 의한 이 운동방정식을 푸는 것으로 입자들이 배치되고, 최적화 과정에서 입자들의 개수가 조절된다. 즉, 말하자면 입자들이 인접한 것과 상당히 겹쳐져서 초과하는 입자들은 제거되고, 새로운 입자들은 인접한 입자들의 적절한 수

를 필요로 하는 open 입자들이 주위에 추가 되어진다. 입자배치의 최적화 후에 삼각형 격자는 Delaunay 삼각기법을 사용함으로써 생성된다.

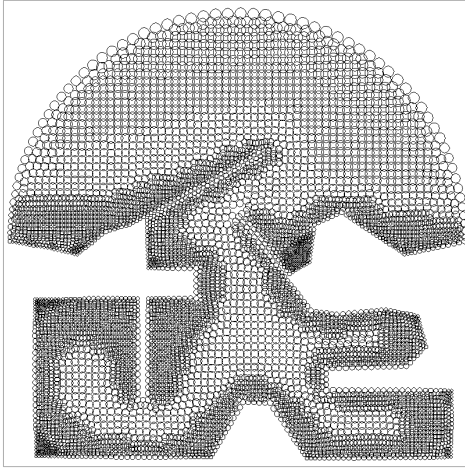


Fig. 5 Initial location of the particle at arbitrary harbor

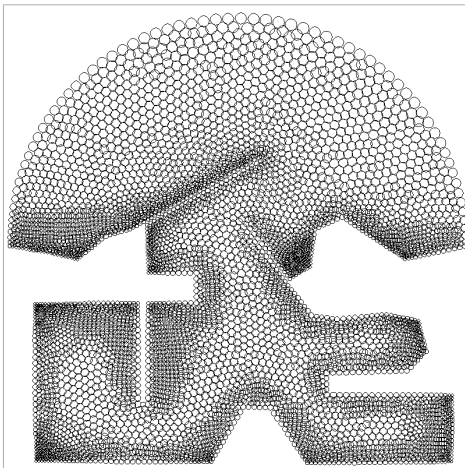


Fig. 6 Final relocation of the particle using the DEM at arbitrary harbor

Fig. 5는 입자의 초기 배열 형태와 Fig. 6은 개별요소법(DEM)을 적용한 이후 입자의 최종 재배열 형태를 나타낸다.

## 2.2 Delaunay 삼각기법 적용 및 Laplace 보간

Delaunay 삼각분할은 국소적인 최소각 최대원리에 근거한다. 이 방법은 절점에 의해 정삼각형에 가까운 형태로 삼각형을 분할하는 것으로 경계의 생성과 내부의 절점에 의한 삼각분할로 구분할 수 있다(Sloan, 1987).

그리고 영역내부에서 삼각분할에 사용된 절점은 입력 자료에 의해 설정된 절점과 Delaunay 삼각분할을 수행하는 과정에서 생성된 절점이 있으며, 삼각분할 후 가동점에 대해서는 Laplace보간에 의해 영역내부로 절점을 이동시켜 삼각형의 기하학적 형태를 수정하지만 고정점에 대해서는 절점을 이동시키지 않는다. Delaunay 삼각분할은 주어진 절점에 의해 삼각

분할을 수행하기 때문에 엄밀한 경계를 생성하기 위해서는 각각의 절점군에 대해서 영역을 제한 할 필요가 있다. 따라서, 외부 경계상에 대해서는 시계방향으로, 내부 경계상에 위치한 절점군에 대해서는 반시계 방향으로 절점을 순차적으로 인식한다.

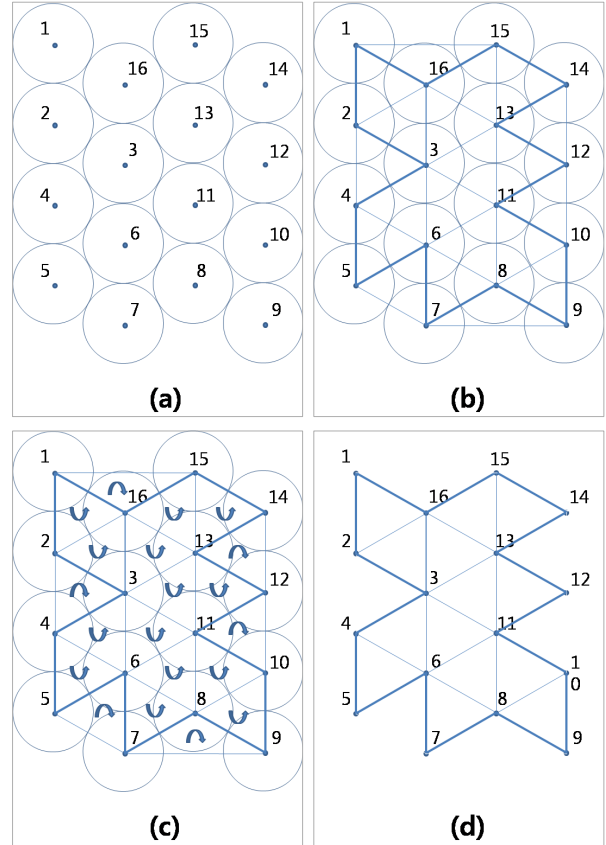


Fig. 7 Process of the delaunay triangulation

또, 영역내부의 절점에 대해서는 좌표위치로 절점을 인식한다. Fig. 7은 내부경계의 생성과정을 나타낸 것으로 그림 속의 굵은 선은 내부 경계를 나타낸다. Fig. 7(a)와 같이 반시계 방향으로 입력된 절점에 대해서 삼각분할을 수행한다(Fig. 7(b)). 그리고 나서, 경계변과 교차하는 요소를 제거하기 위하여 생성된 각각의 삼각형 격자를 절점번호 순서로 읽고(Fig. 7(c)), 시계방향으로 읽혀지는 외부 영역의 요소를 제거한다(Fig. 7(d)).

Fig. 8은 재 배열된 입자 중심점을 Delaunay 삼각분할 기법을 이용하여 완성한 삼각망을 나타내고 있다. Fig. 8은 DEM 계산 직후에 생성한 삼각형 격자망을 나타내고 있고, Fig. 9는 작성된 삼각망을 가지고 Laplace보간(50회)을 적용한 후의 격자망을 나타내고 있다. DEM을 적용한 직후의 격자는 각 격자점의 밀도값에 의한 격자크기를 정확히 확보하고 있는 반면, Laplace보간을 적용한 후의 격자형상은 다소 양호해 졌지만 격자점이 이동함으로써 격자크기가 정확히 재현되지 못하는 것을 보여준다.

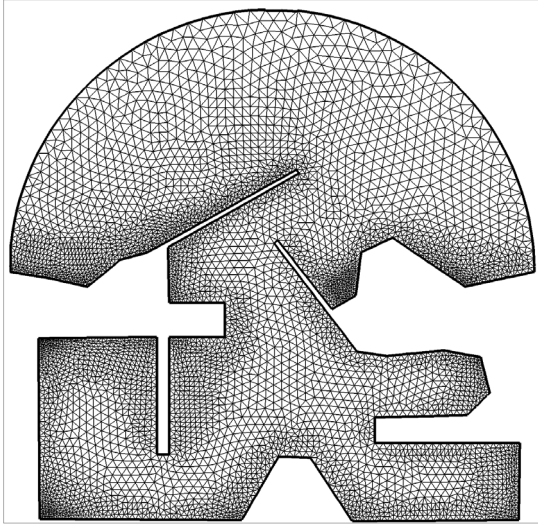


Fig. 8 The triangular mesh without using Laplace interpolation after calculating DEM

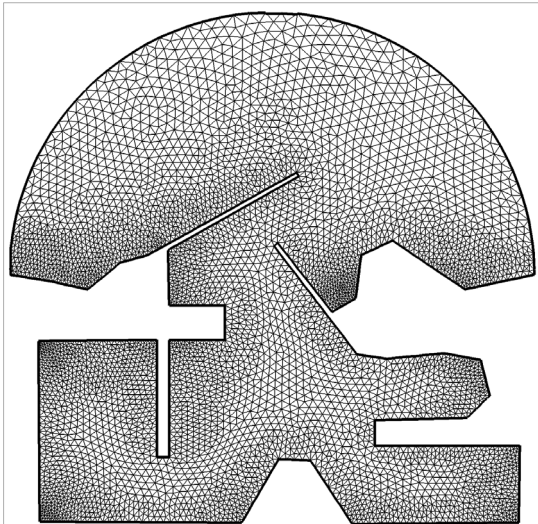


Fig. 9 The triangular mesh with using Laplace interpolation after calculating DEM(50 times)

### 3. 삼각망 격자의 형상비 검토

본 연구에서 생성된 삼각망 격자의 품질을 검토하기 위하여 분할된 격자망 각각의 형상비(AR)를 계산하였다. Fig. 10에서 보여지는 바와 같이 삼각형 격자망에 적용할 수 있는 형상비(AR) 산출방법을 사용하였다.

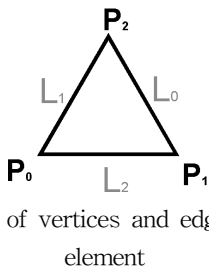


Fig. 10 Numbering of vertices and edges on a triangular element

삼각형 변의 길이들은 다음의 식과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \\ \vec{L}_1 &= \vec{P}_0 - \vec{P}_2 \\ \vec{L}_2 &= \vec{P}_1 - \vec{P}_0 \end{aligned} \quad (3)$$

또한, 삼각형의 변의 절대 길이들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} L_0 &= \|\vec{L}_0\| \\ L_1 &= \|\vec{L}_1\| \\ L_2 &= \|\vec{L}_2\| \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,  $L_0, L_1, L_2$ 는 삼각형 세 변의 길이이다.

그리고, 가장 긴 변의 길이와 가장 짧은 변의 길이들은 각각 다음과 같다.

$$L_{\max} = \max(L_0, L_1, L_2) \quad (5)$$

$$L_{\min} = \min(L_0, L_1, L_2) \quad (6)$$

여기서,  $L_{\max}$ 는 삼각형의 가장 긴 변의 길이이고,  $L_{\min}$ 은 삼각형의 가장 짧은 변의 길이이다.

삼각형의 면적( $A$ )는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \|\vec{L}_0 \times \vec{L}_1\| \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{L}_1 \times \vec{L}_2\| \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{L}_2 \times \vec{L}_0\| \end{aligned} \quad (7)$$

삼각형 형상비(AR)는 다음과 같이 나타낼 수 있다(Stimpson et al., 2007).

$$AR = \frac{L_{\max}(L_0 + L_1 + L_2)}{4\sqrt{3}A} \quad (8)$$

삼각형 격자의 세 변  $L_0, L_1, L_2$ 의 세변의 길이가 동일할 때, 즉 삼각형 격자가 정삼각형일 때, 위 식을 가지고 계산하면 형

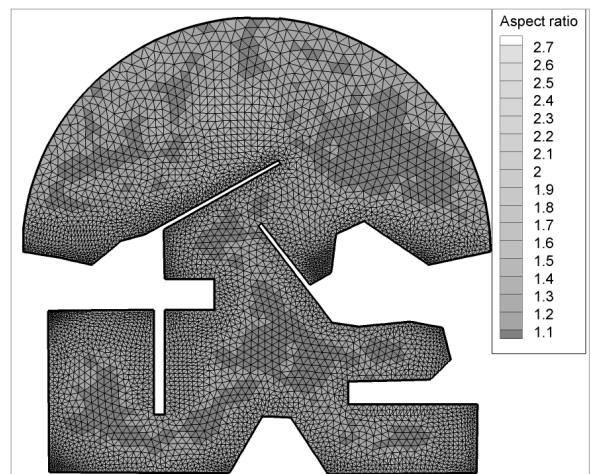


Fig. 11 The aspect ratio without using Laplace interpolation after calculating DEM

상비(AR)의 값은 1이 된다. 그러므로 형상비(AR)의 값이 1에 가까울수록 격자 품질이 우수하다는 것을 나타낸다.

Fig. 11은 DEM방법을 이용하여 대상영역을 요소수는 10,002개, 절점수는 5,276개의 삼각망 격자를 분할한 직후의 격자의 상태를 나타내고, DEM방법을 이용하여 분할된 격자를 가지고 Laplace보간을 50회까지 수행하였다.

Fig. 12는 Laplace보간 10회, Fig. 13은 Laplace보간 20회, Fig. 14는 Laplace보간 30회, Fig. 15는 Laplace보간 40회, 그리고 Fig. 16은 Laplace보간 50회 때의 각각의 격자상태를 나타낸다.

값 1.2를 기준으로 하여 Laplace 보간 반복횟수에 따른 요소의 개수를 보여준다.

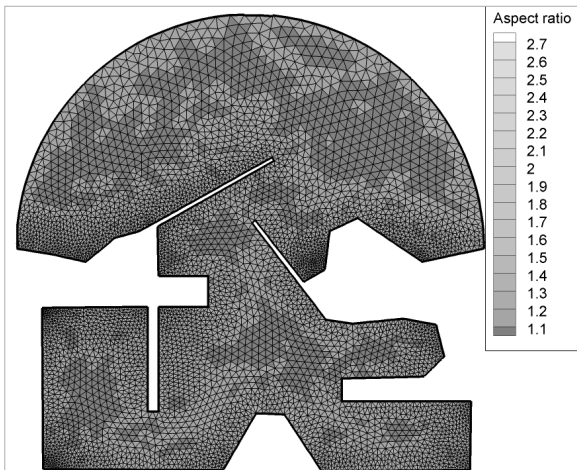


Fig. 12 The aspect ratio with using the Laplace interpolation after calculating DEM(10 times)

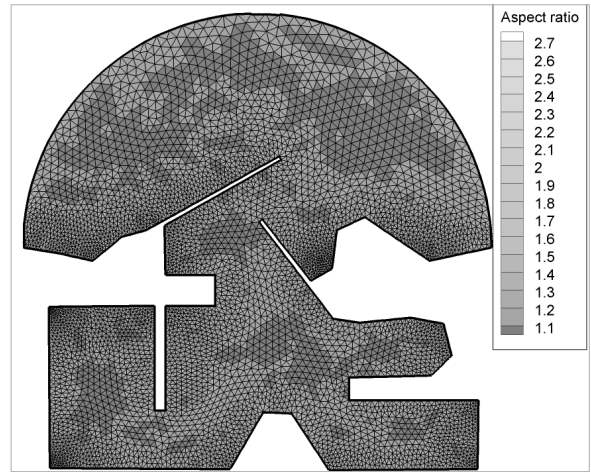


Fig. 14 The aspect ratio with using the Laplace interpolation after calculating DEM(30 times)

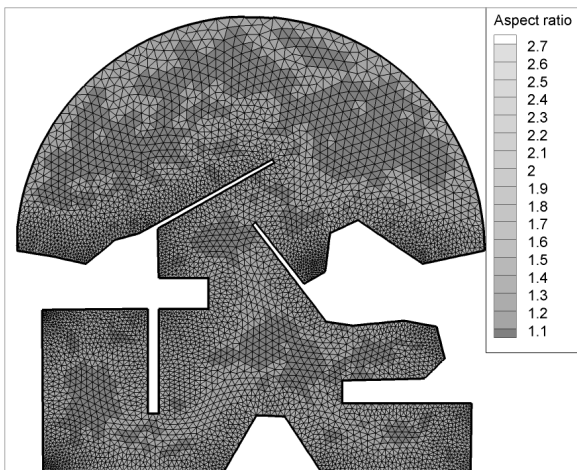


Fig. 13 The aspect ratio with using the Laplace interpolation after calculating DEM(20 times)

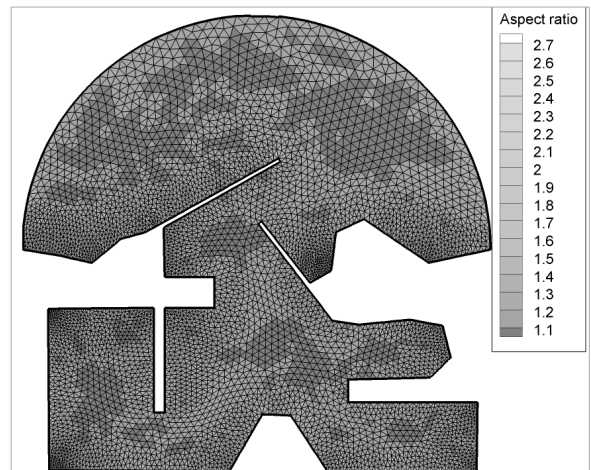


Fig. 15 The aspect ratio with using the Laplace interpolation after calculating DEM(40 times)

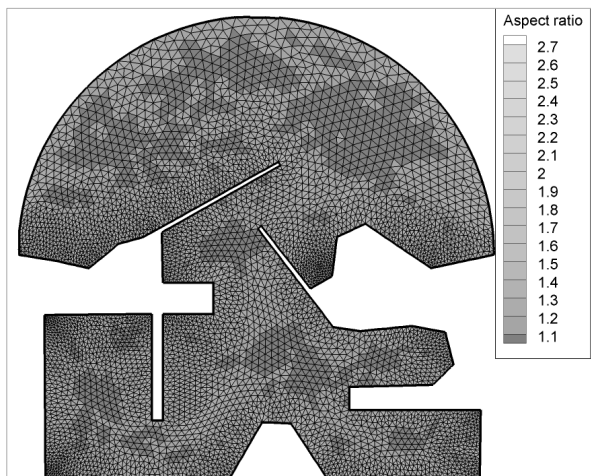


Fig. 16 The aspect ratio with using the Laplace interpolation after calculating DEM(50 times)

식(8)을 가지고 Fig. 11에서부터 Fig. 16에 나타낸 격자망을 대상으로 계산한 요소의 개수를 Table 1에 작성하였으며, Table 1의 횡축은 AR값들의 범위, 종축은 Laplace 보간 반복 횟수이고, Laplace 보간을 10회 했을 때가 AR값이 1에 가까운 요소개수 가장 많다는 것을 알 수 있다. 그리고, Table 1의 AR 값들을 가지고 Fig. 17에 나타내었고, Fig. 18은 Table 1의 AR

Table 1 The number of elements by the iteration of Laplace interpolation

Laplace interpolation	The range of AR					
	$1.0 \leq AR < 1.2$	$1.2 \leq AR < 1.4$	$1.4 \leq AR < 1.6$	$1.6 \leq AR < 1.8$	$1.8 \leq AR < 2.0$	$2.0 \leq AR$
0	4020	3503	1737	509	158	85
5	7018	2544	391	46	10	3
10	7155	2440	374	33	9	1
15	7116	2439	412	37	7	1
20	7079	2463	422	43	4	1
25	7002	2503	462	39	6	0
30	6960	2552	464	34	2	0
35	6867	2630	472	38	5	0
40	6819	2672	485	32	4	0
45	6741	2718	511	37	5	0
50	6698	2753	516	43	1	1

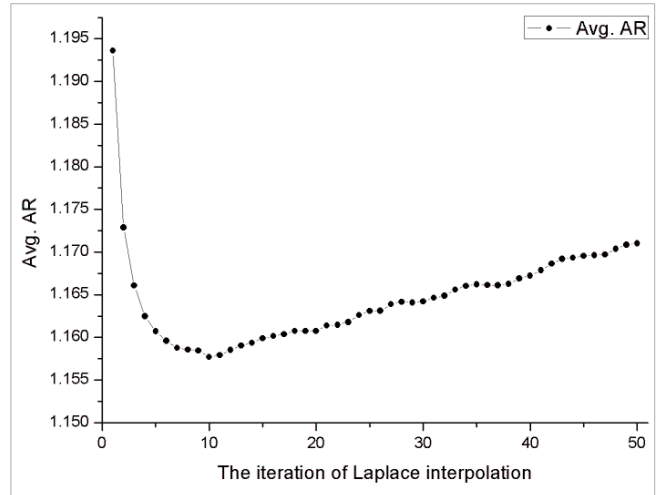


Fig. 19 The comparison of Avg. AR by the iteration of Laplace interpolation

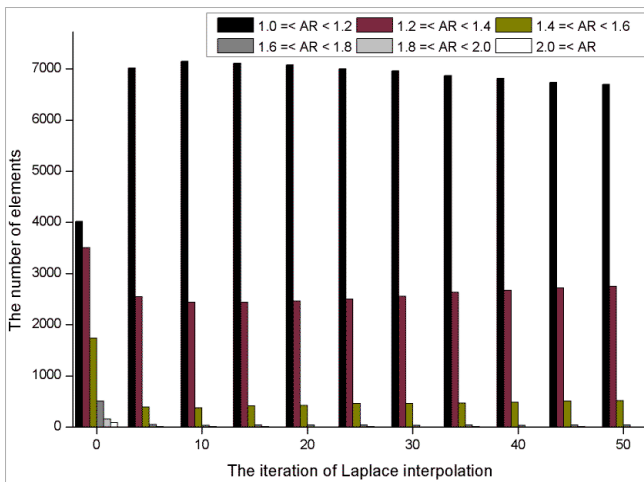


Fig. 17 The number of elements by the iteration of Laplace interpolation

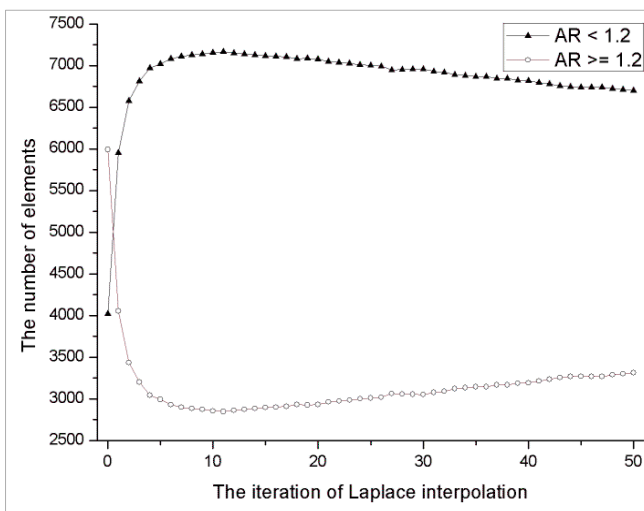


Fig. 18 The comparison of the number of elements for  $AR < 1.2$  and  $AR \geq 1.2$  by the iteration of Laplace interpolation

Fig. 18에서 알 수 있듯이 AR값이 1.0~1.2 범위 내의 요소들이 Laplace 보간을 10회 했을 때 가장 증가했다가 다시 감소하는 경향을 보이고, AR값이 1.2이상인 요소들은 Laplace 보간 10회 때가 가장 감소하였다가 다시 증가하는 경향을 볼 수 있다.

그리고 전체 요소에 대한 평균형상비(Avg. AR)를 Fig. 19에 나타내었다. Fig. 11에서 알 수 있듯이 개별요소법(DEM)을 이용하여 작성된 전체 영역에 대하여 계산한 격자의 품질도 우수하게 나타내고 있지만, 개별요소법(DEM)을 이용하여 작성된 격자를 가지고 Laplace보간을 50회까지 수행하였을 때, Table 1, Fig. 17, 18, 19에서 알 수 있듯이 AR의 값들이 1에 가까울수록 격자의 품질이 우수하기 때문에 Laplace보간을 10회 수행하였을 때가 보다 높은 품질의 격자가 생성되며, 10회를 초과하면 격자의 품질이 전보다 다소 낮아지는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론 및 요약

본 연구에서는 기존의 Delaunay 삼각망 작성기법을 바탕으로 DEM기법을 새로 추가하여 복잡한 지형형상을 가지는 대상영역에 우수한 품질의 삼각형 격자망을 작성할 수 있는 기법을 개발하였다. 개별요소법(DEM)을 이용하여 적절하게 절점을 배치하고, Delaunay 삼각기법을 이용하여 삼각형 격자를 생성한 후에 적절한 Laplace 보간을 수행한 결과, 매우 우수한 격자가 생성되는 것을 알 수 있었다.

개발된 삼각형 격자 생성기법은 기존의 방법에 비해 격자 생성 시간은 다소 오래 걸리는 단점이 있지만 복잡한 형상과 정확한 지형의 재현을 필요로 하는 파랑해석용 유한요소 격자망 작성 및 수치모의 분야에 적용가능성이 매우 높다고 사료된다.

## 참 고 문 헌

- [1] 김남형, 양정필, 박상길(2000), “수심을 고려한 천해역에서의 자동요소 생성법”, 한국항만학회, 제14권, 제1호, pp. 97-105.
- [2] 정순완, 김승조(2001a), “버블패킹방법을 이용한 2차원 자동격자 생성 및 재구성 알고리즘 개발(I)”, 대한기계학회논문집, A권, 제25권, 제6호, pp. 1004-1014.
- [3] 정순완, 김승조(2001b), “버블패킹방법을 이용한 2차원 자동격자 생성 및 재구성 알고리즘 개발(II)”, 대한기계학회논문집, A권, 제25권, 제12호, pp. 1926-1932.
- [4] Hur, Y.T.(2006), “Cavity Formation and Its Remote Sensing in Sand Layer”, Ph.D. Dissertation, Kyoto University, Japan.
- [5] Kim, N.H. and Hur, Y.T.(2003), “The computation of Non-Linear Wave Height Distribution in Seogwipo Harbor by Finite Element Method”, KCORE, Vol. 17, No. 6, pp. 32-37.
- [6] Shimada, K.(1993), “Physically-Based Mesh Generation: Automated Triangulation of Surfaces and Volume via Bubble Packing”, Ph.D. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, U.S.A.
- [7] Shimada, K. and Gossard, D.C.(1998), “Automatic triangular mesh generation of trimmed parametric surfaces for finite element analysis”, Computer Aided Geometric Design, Vol. 15, No. 3, pp. 199-222.
- [8] Sloan, S.W.(1987), “A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane”, Adv. Eng. Software, 9(1), pp. 34-55.
- [9] Stimpson, C.J., Ernst, C.D., Knupp, P., Pebay, P.P. and Thompson, D.(2007), The Verdict Library Reference Manual.

---

원고접수일 : 2010년 1월 21일

심사완료일 : 2010년 4월 29일

원고채택일 : 2010년 5월 4일