

확산모형에 대한 NLL 추정법의 특성과 적용

홍진영^a, 이윤동^{1,b}

^a건국대학교 응용통계학과, ^b서강대학교 경영학부

요약

확산모형은 금융현상을 모형화하기 위한 방법으로 자주 사용된다. 다양한 확산모형들을 추론하기 위한 다양한 추론기법들이 제안되어져 왔다. 본 연구에서는 시뮬레이션 방법을 통하여 Shoji와 Ozaki (1998)에 의하여 제안된 NLL 방법의 성질을 검토하여 보고, 실제 자료에 적용하게 된다.

주요용어: 확산모형, 이또 보조공식, NLL 추정법.

1. 서론

확산모형은 금융현상의 확률적 해석을 위하여 자주 사용되는 모형이다. 수리적으로 확산모형 x_t 는, 추세계수 $f(x_t)$ 와 확산계수 $g(x_t)$ 를 갖는 확률 편미분방정식

$$dx_t = f(x_t) dt + g(x_t) dw_t \quad (1.1)$$

의 해로서 주어지는 연속형 표본경로를 갖는 연속시간 마코프확률과정이다. 확산과정 (1.1)이 유일한 해(weakly solution)를 갖기 위해서는 관련된 정규적 조건식을 만족해야 한다. 이에 대하여는 Kleeden과 Platen (1995) 4장에 잘 나와 있다. Bachelier (1900)와 Samuelson (1965)이 브라운운동과 기하 브라운운동을 통하여 금융현상을 설명한 이후로, 다양한 형태의 추세계수 $f(x_t)$ 와 확산계수 $g(x_t)$ 가 고려되었고, 이에 따라 다양한 확산모형이 제안되었다. Vasicek (1977)은 Ornstein-Uhlenbeck 확률과정을 이용하여 금융현상을 설명하였다. CIR모형은 Cox (1985) 등에 의해 제안되었으며, 이자율에 민감한 파생상품에 대한 가격 평가를 위한 모형으로 자주 사용된다. Chan 등 (1992)은 CEV 모형이나 CIR 모형 등 기존에 제안되었던 모형을 일반화하기 위해서 CKLS 모형을 제안하였다. 이후 Duffie와 Kan (1996)은 DK 모형을, Conley 등 (1997)은 CHLS 모형을 제안했으며, Ahn과 Gao (1999)는 AG 모형을 제안하였다. 각 모형에 대한 구체적인 소개는 Ahn과 Gao (1999)에 나와 있다.

확산모형 모수들을 추정하기 위해서 다양한 연구들이 수행되어 왔다. 추론방법으로는 크게 (일반화된)적률법, 우도법, 근사우도법 등이 있는데, 본 논문에서는 근사우도법의 한 형태라고 할 수 있는 Shoji와 Ozaki (1998)가 제안한 NLL(New Local Linearization) 방법에 대하여 살펴보게 된다. NLL 방법은 다른 방법에 비해 이론적 전개가 단순하고, 계산이 빠르면서도 상대적으로 모수 추정이 정확하다는 장점이 있다. 이를 보이기 위하여 본 연구에서는 시뮬레이션 방법을 통해서 NLL 방법의 성질을 살펴보게 된다. 특히 Shoji와 Ozaki (1998) 논문에는 NLL 추정방법에 의하여 구한 추정량의 분산을 알 수 있는 결과가 제시되어 있지 못한데 비하여, 본 연구에서는 추정량의 평균과 함께 분산을 살펴볼 수 있는 결과를 제시하여 추정량의 성질을 보다 잘 살펴볼 수 있도록 하였다. 또한, 미국의 연방기금금리(U.S. Federal Funds Rate) 자료와 국내은행간 대출금리 자료에 대하여 NLL 방법을 적용한 결과를 제시하고, 오일러 방법에 의하여 얻은 추정량과 그 특성을 비교 검토하게 될 것이다.

본 연구는 서강대학교 2009년 교내연구비의 지원에 의하여 수행되었습니다.

¹ 교신저자: (121-742) 서울시 마포구 신수동 1번지 서강대학교 경영학부, 부교수. E-mail: widylee@sogang.ac.kr

2. NLL 방법에 대한 소개

식 (1.1)에서 추세계수 함수 $f(x)$ 는 x 에 대해서 연속적으로 2번 미분이 가능한 함수이며, 확산계수 함수 $g(x)$ 는 x 에서 미분이 가능하다고 하자. w_t 는 표준 브라운운동이다. 확산계수 $g(\cdot)$ 가 상수가 아닌 경우에 확산모형의 수리적 성질은 복잡한 특성을 갖게 된다. 이런 복잡한 특성을 고려해야 하는 어려움을 피하기 위하여, 확산계수 $g(\cdot)$ 를 상수로 만들어주는 변환방법이 고려된다. $y_t = \varphi(x_t)$ 의 관계를 가지는 y_t 는 이또 보조공식에 의해 다음과 같은 상수 확산계수를 갖는 확률편미분방정식으로 변환된다.

$$dy_t = a_y(y_t) dt + \sigma_0 dw_t,$$

$$a_y(y_t) = f \frac{d\varphi}{dx} + \frac{g^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

때문에 일반성의 상실 없이도 확산계수 $g(\cdot)$ 가 상수로 주어지는 경우에, 즉

$$dx_t = f(x_t)dt + \sigma dw_t \quad (2.1)$$

와 같은 모형에 대한 추정방법을 고려하는 것만으로도, 일반적인 모형에 대한 추정 방법을 알 수 있다. 먼저 식 (2.1)과 같은 모형에 대한 추론방법을 살펴본 이후에, 식 (1.1)의 경우에 어떻게 되는지를 살펴보기로 하자.

여기서 이또공식을 적용하여,

$$df = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

인 결과를 얻게 되므로, 이로부터 f 를 x_t 와 t 에서 선형화하기 위해서 다음과 같은 근사과정을 고려하도록 하자.

$$f(x_t) - f(x_s) = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (t - s) + \frac{\partial f}{\partial x} (x_t - x_s)$$

이므로,

$$L_s = \frac{\partial f}{\partial x}(x_s), \quad M_s = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_s), \quad N_s = f(x) - L_s x_s - M_s s$$

라 할 때, $f(x_t) \approx L_s x_t + M_s t + N_s$ 인 관계가 있다. 따라서 위의 식 (2.1)은 다음과 같이 근사된다.

$$dx_t = (L_s x_t + M_s t + N_s) dt + \sigma dw_t,$$

여기서

$$\tilde{w}_t = w_t - \int_s^t \gamma(u) du, \quad \gamma(u) = -\frac{1}{\sigma} (M_s u + N_s)$$

라 하면, Girsanov 정리에 의해서 \tilde{w}_t 를 브라운운동으로 만드는 확률측도 \tilde{P} 가 존재한다. 즉, \tilde{w}_t 를 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$dx_t = L_s x_t dt + \sigma d\tilde{w}_t$$

이고, 확률측도 \tilde{P} 하에서 \tilde{w}_t 는 국소마팅게일(local martingale)이 된다. 이때, $y_t = e^{-L_s t} x_t$ 라 하면,

$$\begin{aligned} y_t &= y_s + \int_s^t e^{-L_s u} d\tilde{w}_u, \\ &= y_s + \int_s^t (M_s u + N_s) e^{-L_s u} du + \sigma \int_s^t e^{-L_s u} dW_u \end{aligned}$$

와 같은 결과를 얻게 되므로, 이를 x_t 에 대하여 다시 정리하면,

$$x_t = x_s + \frac{f(x_s)}{L_s} (e^{L_s(t-s)} - 1) + \frac{M_s}{L_s^2} \{ (e^{L_s(t-s)} - 1) - L_s(t-s) \} + \sigma \int_s^t e^{L_s(t-u)} dW_u \quad (2.2)$$

인 형태로 전개된다. 이때 식 (2.2)의 확산계수부분은 평균이 0, 분산이

$$\sigma^2 \left(\frac{e^{2L_s(t-s)} - 1}{2L_s} \right)$$

인 정규분포가 되므로 이에 근거하여 다음과 같이 우도 설정이 가능하다.

일정시간 Δ_t 간격으로 관측된 확률과정 (x_1, x_2, \dots, x_N) 에 대하여 로그-우도함수는 마코프 성질에 의해서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \log(p(x_1, x_2, \dots, x_n)) &= \sum_{n=1}^{N-1} \log(p(x_{n+1}|x_n)) + \log(p(x_1)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{(x_{n+1} - E_n)^2}{V_n} + \log(2\pi V_n) \right\} + \log(p(x_1)), \end{aligned}$$

여기서 $L_n = L_s|_{(s,x_s)=(t_n,x_n)}$ 이고 $M_n = M_s|_{(s,x_s)=(t_n,x_n)}$ 이라 할 때,

$$\begin{aligned} E_n &= x_n + \frac{f(x_n)}{L_n} (e^{L_n \Delta_t} - 1) + \frac{M_n}{L_n^2} \{ (e^{L_n \Delta_t} - 1) - L_n \Delta_t \}, \\ V_n &= \frac{(e^{2L_n \Delta_t} - 1)}{2L_n} \sigma^2 \end{aligned}$$

이다.

앞서 언급한 바와 같이 식 (1.1)과 같이 확산계수 $g(\cdot)$ 가 상수가 아닌 경우에, $\varphi'(x) = 1/g(x)$ 인 함수 $\varphi(\cdot)$ 에 대하여, $y_t = \varphi(x_t)$ 와 같은 함수적 변환을 고려하여, y_t 가 식 (2.1)로 주어지는 모형에서와 같이 상수 상수확산계수를 갖는다고 하자. 이로부터 식 (1.1)과 같은 모형에 대한 우도 p_X 는

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_N) = (y_1, y_2, \dots, y_N) \cdot \left| \frac{\partial(y_2, \dots, y_N)}{\partial(x_2, \dots, x_N)} \right|$$

이다. 이때

$$\left| \frac{\partial(y_2, \dots, y_N)}{\partial(x_2, \dots, x_N)} \right| = \prod_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \varphi(x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} \right| = \left[\prod_{i=1}^{N-1} |g(x_{i+1})| \right]^{-1}$$

이므로, 식 (1.1)모형에 대한 로그-우도는 다음과 같다.

$$\log(p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{(y_{n+1} - E_n)^2}{V_n} + \log(2\pi V_n) \right\} + \log(p(y_1)) - \sum_{n=1}^{N-1} \log |g(x_{i+1})|,$$

표 1: 사용 모형에서의 모수들의 참값

모형	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	γ	σ^2
2		-3.0	0.0	4.0	0.0	-1.0		1.0
3	6	-11.0	6.0	-1.0			0.5	1.0

여기서

$$E_n = y_n + \frac{\tilde{f}(y_n)}{L_n} (e^{L_n \Delta_t} - 1) + \frac{M_n}{L_n^2} \{ (e^{L_n \Delta_t} - 1) - L_n \Delta_t \},$$

$$V_n = \frac{(e^{2L_n \Delta_t} - 1)}{2L_n} \sigma^2$$

이고, $y = \varphi(x)$ 일 때, $\tilde{f}(y) = f(x)/g(x) - 1/2g'(x)$ 인 \tilde{f} 에 대하여,

$$L_n = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(y_n), \quad M_n = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}(y_n)$$

이다.

3. 시뮬레이션과 그 결과

시뮬레이션 방법으로 제시된 추정방법을 평가하기 위하여 Shoji와 Ozaki (1998)에서는 다음 세 가지 모형을 사용하였다.

모형 1. $dx = (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) dt + \sigma dw,$

모형 2. $dx = (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5) dt + \sigma dw,$

모형 3. $dx = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^2) dt + \sigma x^\gamma dw.$

위의 모형 1, 2, 3에서 모형 1은 모형 2에 포함되는 관계가 있다. 뿐만 아니라 본 연구에서 시험 해 본 바에 의하면 모형 1과 모형 2의 결과가 의미상 별다른 중요한 차이점을 보이지 않았던 이유로, 여기에서는 모형 1의 결과에 대하여는 별도로 제시하지 않고 모형 2와 모형 3에 대한 결과를 중심으로 제시한다. 모형 1의 결과는 홍진영 (2009)에 제시되어 있다. 본 연구에서 관심 있게 살펴보고자 하는 사항은 Shoji와 Ozaki (1998)의 연구 논문에서 제시되지 않은 추정량의 분산도 함께 살펴봄으로써, NLL 방법이 기존방법에 비하여 편기(bias)를 개선하는 것뿐만 아니라, 추정량의 분산도 함께 개선하는 지를 알아보려고 하는 점이다.

위의 모형 2와 모형 3에 대한 모수의 참값은 표 1에 제시되어 있다. 시뮬레이션 방법은 먼저 원 자료를 시간간격이 매우 작은 경우(예를 들어 0.005)인 것으로 가정하고 이산적인 방법으로 생성하고, 생성된 자료들 중에서 적당 간격으로 관측치를 얻는다. 예를 들어, 관측시간간격 Δ_t 가 0.05인 경우라면 생성된 자료 때 10개 간격마다 하나씩을 뽑아 관측치로 삼는다. 각 경우에 대하여 관측치의 개수는 2000개가 되도록 하였다. 즉 $N = 2000$ 이다. 시뮬레이션에서는 Δ_t 가 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 경우들을 살펴보았다. 시뮬레이션의 반복횟수는 각 경우 10000이 되도록 하였다.

표 2와 3은 모형 2와 모형 3에 대한 시뮬레이션 결과를 정리하여 그 추정값의 평균과 표준편차를 보여주고 있다. 그림 1은 이 결과를 알아보기 쉽게 상자그림 형태로 정리한 것이다. 그림 1에서, E.05, E.10, E.15, E.20은 오일러방법을 사용하고, Δ_t 가 각각 0.05, 0.10, 0.15, 0.20인 경우를 말하고, N.05,

표 2: 추정값의 평균과 표준편차 (모형 2)

Δ_t	추정방법	σ^2	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
		1	-3	0	4	0	-1
0.05	Euler	0.93 (0.02)	-2.01 (0.48)	0.008 (0.298)	2.52 (0.39)	-0.001 (0.093)	-0.63 (0.08)
	NLL	1.00 (0.02)	-2.36 (0.49)	-0.008 (0.324)	3.13 (0.41)	0.003 (0.103)	-0.79 (0.09)
0.10	Euler	0.89 (0.02)	-1.62 (0.36)	-0.001 (0.237)	1.90 (0.30)	-0.001 (0.072)	-0.47 (0.06)
	NLL	0.97 (0.02)	-1.87 (0.36)	-0.012 (0.237)	2.45 (0.41)	0.002 (0.071)	-0.60 (0.08)
0.15	Euler	0.87 (0.02)	-1.36 (0.28)	-0.007 (0.129)	1.49 (0.21)	-0.002 (0.041)	-0.37 (0.04)
	NLL	0.95 (0.02)	-1.42 (0.28)	-0.000 (0.172)	1.88 (0.20)	-0.001 (0.053)	-0.46 (0.04)
0.20	Euler	0.85 (0.14)	-1.13 (1.31)	0.005 (0.547)	1.20 (1.16)	-0.003 (0.174)	-0.29 (0.23)
	NLL	0.93 (0.02)	-1.04 (0.21)	-0.012 (0.150)	1.41 (0.16)	-0.005 (0.043)	-0.35 (0.03)

표준편차는 () 안에 나타내었음.

표 3: 추정값의 평균과 표준편차 (모형 3)

Δ_t	추정방법	σ^2	γ	α_0	α_1	α_2	α_3
		1	0.5	6	-11	6	-1
0.05	Euler	0.95 (0.02)	0.53 (0.03)	5.15 (0.59)	-9.15 (1.28)	4.94 (0.77)	-0.83 (0.13)
	NLL	1.01 (0.02)	0.49 (0.03)	5.86 (0.64)	-10.64 (1.40)	5.78 (0.85)	-0.97 (0.15)
0.10	Euler	0.90 (0.01)	0.58 (0.03)	4.29 (0.44)	-7.32 (0.96)	3.85 (0.60)	-0.64 (0.10)
	NLL	1.00 (0.02)	0.50 (0.03)	5.28 (0.46)	-9.44 (0.97)	5.05 (0.59)	-0.84 (0.10)
0.15	Euler	0.85 (0.02)	0.62 (0.04)	3.70 (0.35)	-6.08 (0.76)	3.15 (0.46)	-0.53 (0.08)
	NLL	0.99 (0.02)	0.52 (0.04)	4.85 (0.39)	-8.52 (0.84)	4.53 (0.49)	-0.75 (0.08)
0.20	Euler	0.82 (0.02)	0.65 (0.04)	3.14 (0.33)	-4.93 (0.80)	2.52 (0.52)	-0.42 (0.09)
	NLL	0.98 (0.02)	0.53 (0.03)	4.29 (0.40)	-7.38 (0.87)	3.88 (0.50)	-0.64 (0.08)

표준편차는 () 안에 나타내었음.

N.10, N.15, N.20은 이에 대응하는 NLL 방법을 말한다. 표와 상자그림에서 Δ_t 가 커질수록 추정값의 정확성이 점점 떨어지는 것을 확인할 수 있다. 또한 NLL 방법이 오일러방법보다 추정량의 편차가 더 적은 것을 확인할 수 있다. 추정량의 분산은 (마찬가지로 표준편차)는 오일러방법과 NLL 방법의 거의 동일한 정도인 것으로 나타나고 있다.

4. 실자료분석에의 적용

미국의 연방기금금리는(Federal Funds Rate) 미국 연방정부에서 은행 간 매매 형태로 지급준비자금

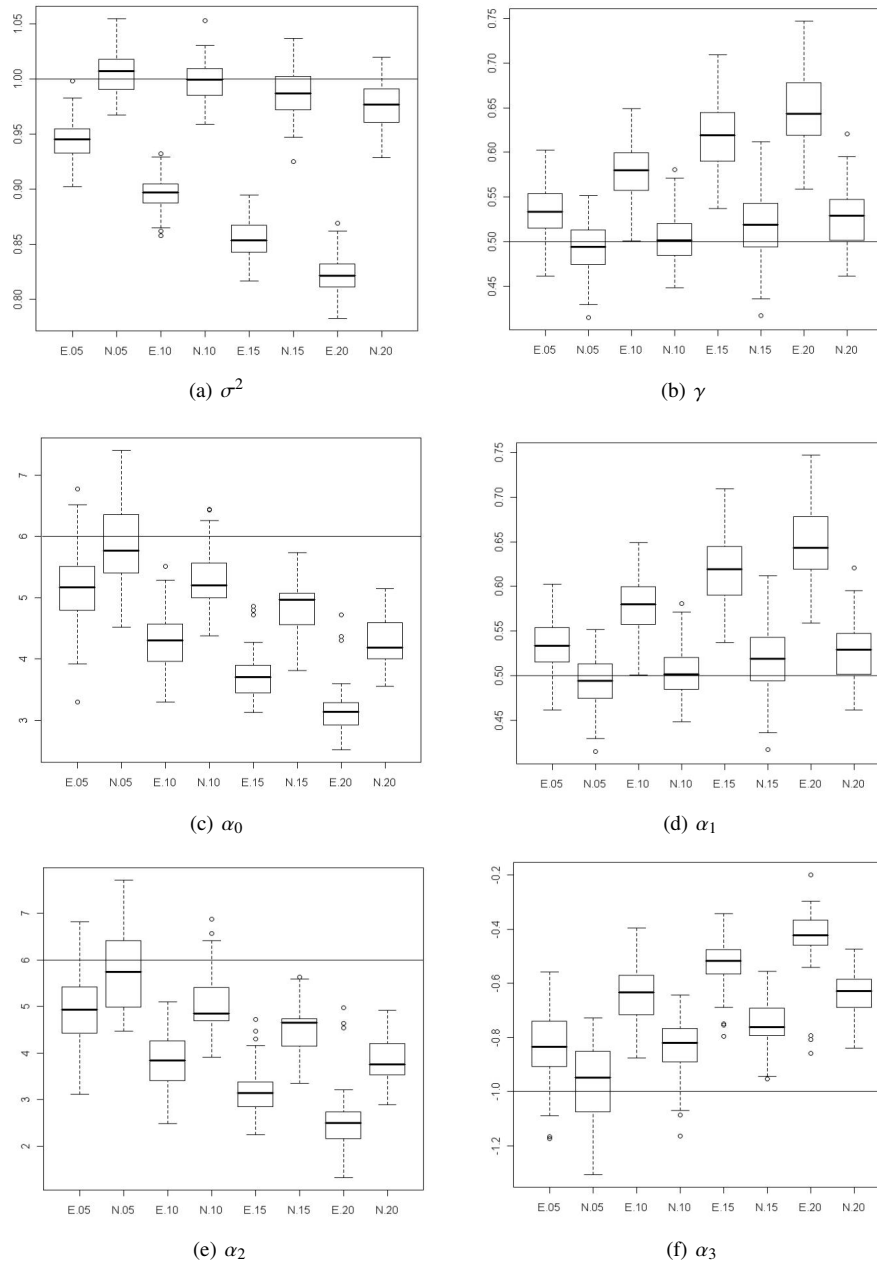


그림 1: 모형 3의 결과에 대한 상자그림(각 그림에서 실선은 참값을 의미한다. 전체적으로 NLL이 오일러 방법에 대하여 더 적은 편기(bias)를 갖는 점을 볼 수 있다.)

을 거래할 때 적용하는 단기 시장금리로 금융당국의 금융정책의지와 상업은행의 차입비용을 잘 반영하며 미국 내 금리 뿐 아니라 유로달러 및 전 세계 각국 금리에도 직접적인 영향을 주며, 글로벌 금융시장의 자금흐름을 민감하게 반영하는 대표적 단기금리이다. 자료는 1963년 1월부터 1998년 12월까지의

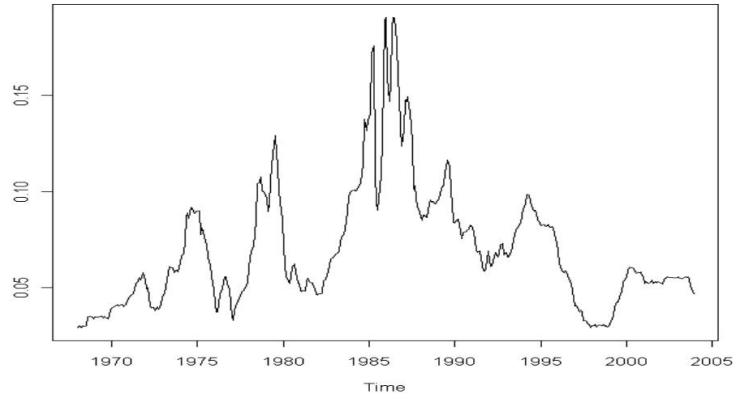


그림 2: 미국 연방기금금리(Federal Funds Rate) 시계열 그림

표 4: 미국 연방기금금리(Federal Funds Rate) 모형에 대한 모수 추정값

모형	추정법	α_{-1}	α_0	α_1	α_2	σ	γ
(1)	Euler	.	.	0.259	0.072	0.022	.
	NLL	.	.	0.256	0.072	0.022	.
(2)	Euler	.	.	0.182	1.439	0.066	.
	NLL	.	.	0.166	1.536	0.066	.
(3)	Euler	.	.	0.060	12.572	0.818	.
	NLL	.	.	0.191	-6.566	0.818	.
(4)	Euler	.	.	0.012	0.395	0.765	1.477
	NLL	.	.	0.058	0.115	0.793	1.494
(5)	Euler	0.0008	0.039	0.685	-3.478	0.814	.
	NLL	0.0006	-0.026	0.537	-3.165	0.822	.

월별 데이터를 사용했으며, NLL 방법과 오일러방법을 사용하여 추정했다. Ait-Sahalia (1999, 2002)에 서와 마찬가지로 월별자료라는 의미에서 $\Delta_t = 1/12$ 을 사용했다. 그림 2는 이 자료의 시계열 그림으로 1985년과 1990년 사이에 최고점을 형성하고 있는 모습이다.

미연방 금리자료 해석을 위해 고려한 확산모형은 Ait-Sahalia (1999)에서와 마찬가지로 다음 5가지 모형을 고려하였다.

모형 (1). $dx_t = \alpha_1(\alpha_2 - x_t)dt + \sigma dw_t$

모형 (2). $dx_t = \alpha_1(\alpha_2 - x_t)dt + \sigma \sqrt{x_t}dw_t$

모형 (3). $dx_t = x_t(\alpha_1 - (\sigma^2 - \alpha_1\alpha_2)x_t)dt + \sigma x_t^{3/2}dw_t$

모형 (4). $dx_t = \alpha_1(\alpha_2 - x_t)dt + \sigma x_t^\gamma dw_t$

모형 (5). $dx_t = (\alpha_{-1}x_t^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1x_t + \alpha_2x_t^2)dt + \sigma x_t^{3/2}dw_t$

이며, 추정결과는 표 4와 같다. 모형 (1)에 대한 추정 결과는 Ait-Sahalia (1999)와 매우 동일한 결과를 주는 것을 확인할 수 있는데 비하여, 다른 모형들의 경우는 Ait-Sahalia (1999)의 결과와 다소 차이를 보이고 있다. 특히 모형 (3)의 경우 Ait-Sahalia (1999)의 결과는 Ahn과 Gao (1999)에서 제시한 경계값 조건을 만족하지 못하고 있다. Ait-Sahalia (1999)에 제시된 모형의 수식에 착오가 있는 것으로 판단된다.

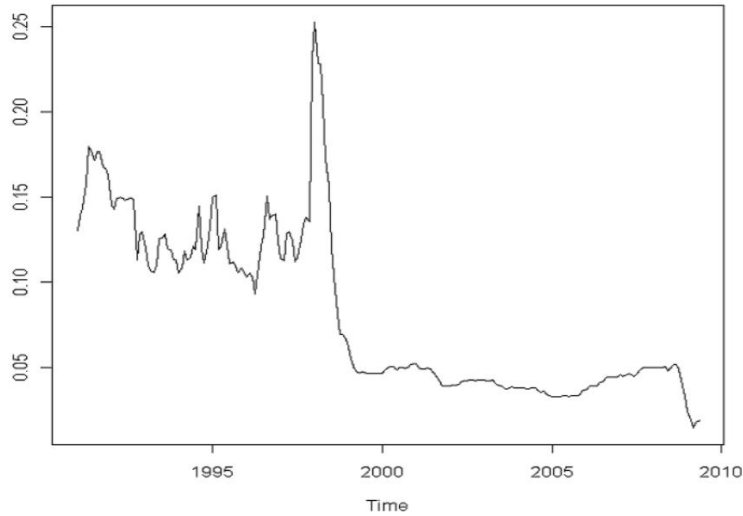


그림 3: 국내은행간 대출금리의 시계열 그림

표 5: 국내 은행 간 대출 금리 모형에 대한 모수 추정값

모형	추정법	α_{-1}	α_0	α_1	α_2	σ	γ
(1)	Euler	.	.	0.083	-2.887	3.589	.
	NLL	.	.	0.086	-2.888	3.594	.
(2)	Euler	.	.	0.031	-1.298	0.954	.
	NLL	.	.	-0.074	-1.261	0.955	.
(4)	Euler	.	.	-0.575	-0.347	0.243	1.081
	NLL	.	.	-0.538	-0.766	0.244	1.078
(5)	Euler	6.281	17.333	-0.185	-0.373	0.971	.
	NLL	6.281	17.333	-0.185	-0.373	0.971	.

국내은행간 대출금리는 미국 연방기금금리(Federal Funds Rate)와 비슷한 개념의 자료로서, 국내 은행 간 대출시 적용되는 금리이다. 그림 3은 국내은행간 대출금리에 대한 시계열 그림이다. 자료는 1991년 1월부터 2009년 5월까지의 월별 데이터로 총 221개의 데이터이다. 그래프 상으로 IMF시기에 금리가 올라가는 것을 확인할 수 있다. Ait-Sahalia (1999)의 논문에서 사용한 5개 모형 중 문제가 있는 것으로 판단된 모형 (3)을 제외한 4가지 모형을 적용하여 얻은 추정값이 표 5에 제시되어 있다. 미국 연방기금금리자료의 경우 γ 가 약 1.5 정도의 값을 갖는 것으로 추정되는데 비하여, 국내은행간 대출금리의 경우 1.0 정도의 값을 갖는 것으로 추정되고 있다. 변동성을 의미하는 모수 σ 의 경우는 모형 (4)를 기준으로 볼 때, 미국의 경우는 0.7과 0.8 사이의 값을 갖는 것으로 나타나는데 비하여, 국내은행간 대출금리는 대략 0.25 정도의 값을 갖는 것으로 나타나고 있다.

표 4와 5는 위에 Federal Funds Rate 자료와 국내 은행간 대출금리 자료에 대한 분석에서, 추정법으로 적용된 NLL 방법과 Euler 방법의 차이를 보여주고 있다. 두 추정법에서 얻은 추정량에는 그 차이가 크지는 않으나 다소의 차이가 있다. 위에서 사용된 두 자료가 시뮬레이션에 의하여 생성된 자료가 아니고 실제 자료인 이유로 두 방법에 의한 추정값 중에 어떤 값이 더 좋은 값인지는 알 수 없으나, 앞서의 시뮬레이션 결과에서 볼 수 있듯이 NLL 방법이 다소 편기(bias)가 적은 추정량을 제공하는 것으로 보아, NLL 방법에 의한 추정량의 신뢰성이 더 높은 것으로 판단된다.

5. 검토와 결론

금융현상을 모형화 하기 위한 방법으로 확산모형이 많이 사용되고 있고, 확산모형을 추론하기 위하여 다양한 방법들이 연구 개발되고 있다. 다양한 추론방법들을 평가할 때 결과의 정확성과 계산 속도와 편의성 등은 매우 중요한 문제이다. 현재까지 다양한 추론방법들이 제안되었지만, 그 중 Shoji와 Ozaki (1998)이 제안한 NLL 방법은 이론적 전개가 지나치게 복잡하지 않으면서도, 그 결과가 매우 정확하고 또한 계산과정이 빠르고 안정적이며 구현이 쉽다는 장점을 갖고 있고 있어서 매우 현실적 응용성이 높은 추론 방법이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 NLL 방법이 이전에 발표된 바와 같이 추정량의 편기(bias)를 크게 줄여주면서도 추정량의 분산은 그 다지 커지지 않는다는 것을 시뮬레이션 연구를 통하여 확인하였고, NLL 방법을 이용하여 미국 연방기금금리 자료와 국내은행간 대출금리 자료를 확산모형으로 적합하고 그 추정값을 알아 보았다. 이런 과정을 통해서 NLL 방법이 현실적으로 매우 응용성이 높은 추정 방법임을 확인할 수 있었다.

본 논문에서는 NLL 방법과 Euler 방법만을 위주로 비교하였으나, 다양한 추정방법들이 고려될 수 있다. Hurn 등 (2007)의 연구에는 NLL 방법을 MCMC 방법을 포함한 보다 다양한 추정방법들과 함께 비교하였다. 시뮬레이션 연구를 통한 비교에서, Hurn 등 (2007)은 확산모형 추정에 특화되어 개발된 다른 방법들에 비하여, NLL 추정법과 Euler 방법이 그 적용의 편이성과 계산의 신속성에도 불구하고, 그 결과의 정확성에서도 다른 방법들에 비하여 그 다지 뒤처지지 않고 오히려 더 나은 성질이 있음을 보여주고 있다. 물론 Hurn 등 (2007)에서 사용된 확산모형과 본 논문에서 다루고 있는 모형이 정확하게 일치하는 것은 아니나, 그러한 속성에 큰 차이가 있을 것으로 생각되지는 않으므로 본 연구에서 NLL과의 비교 대상이 Euler 근사법으로 한정된 것이 연구 결과 해석에 그다지 큰 제약으로 작용하리라 생각되지는 않는다. 그러나 보다 일반적인 틀에서의 비교를 수행하기 위하여 NLL 방법을 보다 다양한 추정방법들과 더 일반적인 모형에 대하여 비교하는 추후 연구가 필요하리라 생각된다.

참고 문헌

- 홍진영 (2009). <NLL 추정법을 이용한 확산과정의 추정에 관한 연구>, 건국대학교 석사학위 논문.
- Ahn, D. and Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics, *The Review of Financial Studies*, **12**, 721-762.
- Ait-Sahalia, Y. (1999). Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions, *Journal of Finance*, **54**, 1361-1395.
- Ait-Sahalia, Y. (2002). Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: A closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223-262.
- Bachelier, L. (1900). Theorie de la speculation, *Annales Scientifiques de L'E.N.S.*, **17**, 21-86.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209-1227.
- Conley, T. G., Hansen, L. P., Luttmer, E. G. T. and Scheinkman, J. A. (1997). Short-term interest rates as subordinated diffusions, *The Review of Financial Studies*, **10**, 525-577.
- Cox, J. C., Ingersoll, Jr. and Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385-407.
- Duffie, D. and Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rate, *Mathematical Finance*, **6**, 379-406.
- Hurn, A., Jeisman, J. and Linsay, K. (2007). Seeing the wood for the trees: A critical evaluation of methods to estimation methods to estimate the parameters of stochastic differential equations, *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 390-455.

- Kloeden, P. and Platen, E. (1995). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, New York.
- Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, **6**, 41–50.
- Shoji, I. and Ozaki, T. (1998). Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method, *Stochastic Analysis and Applications*, **16**, 733–752.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

2010년 1월 접수; 2010년 4월 채택

Review and Applications of NLL Estimation Method for Diffusion Processes

Jin Young Hong^a, Yoon-Dong Lee^{1,b}

^aDepartment of Applied Statistics, Konkuk University

^bSogang Business School, Sogang University

Abstract

Many of financial data are explained via diffusion models in modern financial research. Various types of estimation methods of diffusion processes were suggested by many authors. In this paper, we tested the properties of the NLL estimation method, suggested by Shoji and Ozaki (1998), of diffusion processes in the view of the bias and variance of the estimators and applied the method to estimate the model parameters for the U.S. federal funds rate data and Korean inter-bank exchange rate data. By simulation study we showed that the NLL method provides relatively good estimators, in the meaning that the estimator has less bias than the Euler method, while keeping the variance similar level. We also provide the NLL estimates of U.S federal funds rate data and Korean inter-bank exchange rate data.

Keywords: Estimation methods, diffusion process, model parameters, Euler method.

Research of the second author was supported by Sogang University Research Grant of 2009.

¹ Corresponding author: Associate professor, Sogang Business School, Sogang University, Shinsoo-dong 1st, Mapo-koo, Seoul 121-742, Korea. Email: widylee@sogang.ac.kr