

## 점과정 기법을 이용한 VaR추정의 성과

여성철<sup>1</sup> · 문성주<sup>2</sup>

<sup>1</sup>건국대학교 응용통계학과, <sup>2</sup>경상대학교 수산경영학과

(2010년 3월 접수, 2010년 4월 채택)

---

### 요약

금융위험의 위험관리를 위한 도구로서 현재 VaR가 널리 이용되고 있다. VaR의 측정은 사물의 편리상 정규분포를 가정하여 이루어져 왔으나 좀 더 정확한 VaR의 산출을 위해 최근 극단치이론을 이용한 추정방법이 관심을 끌고 있다. 지금까지 극단치이론을 이용하여 VaR의 추정을 위한 확률모형에는 주로 GEV모형과 GPD모형이 사용되고 있다. 본 논문에서는 기존의 EV모형이 갖는 문제점들을 극복하고 좀 더 정확한 VaR를 측정하기위한 노력으로 PP모형을 제시하였다. PP모형은 확률과정의 관점에서 GEV모형과 GPD모형을 포괄하는 모형으로서 기존의 EV모형을 일반화시키는 모형이라고 할 수 있다. PP모형이 기존의 정규분포와 두 EV모형에 비해 VaR추정의 성과가 우수함을 실증분석을 통해 보여주었다.

주요용어: Value at Risk, 극단치이론, GEV모형, GPD모형, PP모형, 사후검증.

---

### 1. 서론

금융기관을 비롯하여 일반기업에서 위험관리를 위한 도구로서 현재 VaR가 널리 이용되고 있다. VaR란 금리, 주가, 환율 등 기초적 시장가격들에 대한 미래 확률분포를 예측하여, 주어진 신뢰수준에서 금융자산의 목표보유기간 동안 발생할 수 있는 최대손실액을 의미한다. VaR의 큰 장점은 정의에서 알 수 있듯이 금융자산이 보유하고 있는 전체위험에 대해 단순하게 하나의 수치로서 나타내기 때문에 위험의 크기를 한눈에 파악할 수가 있으며 또한 여러 금융자산들의 위험크기를 비교할 수가 있다는 것이다.

그런데 VaR의 측정은 통계적으로 이루어지므로 어떠한 통계방법을 사용하느냐에 따라 동일한 금융자산에 대해서도 서로 다른 VaR가 도출될 수 있다. 특히 VaR는 금융자산의 손실가능액을 나타냄으로써 위험을 측정함에 있어 금융자산 수익률분포의 왼쪽꼬리부분에 관심의 초점을 두게 된다. 따라서 신뢰성이 높은 VaR를 구하기 위해서는 금융자산 수익률분포의 꼬리부분을 정확하게 파악하는 것이 매우 중요하다고 할 수 있다.

일반적으로 VaR를 측정할 때 사용되는 방법은 자산 수익률의 분포형태에 대해 어떻게 가정하느냐에 따라 모수적 방법과 비모수적 방법으로 나눌 수 있다. 모수적 방법은 금융자산의 수익률에 대해 특정한 확률분포를 가정하여 자산 수익률의 변동성을 추정함으로써 VaR를 구하는 것으로 일반적으로 정규분포의 가정을 많이 사용한다. 그런데 모수적 방법은 수익률에 대해 특정한 분포를 가정함으로써 나타나는 모형위험이 따른다. 특히 Duffie와 Pan (1997)과 Jorion (2006) 등에서도 언급하고 있듯이 금융자산 수

이 논문은 2007년도 건국대학교 학술진흥연구비 지원에 의한 논문임.

<sup>1</sup>교신저자: (143-701) 서울시 광진구 화양동 1번지, 건국대학교 상경대학 응용통계학과, 교수.

E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr

익률의 분포는 꼬리부분이 정규분포에 비해 두터운 형태를 띄우기 때문에 정규분포 가정에 의한 VaR는 실제의 VaR를 과소평가하는 경향이 있다.

한편, 비모수적 방법은 금융자산 수익률에 대해 특정한 분포를 가정하지 않고 과거 수익률 데이터를 이용하여 분포를 추정한 후 이를 바탕으로 미래의 예상손실액인 VaR를 추정한다. 비모수적 방법은 자산 수익률의 특정한 분포를 가정하지 않으므로 모수적 방법에 비해 모형위험은 적으나 과거의 데이터를 이용하기 때문에 과거에 발생한 손실보다 더 큰 손실이 발생할 가능성을 예측할 수 없을 뿐만 아니라 관찰치가 대부분 평균을 중심으로 밀집되어 있어서 꼬리부분에서는 관찰치가 희박하기 때문에 상대적으로 변동성이 큰 VaR가 측정되는 문제가 있다.

이러한 기존의 VaR 측정방법들이 가지고 있는 문제점들을 극복하고 통계적으로 보다 정확한 VaR를 측정하기 위한 노력으로 최근 많이 연구되고 있는 방법이 소위 극단치 이론(extreme value theory; EVT)에 의한 방법이다. 이 방법은 VaR를 측정하기 위해서 전체 수익률 데이터의 분포에서 꼬리부분에 속하는 데이터들을 다른 영역의 데이터들과 분리하여 이들만의 접근적 분포형태를 제공하는 통계적 이론을 이용하는 것이다. 이 방법의 장점은 꼬리부분의 확률을 추정하는데 중심부의 자료가 미치는 영향을 줄일 수 있으며 또한 자산 수익률에 대해 어떠한 특정한 분포의 가정 없이 VaR를 측정함으로써 특정분포를 가정할 경우 실제분포와의 차이에서 발생하는 오차를 줄일 수 있다. 그리고 자산 수익률분포의 비대칭성과 두터운 꼬리형태를 반영할 뿐만 아니라 실증분포의 꼬리를 부드럽게 만들어서 과거에 발생한 손실을 초과하는 극단적 사건의 발생 가능성을 반영하도록 하여준다.

일반적으로 EVT에서 사용되는 확률분포에는 극단치를 어떻게 정의하느냐에 따라 일반화극단치(generalized extreme value; GEV)분포와 일반화파레토분포(generalized pareto distribution; GPD)라고 불리우는 두 가지 형태의 분포가 있다. GEV분포는 극단치를 블록최대(block maxima; BM)방법에 의해 정의할 때 도출되는 분포이며, GPD는 극단치를 임계치초과극단(peaks over thresholds; POT)방법에 따라 정의할 때 얻어지는 분포이다. 흔히 GEV분포를 사용하는 EVT를 비조건적 EV모형이라 부르고, GPD를 사용하는 EVT를 조건적 EV모형이라고 부르기도 한다.

지금까지 EVT를 이용한 VaR의 추정에 관한 많은 논문들 중에서 중요한 몇 가지를 살펴보면 다음과 같다. 비조건적 EV모형을 이용한 주요논문으로는 Danielsson과 de Vries (1997a, 1997b) 등이 있고 조건적 EV모형을 이용한 논문으로는 McNeil (1997), McNeil과 Saladin (1997), Neftci (2000) 등이 있으며 특히 McNeil과 Frey (2000)는 조건적 EV모형에 GARCH모형을 결합하여 2단계 과정으로 VaR를 추정하였다.

한편, Embrechts 등 (1997), Reiss와 Thomas (2001), Coles (2001) 등에서 언급되어 있는 바와 같이 새로운 EV모형으로 점과정(point process; PP)모형이 있다. 이 모형의 장점은 기존의 GEV모형과 GPD모형을 포함하면서 이들 모형 중 한 가지 모형을 이용하는 것보다 더 많은 데이터정보를 이용함으로써 EV모형의 모수를 좀 더 정확히 추정할 수 있다는 점이다. 따라서 본 논문에서는 점과정모형을 이용하여 기존의 VaR측정방법에 비해 좀 더 정확하게 VaR를 추정하는 것에 대해 논의하고자 한다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 본 논문의 제 2절에서는 기존의 EVT에 관한 두 가지 모형, 즉 GEV모형과 GPD모형에 관해 살펴보고 제 3절에서는 점과정모형에 의한 VaR의 추정에 대해 논의한다. 제 4절에서는 실증분석을 위해 기초적 시장위험요인으로 주가지수 수익률을 사용하여 새로운 PP모형에 의한 VaR와 전통적인 정규분포와 기존의 두 가지 EV모형들에 의한 VaR와 비교분석한 결과를 제시한다. 끝으로 제 5절에서는 본 논문에 대한 검토와 함께 추후 본 논문과 관련한 연구과제에 대해 논의하기로 한다.

## 2. 극단치 모형

### 2.1. GEV모형

일반적으로 EVT의 결과로 얻어지는 확률모형에는 GEV모형과 GPD모형이 있다. 본 절에서 다루는 내용은 Yeo (2006)에서 이미 논의하였으나 편의상 다시 간략히 언급하고자 한다.

확률변수들  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 이 독립이고 항등적(IID)이며 분포함수  $F$ 를 가진다고 하자. 그리고 이 확률변수들 중 최대확률변수를  $M_n$ , 즉  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 이라고 하자. Fisher와 Tippett(1928)에 의하면 어떤 상수들  $a_n \in R^+$ ,  $b_n \in R$ 에 의해 표준화된 최대확률변수  $\tilde{M}_n = (M_n - b)/a_n$ 은  $n \rightarrow \infty$ 일 때 아래의 표준극단치분포들(standard extreme value distributions)이라고 부르는 세가지 유형의 분포들 중 하나로 수렴한다.

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \quad (2.1)$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\}, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \quad (2.2)$$

$$\text{Gumbell: } \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}, \quad x \in R. \quad (2.3)$$

한편, Jenkinson (1955)과 von Mises (1936)는  $n \rightarrow \infty$ 일 때  $\tilde{M}_n$ 의 수렴분포로 위의 세가지 유형의 표준극단치분포들을 통합한 소위 일반화극단치분포(generalized extreme value distribution; GEV)라고 부르는 분포함수를 제시하였다. 즉

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\tilde{M}_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\tilde{M}_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\xi(x) \quad (2.4)$$

가 된다. 여기서  $H_\xi(x)$ 는 GEV분포함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\right\}, & 1 + \xi x > 0, \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}), & x \in R, \xi = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

여기서  $\xi$ 는 GEV의 형태를 결정짓는 모수로서 형태모수(shape parameter) 또는 꼬리지수(tail index)라고 부르는데,  $\xi = \alpha^{-1} > 0$ ,  $\xi = -\alpha^{-1} > 0$ ,  $\xi = 0$ 을 취할 때  $H_\xi$ 는 각각 Fréchet 분포족, Weibull 분포족, Gumbell 분포족에 속하게 된다. 특히  $\xi = 0$ 인 경우는  $\xi \rightarrow 0$ 일 때의  $H_\xi$ 의 극한분포함수  $H_0$ 로 볼 수 있다.

위의 식 (2.4)에서  $n \rightarrow \infty$ 일 때  $M_n$ 의 위치모수(location parameter)와 척도모수(scale parameter)를 각각  $\mu$ 와  $\sigma$ 라고 하면  $n$ 이 충분히 클 때  $M_n$ 의 분포함수는 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$P(M_n \leq x) \approx H_\xi\left(\frac{\mu - \sigma}{\sigma}\right) = H_{\xi, \mu, \sigma}(x). \quad (2.6)$$

이제 GEV분포에 대해 VaR를 나타내 보자. 이를 위해  $H_{\xi, \mu, \sigma}$ 의 분위수함수(quantile function)  $H_{\xi, \mu, \sigma}^{-1}$ 를 구해보면 식 (2.5)와 (2.6)으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$H_{\xi, \mu, \sigma}^{-1}(x) = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - (-\log x)^{-\xi}\right], & \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log(-\log x), & \xi = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

따라서 신뢰수준  $p$ 에서 VaR는  $\text{VaR}_p = H_{\xi, \mu, \sigma}^{-1}(1-p)$ 가 된다. 즉,

$$\text{VaR}_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[ 1 - \{-\log(1-p)\}^{-\xi} \right], & \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log\{-\log(1-p)\}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

이 된다.

그런데 실제 데이터를 이용하여  $\text{VaR}_p$ 를 구체적으로 계산하기 위해서는 식 (2.8)에 내포된 미지의 모수들  $\mu, \sigma, \xi$ 에 대한 추정치를 먼저 구해야 한다. 이를 위해 일정기간 동안 관찰된 데이터로부터 근사적으로 GEV분포를 따르는 극단치 데이터를 구하는 것이 필요하다. 어떤 기간동안 관찰된  $T$ 개의 표본 데이터를  $X_1, X_2, \dots, X_T$ 라고 하자. 이들 전체표본 데이터를 관찰기간에 따라  $m$ 개의 블록(block)으로 나누어서 각 블록마다  $n(=T/m)$ 개씩의 하위표본(subsample) 데이터가 들어있도록 한다. 이때 하위표본의 크기  $n$ 은 Fisher-Tippett정리가 적용될 수 있을 만큼 충분히 크게 잡는다. 이제  $j$ 번째 블록에 있는 하위표본 관찰치들 중에 최대관측표본을  $M_n^{(j)}$ , 즉  $M_n^{(j)} = \max\{X_{(j-1)n+1}, \dots, X_{(j-1)n+n}\}$ 이라고 하면 근사적으로 GEV분포를 따르는 극단치 데이터  $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \dots, M_n^{(m)}$ 이 얻어진다.

위에서와 같이 극단치 데이터를 구하는 방법을 BM(block maxima)방법이라고 부른다. 이 방법은 데이터를 효율적으로 이용할 수 있는 장점이 있는 반면에 전체 데이터를 몇 개의 블록으로 나눌 것인가에 따라 분산과 편이의 상반관계가 나타난다. 즉 각 블록의 크기를 증가시키면 추정량의 편이가 감소하는 반면에 블록의 개수가 적어져서 추정량의 분산이 커지게 되고, 반대로 블록의 개수를 증가시키면 분산이 작아지는 대신에 편이가 증가하게 된다.

이제 GEV분포에 내포된 모수들  $\mu, \sigma, \xi$ 에 대한 최우추정치들을 구해보자. BM방법에 의해 구해진  $m$ 개의 극단치 데이터  $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}, \dots, M_n^{(m)}$ 은  $n$ 이 충분히 클 경우 근사적으로 GEV분포를 따르는 데이터라고 볼 수 있다. 따라서 모수들  $\mu, \sigma, \xi$ 에 대한 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$L(\mu, \sigma, \xi) = \prod_{j=1}^m h_{\xi} \left( \frac{M_n^{(j)} - \mu}{\sigma} \right), \quad (2.9)$$

여기서  $h_{\xi}(x)$ 는 GEV분포의 확률밀도함수로서 다음과 같다.

$$h_{\xi}(x) = \begin{cases} H_{\xi}(x) (1 + \xi x)^{-(1+\frac{1}{\xi})}, & 1 + \xi x > 0, \quad \xi \neq 0, \\ H_0(x) e^{-x}, & x \in R, \quad \xi = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

따라서 식 (2.9)와 식 (2.10)으로부터 모수들  $\mu, \sigma, \xi$ 에 대한 로그우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$l(\mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} -m \log \sigma - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^m \log \left\{ 1 + \xi \left( \frac{M_n^{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \right\} - \sum_{i=1}^m \left\{ 1 + \xi \left( \frac{M_n^{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \right\}^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \left( \frac{M_n^{(i)} - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^m \exp \left\{ - \left( \frac{M_n^{(i)} - \mu}{\sigma} \right) \right\}, & \xi = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

단,  $\xi \neq 0$ 일 때  $1 + \xi((M_n^{(i)} - \mu)/\sigma) > 0, i = 1, \dots, m$ 이다. 따라서 식 (2.11)에서 주어진 로그우도함수로부터 모수들  $\mu, \sigma, \xi$ 에 대한 최우추정치들을 구할 수 있다.

## 2.2. GPD모형

앞의 절에서 논의한 BM방법을 이용하여 극단치 데이터를 구할 때 문제점은 어떤 블록에는 극단치들이 집중되어 있고 다른 블록에는 정상적인 관측치들만 있을 경우에 즉, 극단치들이 각 블록마다 고르게 분

포되어 있지 않을 경우에 어떤 블록에서 선택된 최대 관측치는 전체 데이터의 관점에서는 진정한 극단치로 볼 수 없는 경우가 발생할 수 있다. 이러한 문제점을 해소하면서 BM방법에 비해 좀더 효율적으로 극단치 데이터를 구하는 방안으로 순서통계량의 개념에 기초한 방법이 있다. 이 방법은 임계치초과극단(peaks over threshold; POT)방법이라고 부르는 것으로 전체 데이터를 크기순으로 배열하였을 때 어떤 임계치를 초과하는 관측치들을 극단치 데이터로 정의한다.

확률변수  $X$ 의 분포함수를  $F$ 라 하고  $F$ 의 오른쪽 끝점을  $x_F$ (즉,  $x_F = \sup\{x \in \mathcal{R} : F(x) \leq 1\} \leq \infty$ )라고 하자. 이 때 임의의 높은 임계치  $u$ 에 대해서 임계치 초과분포함수(excess distribution over the threshold)를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(X - u \leq x | X > u) \\ &= \frac{F(u+x) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad 0 \leq x < x_F - u. \end{aligned} \quad (2.12)$$

즉, 임계치초과분포함수  $F_u$ 는 확률변수  $X$ 가 주어진 임계치  $u$ 를 초과할 때 초과크기에 대한 조건부 분포함수를 나타낸다. Balkema와 de Haan (1974)과 Pickands (1975)에 의하면  $X$ 의 분포함수  $F$ 가 GEV분포의 최대매력영역(maximum domain of attraction; MDA)에 속하는 경우에는  $u \rightarrow \infty$ 일 때  $F_u(x)$ 는 일반화파레토편포(generalized Pareto distribution; GPD)함수  $G_{\xi, \sigma_u}(x)$ 로 수렴한다고 알려져 있다. 여기서

$$G_{\xi, \sigma_u}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & x \geq 0, 1 + \frac{\xi x}{\sigma_u} > 0, \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma_u}\right), & x \geq 0, \xi = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

$\sigma_u = \sigma + \xi(u - \mu)$ 이다. 따라서 실제 응용의 경우  $n$ 이 충분히 클 때 최대확률변수  $M_n$ 의 분포가 Fisher-Tippett정리에 의해 근사적으로 일반화극단치분포함수  $H_{\xi, \mu, \sigma}$ 를 따르고 이 때  $x_F$ 에 충분히 가까운 높은 임계치  $u$ 를 택하면 임계치초과분포함수  $F_u$ 는 근사적으로 일반화파레토편포함수에 접근한다.

이제 GPD 함수에 내포된 모수들  $\xi, \sigma_u$ 에 대한 추정치를 구하기 위해 POT방법에 의해 극단치 데이터를 구하기로 한다. 어떤 기간동안 관찰된  $n$ 개의 표본데이터  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이 분포함수  $F$ 를 따르고  $F$ 의 오른쪽 끝점을  $x_F$ 라고 하자.  $x_F$ 에 충분히 가까운 임계치  $u$ 가 주어졌을 때  $n$ 개의 표본데이터들 중 임계치  $u$ 를 초과하는 관측치들을  $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$ 라 하고 임계치초과값들(threshold excesses)을  $y_i = x'_i - u, i = 1, \dots, k$ 라고 표기하자. 이때 임계치  $u$ 가  $x_F$ 에 충분히 가까운 값이면 Balkema-de Haan-Pickands 정리에 의해 임계치초과데이터  $y_1, y_2, \dots, y_k$ 는 근사적으로 GPD모형을 따르는 데이터라고 볼 수 있다. 따라서 모수들  $\xi, \sigma_u$ 에 대한 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$L(\xi, \sigma_u) = \prod_{j=1}^k g_{\xi}\left(\frac{x}{\sigma_u}\right), \quad (2.14)$$

여기서

$$g_{\xi}(x) = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}, & \xi \neq 0, \\ e^{-x}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

이다. 단,  $\xi > 0$ 일 때  $x \geq 0$ ,  $\xi < 0$ 일 때  $0 \leq x < -1/\xi$ 임. 따라서 모수  $\xi, \sigma_u$ 에 대한 로그우도함수는

다음과 같이 주어진다.

$$l(\xi, \sigma_u) = \begin{cases} -k \log \sigma_u - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^k \log \left(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma_u}\right), & \xi \neq 0, \\ -k \log \sigma_u - \frac{1}{\sigma_u} \sum_{i=1}^k y_i, & \xi = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

단,  $\xi > 0$ 일 때  $y_i > 0$ ,  $\xi < 0$ 일 때  $0 \leq y_i \leq -\sigma_u/\xi$ ,  $i = 1, \dots, k$ 이다. 따라서 식 (3.17)에서 주어진 로그우도함수로부터 모수들  $\xi, \sigma_u$ 에 대한 최우추정치들을 구할 수 있다.

이제 GPD와 추정된 모수들을 이용하여 자산수익률의 VaR를 구해보자. Balkema-de Haan-Pickands 정리로부터 임계치  $u$ 가  $x_F$ 에 충분히 가까우면  $F_u \approx G_{\xi, \sigma_u}(y)$ 가 된다. 이 결과를 식 (2.12)에 대입하고  $x = u + y$ 라 두면  $x > u$ 일 때 자산수익률분포의 꼬리부분은 근사적으로 다음과 같이 주어진다.

$$F(x) \approx (1 - F(u))G_{\xi, \sigma_u}(y) + F(u), \quad (2.17)$$

여기서 GPD함수에 내포된 모수들  $\xi, \sigma_u$ 에 대해 최우추정치들  $\hat{\xi}, \hat{\sigma}_u$ 를 대입하고  $F(u)$ 의 추정치로 경험적분포함수  $\hat{F}(u) = 1 - k/n$ 를 적용하면 식 (2.17)에서 주어진  $F(x)$ 는 다음과 같이 추정된다.

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}(x - u)}{\hat{\sigma}_u}\right). \quad (2.18)$$

따라서 신뢰수준  $p$ 에서 자산수익률의 VaR는 수익률 분포함수  $F(x)$ 의  $(1 - p)$ 번째 분위수를 나타내므로 다음과 같이 추정된다.

$$\begin{aligned} \widehat{\text{VaR}}_p &= \hat{F}^{-1}(1 - p) \\ &= u + \frac{\hat{\sigma}_u}{\hat{\xi}} \left\{ \left(\frac{n}{k}p\right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 3. 점과정 모형

본 절에서는 EVT를 이용한 VaR의 추정으로 점과정(point process)기법에 대해 논의한다. 이 접근법의 장점은 앞의 절에서 논의한 BM방법과 POT방법을 모두 포괄하면서 이들 방법에 비해 모수의 추정을 위한 더 많은 데이터 정보를 이용함으로써 보다 나은 모수추정치를 구할 수 있다는 점이다. 따라서 점과정 기법에 의한 VaR의 추정은 앞의 절에서 논의한 기존의 EV모형에 의한 VaR추정치보다 우수한 VaR추정치를 구할 수 있을 것으로 기대된다.

점과정 기법에 관한 일반적인 이론은 Cox와 Isham (1980)에서 참조할 수 있으며 EVT의 점과정 접근에 관한 책으로는 Leadbetter 등(1983), Embrechts 등 (1997)과 Coles (2001) 등이 있고, 논문으로는 Pickands (1971), Resnick (1986) 등이 있으며 특히 점과정의 통계적응용에 관한 논문으로는 Smith (1989), Smith와 Shively (1995) 등이 있다.

점과정이란 간단히 말해서 시공간에서 점의 형태로 발생하는 사건들로 이루어진 확률과정이라고 할 수 있다. 즉, 확률벡터  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{iq})$ ,  $i = 1, \dots, n$ 가 취하는 상태공간을  $S$ 라 하고  $S$ 의 임의의 부분집합  $A$ 에 속하는 확률벡터  $\mathbf{X}_i$ 의 개수를 점과정  $N(A) = \text{card}\{i : \mathbf{X}_i \in A\}$ 라고 표기한다. 이 때  $\Lambda(A) = E[N(A)]$ 를 점과정  $N(A)$ 의 강도척도(intensity measure)라 하고,  $\lambda(A) = \int \dots \int_A \lambda(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ 로 표현될 때  $\lambda(\mathbf{x})$ 를 점과정의 강도함수(intensity function)라고 부른다.

먼저 표준적인 점과정인 일차원 포와송(Poisson)과정을 고려해보자. 임의의 시간구간  $A = (s, t]$ 에서 발생하는 사건들의 수를 점과정  $N(A)$ 라 할 때  $N(A)$ 의 확률분포가 평균  $\Lambda(A) = E[N(A)] = \int_s^t \lambda(x)dx$ 인 포와송분포를 따르고, 집합  $B = (u, v]$ 를  $A$ 와는 겹치지 않는 임의의 시간구간이라고 할 때  $N(A)$ 와  $N(B)$ 가 확률적으로 서로 독립일 때 점과정  $N(A)$ 는 강도함수  $\lambda(t)$ 를 가진 비동형의 포와송과정(non-homogeneous Poisson process)을 따른다고 말한다. 특히 강도함수가  $\lambda(x) = \lambda$ 로서 상수일 때는 점과정  $N(A)$ 는 강도율(intensity rate)  $\lambda$ 를 가진 동형의 포와송과정(homogeneous Poisson process)을 따른다고 말한다.

임의의  $t$ 시점까지 발생한 모든 사건들의 집합을  $\mathcal{H}_t$ 라 하면 위의 강도함수  $\lambda(t)$ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\lambda(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(N(t, t+h] > 0 | \mathcal{H}_t) \tag{3.1}$$

따라서 강도율  $\lambda$ 는 단위시간당 사건의 발생율을 의미한다.

전체 관측구간  $[0, T]$ 에서 발생한 사건들의 관측시점을  $t_1, \dots, t_n$ 이라하고, 이들 시점들이 모수  $\theta$ 를 내포한 강도함수  $\lambda(t; \theta)$ 를 가진 비동형의 포와송과정을 따른다고 가정하면 이들 관측시점들을 바탕으로 모수  $\theta$ 에 대한 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i; \theta) \exp\left(-\int_0^T \lambda(t; \theta) dt\right). \tag{3.2}$$

한편, 앞에서 언급한 바와 같이 정규화된 관측치들의 수열  $\{(X_i - b_n)/a_n; i = 1, \dots, n\}$  중에서 어떤 임계값  $u$ 를 초과하는 관측치들의 개수를  $N_n$ 이라고 하면  $N_n$ 은 이항분포  $B(n, p)$ 를 따르는 확률변수열을 나타낸다. 여기서  $p = P((X_i - b_n)/a_n > u) = 1 - F(a_n u + b_n)$ 이다. 그리고 식 (2.4)에서 주어진 결과는 동등하게 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \{1 - F(a_n x + b_n)\} = -\log H_\xi(x). \tag{3.3}$$

따라서 위의 식 (3.3)으로부터 이항확률변수열  $N_n$ 은  $n \rightarrow \infty$ 일 때 평균이  $E(N) = -\log H_\xi(x)$ 인 포와송(Poisson)확률변수  $N$ 으로 분포적으로 수렴한다.

그런데 위의 논의에서 확률변수열  $N_n$ 에는 정규화를 위한 미지의 상수열  $a_n, b_n$ 이 내포되어 있는데 이들은 확률변수  $X_i$ 의 분포함수  $F$ 의 형태에 따라 달라진다. 따라서 이들 상수열을 수렴분포의 위치모수와 척도모수에 흡수시킴으로써 이들 상수들을 구해야하는 번거로움을 피할 수 있다.

위의 논의과정을 점과정의 관점에서 다시 표현하기로 한다. 상태공간  $\mathcal{S} = [0, 1] \times \mathcal{R}$ ( $\mathcal{R}$ : 실수집합)에서 점과정을 이루는 확률벡터  $\mathbf{X}_i = (i/n, (X_i - b_n)/a_n), i = 1, \dots, n$ 이 주어졌다고 하자. 그리고 어떤 임계값  $u$ 와 구간  $[t_1, t_2]$  ( $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ )에 대해 집합  $\mathcal{A} = [t_1, t_2] \times [u, \infty)$ 라고 하자. 그러면 상태공간  $\mathcal{S}$ 에 속하는  $n$ 개의 확률점들(random points) 중에서 집합  $\mathcal{A}$ 에 속하는 점들의 개수를 나타내는 점과정  $N_n(\mathcal{A}) = \text{card}\{i : \mathbf{X}_i \in \mathcal{A}\}$ 는 이항분포  $B(n, p)$ 를 따르며  $n \rightarrow \infty$ 일 때  $N_n(\mathcal{A}) \rightarrow N(\mathcal{A})$ 로 분포적으로 수렴한다. 여기서  $N(\mathcal{A})$ 는 강도척도(intensity measure)가  $\Lambda(\mathcal{A}) = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^\infty \lambda(t, z) dt dz$ 가 되는 포와송과정(Poisson process)을 나타낸다. 여기서  $\lambda(t, x)$ 는 강도함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda(t, x) = \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} \right\}^{-\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}, \quad 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} > 0. \tag{3.4}$$

따라서 강도척도  $\Lambda(\mathcal{A})$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Lambda(\mathcal{A}) = (t_2 - t_1) \left\{ 1 + \frac{\xi(u - \mu)}{\sigma} \right\}^{-\frac{1}{\xi}}, \quad 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} > 0.$$

이제 식 (3.4)의 강도함수에 내포된 모수들  $\mu, \sigma, \xi$ 의 최우추정치를 구하기 위해 식 (3.2)로부터 점과정모형에 대한 우도함수를 구체적으로 나타내 본다. 시간구간  $[0, T]$ 에서 관측된 전체 관측값들 중에서 임계값  $u$ 를 초과하는 관측값들의 관측시점과 관측값을 각각  $t_i, x_i (i = 1, \dots, n_u)$ 라 하면  $\{(t_i, x_i); i = 1, \dots, n_u\}$ 는 집합  $A_u = [0, T] \times (u, \infty)$ 에서 이차원 포와송과정을 이룬다. 따라서 이들 관측점들을 바탕으로 모수들  $\xi, \mu, \sigma$ 에 대한 우도함수는 식 (3.2)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} L(\xi, \mu, \sigma) &= \exp\{-\Lambda(A_u)\} \prod_{i=1}^{n_u} \lambda(t_i; x_i) \\ &= \exp\left\{-\frac{N_u}{T} \left(1 + \frac{\xi(u - \mu)}{\sigma}\right)\right\}^{-\frac{1}{\xi}} \cdot \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{T} \frac{1}{\sigma} \left\{1 + \frac{\xi(x_i - \mu)}{\sigma}\right\}^{-(1+\frac{1}{\xi})} \end{aligned} \quad (3.5)$$

따라서 식 (3.5)의 우도함수에 로그를 취한 로그우도함수를 최대화함으로써 모수들  $\xi, \mu, \sigma$ 에 대한 최우추정값을 얻고, 아울러 이들 추정값에 대한 표준오차와 근사신뢰구간을 피셔정보행렬(Fisher information matrix)에 기초해서 구할 수 있다.

위에서 논의한 점과정모형은 모수들이 시간에 의존하지 않는 동형의 포와송과정모형이라고 할 수 있다. 만약 모수들이 시간에 의존할 경우, 즉  $\xi = \xi_t, \mu = \mu_t, \sigma = \sigma_t$ 일 경우에는 위의 점과정모형은 비동형의 포와송과정모형이 된다. 즉, 강도함수  $\lambda(t, x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\lambda(t, x) = \frac{1}{\sigma_t} \left\{1 + \frac{\xi_t(x - \mu_t)}{\sigma_t}\right\}^{-(1+\frac{1}{\xi_t})}, \quad 1 + \frac{\xi_t(x - \mu_t)}{\sigma_t} > 0. \quad (3.6)$$

따라서 집합  $A = [t_1, t_2] \times [u, \infty)$ 에 대해서 강도척도  $\Lambda(A)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Lambda(A) &= \int_{t_1}^{t_2} \int_x^\infty \lambda(t, z) dt dz \\ &= (t_2 - t_1) \left\{1 + \frac{\xi_t(u - \mu_t)}{\sigma_t}\right\}^{-\frac{1}{\xi_t}}, \quad 1 + \frac{\xi_t(x - \mu_t)}{\sigma_t} > 0. \end{aligned}$$

그리고 관측점들  $\{(t_i, x_i); i = 1, \dots, n_u\}$ 을 바탕으로 모수들  $\xi_t, \mu_t, \sigma_t$ 에 대한 우도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} L(\xi_t, \mu_t, \sigma_t) &= \exp\{-\Lambda(A_u)\} \prod_{i=1}^{n_u} \lambda(t_i; x_i) \\ &= \exp\left\{-\frac{N_u}{T} \left(1 + \frac{\xi_t(u - \mu_t)}{\sigma_t}\right)\right\}^{-\frac{1}{\xi_t}} \cdot \prod_{i=1}^{N_u} \frac{1}{T} \frac{1}{\sigma_t} \left\{1 + \frac{\xi_t(x_i - \mu_t)}{\sigma_t}\right\}^{-(1+\frac{1}{\xi_t})}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

한편, 앞의 절에서 논의한 GEV모형과 GPD모형은 점과정모형으로부터 얻어질 수 있다. 먼저 GEV분포가 도출되는 것을 Coles(2001)에서와 같이 보이기로 한다. 시간구간  $[0, T]$ 에서 관측된 전체 관측값들을  $X_1, \dots, X_n$ 이라 하고 이들 관측값들 중에서 최대관측값을  $M_n = \max\{X_i; i = 1, \dots, n\}$ 이라 하자.

집합  $A_x = [0, 1] \times (x, \infty)$ 라 하면 위의 논의로부터 점과정  $N_n(A_x) = \text{card}\{i : X_i \in A_x\}$ 는  $n \rightarrow \infty$ 일 때  $N(A_x)$ 로 분포적으로 수렴한다. 여기서 점과정  $N_n(A_x)$ 는 강도척도가  $\Lambda(A_x) = (1 + \xi(x - \mu)/\sigma)^{-1/\xi}$ 로 주어지는 포와송과정이다. 그런데 사건  $\{(M_n - b_n)/a_n \leq x\}$ 은  $N_n(A_x) = 0$ 임을 의미하므로  $n \rightarrow \infty$ 일 때 다음의 결과가 얻어진다.

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = P(N_n(A_x) = 0)$$



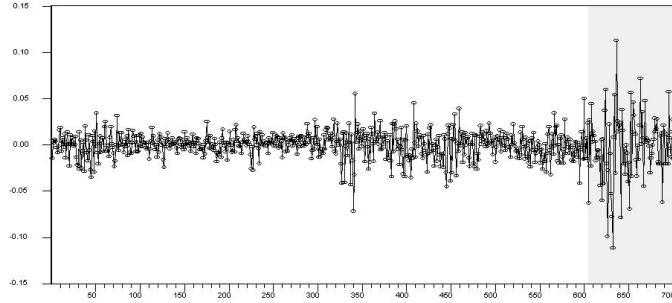


그림 4.1. 일별 주가지수수익률의 변화(2006년 4월~2009년 2월): 음영으로 표시되지 않은 구간이 추정구간이고, 음영으로 표시된 구간이 예측구간임.

$$\begin{aligned} \rightarrow P(N(A_x) = 0) &= \exp\{-\Lambda(A_x)\} \\ &= \exp\left\{-\left(1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

따라서 정규화된 최대관측값의 분포가 점근적으로 GEV분포로 수렴함을 알 수 있다.

다음으로 점과정  $N_n(A_x)$ 로부터 GPD분포가 얻어지는 것을 보이기 위해 강도척도  $\Lambda(A_x)$ 를 다음과 같이 분해한다.

$$\Lambda([t_1, t_2] \times (x, \infty)) = \Lambda_1(t_1, t_2) \times \Lambda_2((x, \infty)), \quad (3.9)$$

여기서  $\Lambda_1([t_1, t_2]) = t_2 - t_1$  ( $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ ),  $\Lambda_2(x, \infty) = (1 + \xi(x - \mu)/\sigma)^{-1/\xi}$ 이다. 그러면 전체 관측값들 중에서  $X_i > u$ 일 때  $X_i - u > x$ 가 될 조건부확률은  $n \rightarrow \infty$ 일 때 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda([0, T] \times (x + u, \infty))}{\Lambda([0, T] \times (u, \infty))} &= \frac{\Lambda_2((x + u, \infty))}{\Lambda_2((u, \infty))} \\ &= \left(\frac{1 + \xi(x + u - \mu)/\sigma}{1 + \xi(u - \mu)/\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= \left(1 + \frac{\xi x}{\tilde{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

여기서  $\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$ 이다. 따라서 임계치 초과극값의 조건부분포가 점근적으로 GPD분포로 수렴함을 알 수 있다.

#### 4. 실증분석

##### 4.1. 기초통계량

2007년 미국의 서브프라임 모기지 사태에서 촉발된 글로벌 금융위기가 본격화된 2008년 9월 15일 리먼브러더스 파산이후 약 100일간 하방위험(down side risk)이 최고에 이르러 많은 증권시장의 개인 및 기관투자자들이 큰 손실을 보았다. 이러한 극단적 사건에서는 정규분포하에서 산출한 VaR가 실제 위험을 과소평가할 가능성이 높다. 이를 해결하기 위해 도입된 기법이 극단치분포하에서 위험량을 산출하는 EV모형으로 GEV모형과 GPD모형 등이 있다. 하지만 GEV모형의 경우 극단적 사건이 주기성여

표 4.1. 일별 주가지수수익률의 기초통계량

기초통계량	전체기간	추정기간	예측기간
	2006/4/2~2009/2/10	2006/4/2~2008/9/12	2008/9/15~2009/2/10
평균	-0.002%	-0.0001%	-0.015%
표준편차	0.018	0.014	0.035
왜도	-0.521	0.502	-0.258
첨도	9.563	5.426	4.425
Jarque-Berra	1295.291 (0.000)*	173.906 (0.000)	9.483 (0.000)

\* 괄호안의 값은 Jarque-Berra 검정통계량의  $p$ 값임.

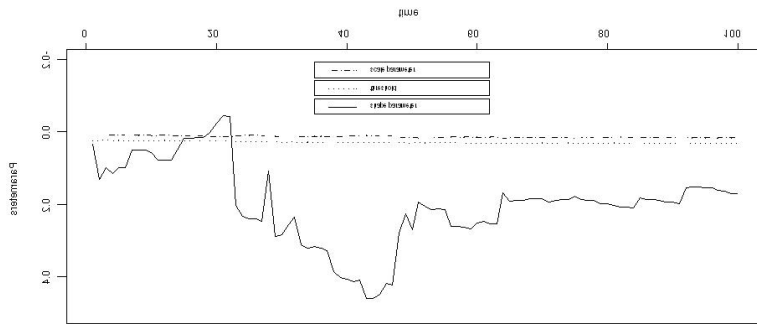
부에 따라 성과가 달라지고, GPD모형의 경우 임계치 설정방법에 따라 성과가 달라진다. 이러한 기존의 EV모형이 갖는 한계점을 극복하기 위해 도입된 모형이 PP모형이다. 그래서 본 연구는 글로벌 금융위기와 같은 극단적 상황에서 PP모형이 Normal모형, GEV모형, GPD모형보다 우수한지를 국내 주식시장을 통해 살펴보고자 한다. 이를 위한 추정기간은 2006년 4월 2일부터 2008년 9월 12일 까지 463일로 일정한 타임윈도우(time windows)를 유지하면서 각 VaR모형별 모수를 추정한다. 예측기간은 2008년 9월 15일부터 2009년 2월 10일 까지로 각 모형별 1일 VaR는 일단계전방예측(one-step ahead forecast)방법으로 산출하였다.

특히, 표 4.1에서 KOSPI주식의 변동성을 살펴보면 추정기간 평균수익률과 표준편차는 -0.0001%와 0.014인데 반하여 예측기간의 경우 -0.015%, 0.035로 하방위험이 크게 증가하였음을 알 수 있다. 또한 주가지수수익률은 전체기간 뿐만 아니라 추정 및 예측기간에 걸쳐 비대칭적이면서 두꺼운 꼬리분포를 가지고 있음을 알 수 있다. 즉, 조사기간내 주가지수수익률은 정규분포를 충족시키지 못하는데 이는 Jarque와 Berra (1987)에 의한 검정통계량이 1% 유의수준에서 유의함을 통해서도 확인할 수 있다. 이 경우 정규분포를 가정한 전통적 VaR모형은 실제 위험을 과소평가할 수 있다.

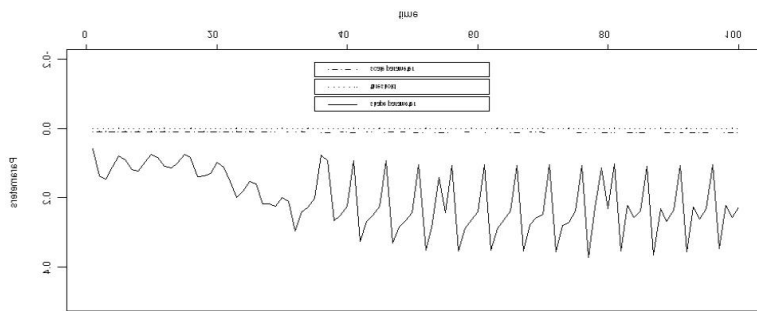
#### 4.2. VaR의 모수추정 결과

GPD모형에 의한 VaR의 모수들에 대한 최우추정치는 임계치  $u$ 에 따라 값이 달라진다. 즉, 임계치  $u$ 를 어떻게 잡느냐에 따라 분산과 편위의 상반관계가 나타날 수 있다. 임계치를 너무 낮게 잡으면 극단치 데이터의 수가 많아져서 추정치의 분산은 작아지지만 분포의 점근성이 떨어져서 편위가 커지게 되고, 반면에 임계치를 너무 높게 잡으면 그 반대의 현상이 나타날 수 있다. 일반적으로 임계치를 잡는 방법으로 ME플롯(mean excess plot)방식과 Hill플롯 방식이 있다. ME플롯 방식은  $\{(u, \hat{e}_X(u)) : x_{1:n} \leq u \leq x_{n:n}\}$ 으로 이루어진 플롯에서  $u$ 의 값을 변화시키에 따라 양의 기울기를 가진 직선형태의 영역이 시작되는 점을 임계값으로 정한다. 여기서  $\hat{e}_X(u)$ 는 평균초과함수(mean excess function)  $e_X(u) = E(X - u | X > u)$ 의 표본추정치이다. 이에 반하여 Hill플롯 방식은  $\{(k, H_{k,n}) : k = 2, \dots, n\}$ 으로 이루어진 플롯에서  $k$ 의 값에 따라 변화시켜갈 때  $H_{k,n}$ 가 안정화되기 시작하는 값을 임계치  $u$ 로 선택한다. 여기서  $H_{k,n}$ 은 Hill (1975)에 의해 제시된 형태모수  $\xi$ 에 대한 추정치로  $H_{k,n} = 1/k \sum_{i=1}^k \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n}$ 이고,  $X_{i,n}$ 은  $n$ 개의 관찰치들을 크기에 따라 내림차순으로 배열하였을 때  $i$ 번째에 위치한 관찰치를 의미한다. 본 연구에서는 ME플롯(mean excess plot)방식과 Hill플롯 방식을 병행하여 추정모수에 대한 표준오차가 가장 작은 임계치를 선정한 후 최우추정법으로 GPD모형에 포함된 모수들을 추정하였다. 예측기간 동안 추정된 모수들의 그래프는 그림 4.2(a)와 같다.

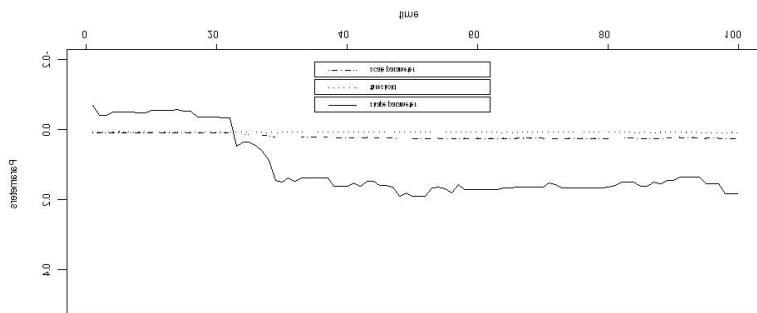
GEV모형에 의한 VaR를 추정하기 위해 전체관찰치를 일정구간으로 나누어 각 구간내에서 최소값을 극단치로 정의한 후 최우추정법에 의해 GEV모형에 포함된 모수들을 추정하였다. 이때 극단치가 발생하는 구간(block)을 실제거래일 기준으로 5일(주별), 10일(2주별), 15일(3주별), 20일(월별)로 나누어 분



(a) GPD모형



(b) GEV모형



(c) PP모형

그림 4.2. 신뢰수준 99%하에서 GEV, GPD, PP모형에 의한 모수추정 그래프

석하였다. 그 결과 구간을 20일로 설정한 경우가 다른 구간에 비해 표준오차가 상대적으로 가장 낮았다. 구간을 20일 이상 기간으로 추가적으로 나누지 않은 이유는 표본의 수가 적어져 모수의 추정시 편의가 증가하기 때문이다. 예측기간 동안 추정된 모수들의 그래프는 그림 4.2(b)와 같다.

표 4.2. VaR의 추정 및 사후검증 결과

VaR모형	하방위험(down side risk)			
	평균 VaR	초과회수 ( $V^{freq}$ )	초과회수 ( $V^{size}$ )	실패율 ( $p$ 값)
$p = 0.95$				
Normal모형	0.0283	19	0.5210	0.19% (0.000)*
GPD모형	0.0313	17	0.4714	0.17% (0.000)
GEV모형	0.0603	7	0.1811	0.07% (0.386)
PP모형	0.1157	2	0.0363	0.02% (0.119)
$p = 0.99$				
Normal모형	0.0401	12	0.3611	0.12% (0.000)
GPD모형	0.0571	9	0.2234	0.09% (0.000)
GEV모형	0.0317	16	0.4582	0.16% (0.000)
PP모형	0.1624	1	0.0105	0.01% (1.000)

\* 괄호안의 값은 Kupiec 검정통계량의  $p$ 값임.

PP모형의 VaR를 추정하기 위해 먼저 임계치  $u$ 의 설정이 필요한데, 임계치는 GPD모형에서와 같은 방식으로 관찰치 463개의 타임윈도우(time windows)를 유지하면서 ME플롯 방식과 Hill플롯 방식을 병행해 일차적으로 추정모수에 대한 표준오차가 가장 작은 임계치를 선정하고, 이를 바탕으로 PP모형의 모수들을 최우추정법에 의해 추정했다. 예측기간 동안 추정된 모수들의 그래프는 그림 4.2(c)와 같다.

#### 4.3. VaR의 추정 및 사후검증 결과

PP모형에 의해 산출한 VaR의 성과를 Berkowitz와 O'Brien (2002)의 방법 및 Kupiec (1995)의 방법에 의해 전통적 EV모형인 GPD모형, GEV모형 및 정규분포를 가정한 VaR모형의 성과와 비교 분석한 결과는 표 4.2와 같다.

Berkowitz와 O'Brien (2002)의 방법에 의하면 PP모형의 초과회수(number of violations), 초과정도(mean violation)는 신뢰수준 95%에서는 2번, 0.0363이고, 신뢰수준 99%에서는 1번 0.0105로 Normal모형, GPD모형, GEV모형보다 상대적으로 초과회수 및 초과정도가 적음을 알 수 있다.

Kupiec (1995)방법에 의하면 PP모형은 신뢰수준 95%에서 왼쪽 꼬리부분의 경우 PP모형의 실제 실패율은 2%로, GEV모형과 같이 유의적이지 않아 목표 실패율인 5%에 근접하고 있음을 볼 수 있으며, 특히 신뢰수준 99%에서 PP모형만이 실제 실패율이 1%로 유의적이지 않아 목표실패율인 1%에 근사하고 있음을 알 수 있다.

이처럼 기존의 EV모형의 한계점을 극복하기 위한 대안으로 소개된 PP모형이 전통적 EV모형보다 우수한 이유는 증권시장에서 발생하는 극단적 사건에 대한 시계열적 특성을 잘 반영할 수 있기 때문이다. 그러므로 VaR의 성과측면에서 볼 때 정규분포를 가정한 VaR모형 및 기존의 EV모형은 실제 위험을 적절히 평가하는데 한계점이 있어 글로벌 금융위기와 같은 극단적 상황에서는 전통적 EV모형의 한계점을 극복할 수 있는 PP모형이 위험척도로 적합할 것으로 판단된다.

#### 5. 결론

금융기관들에서 위험관리는 반드시 해야 하는 것으로 인식되고 있는 시점에서 이제는 위험관리 시스템을 갖추고 있는가의 여부보다는 어떤 방법을 이용하여 얼마나 정확하게 위험을 측정하고 관리하는가의 문제로 관심의 초점이 옮겨가고 있다. 이러한 추세에 비추어 볼 때 금융기관들이 VaR라는 위험관리 기

법을 사용할 경우 수많은 VaR의 측정방법 중에서 가장 정확한 VaR를 제공해 줄 수 있는 방법을 추구하는 것은 당연하다고 할 수 있다.

본 논문에서는 기존의 EV모형이 갖는 문제점들을 극복하고 좀 더 정확한 VaR를 측정하기 위한 노력으로 PP모형을 소개하였다. PP모형은 확률과정의 관점에서 GEV모형과 GPD모형을 포괄하는 모형으로서 기존의 EV모형을 일반화시키는 역할을 한다고 볼 수 있다.

실증분석에서 논의한 바와 같이 PP모형이 기존의 EV모형인 GEV모형과 GPD모형에 비해 VaR의 예측력이 상대적으로 우수함을 보여주고 있다. 그런데 본 논문의 실증연구에서는 모수들이 시간에 의존하지 않는 동형의 PP모형에 대해 분석하였는데 향후 모수들이 시간에 의존하는 비동형의 PP모형에 대해서 분석해 보는 것이 의미 있을 것으로 여겨진다. 또한 모수들의 사전확률분포를 고려하는 베이지안 모형을 PP모형의 관점에서 다루어 보는 것도 향후 흥미있는 연구과제로 생각된다. 끝으로 본 논문에서 다룬 PP모형은 단변량의 경우에 한해 소개되었는데 향후 이를 다변량의 경우로 확장하는 경우에 대해 논의해 보는 것이 필요하리라 생각된다.

## 참고문헌

- Balkema, A. A. and de Haan, L. (1974). Residual lifetime at great age, *Annals of Probability*, **2**, 792–804.
- Berkowitz, J. and O'Brien, J. (2002). How accurate are Value-at-Risk models at commercial banks?, *Journal of Finance*, **57**, 1093–1112.
- Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer, London.
- Cox, D. R. and Isham, V. (1980). *Point Processes*, Chapman and Hall, London.
- Danielsson, J. and de Vries, C. G. (1997a). Tail index and quantile estimation with very high frequency data, *Journal of Empirical Finance*, **4**, 241–257.
- Danielsson, J. and de Vries, C. G. (1997b). Value at Risk and extreme returns, In *Extremes and Integrated Risk Management*(ed. Embrechts, P.), 85–106, Risk Waters Group, London.
- Duffie, D. and Pan, J. (1997). An overview of Value at Risk, *Journal of Derivatives*, **4**, 7–49.
- Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosh, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, Berlin.
- Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **24**, 180–190.
- Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *Annals of Statistics*, **33**, 1163–1174.
- Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review*, **55**, 163–172.
- Jenkinson, A. F. (1955). The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological events, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **81**, 158–172.
- Jorion, P. (2006). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, **2**, 73–84.
- Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H. (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer, Berlin.
- McNeil, A. J. (1997). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory, *ASTIN Bulletin*, **27**, 117–137.
- McNeil, A. J. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271–300.
- McNeil, A. J. and Saladin, T. (1997). The Peaks over Thresholds Methods for Estimating High Quantiles of Loss Distributions, *Proceedings of 28th International ASTIN Colloquium*.

- Neftci, S. (2000). Value at Risk calculations, extreme events, and tail estimation, *The Journal of Derivatives*, 23–37.
- Pickands, J. (1971). The two-dimensional poisson process and extremal processes, *Journal of Applied Probability*, 8, 745–756.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics*, 3, 119–131.
- Reiss, R. D. and Thomas, M. (2001). *Statistical Analysis of Extreme Values*, 2nd ed., Birkhauser Verlag, Basel.
- Resnick, S. I. (1986). Point process, regular variation and weak convergence, *Advances in Applied Probability*, 18, 66–138.
- Smith, R. L. (1989). Extreme value analysis of environmental time series: An application to trend detection in ground-level ozone(with discussion), *Statistical Science*, 4, 367–393.
- Smith, R. L. and Shively, T. S. (1995). Point process approach to modeling trends in tropospheric ozone based on exceedances of a high threshold, *Atmospheric Environment*, 29, 3489–3499.
- von Mises, R. (1936). La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs, *Revere Mathematical Union Interbalcanique*, 1, 141–160.
- Yeo, S. C. (2006). Performance analysis of VaR and ES based on extreme value theory, *The Korean Communications in Statistics*, 13, 389–407.

# Performance of VaR Estimation Using Point Process Approach

Sung Chil Yeo<sup>1</sup> · Seoung Joo Moon<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Statistics, Konkuk University

<sup>2</sup>Department of Fisheries Business Administration, GyeongSang National University

(Received March 2010; accepted April 2010)

---

## Abstract

VaR is used extensively as a tool for risk management by financial institutions. For convenience, the normal distribution is usually assumed for the measurement of VaR, but recently the method using extreme value theory is attracted for more accurate VaR estimation. So far, GEV and GPD models are used for probability models of EVT for the VaR estimation. In this paper, the PP model is suggested for improved VaR estimation as compared to the traditional EV models such as GEV and GPD models. In view of the stochastic process, the PP model is regarded as a generalized model which include GEV and GPD models. In the empirical analysis, the PP model is shown to be superior to GEV and GPD models for the performance of VaR estimation.

**Keywords:** Value at risk, extreme value theory, GEV model, GPD model, PP model, back-testing.

---

---

This paper was supported by Konkuk University in 2007.

<sup>1</sup>Corresponding author: Professor, Department of Applied Statistics, Konkuk University, Seoul 143-701, Korea. E-mail: scyeo@konkuk.ac.kr