

연속적인 신호에서 고속 파라미터 추정과 시각화 방법

(A Method of Visualization and Fast Estimation of Parameter in Continuous Time Signal)

김헌태* · 심관식 · 남해곤 · 최준호 · 임영철 · 김익선**

(Heon-Tea Kim · Kwan-Sik Shim · Hea-Kon Nam · Joon-Ho Choi · Yeong-Chul Lim · Eui-Sun Kim)

요 약

이 논문은 이산신호가 연속적으로 입력될 때, 이산신호에서 고속으로 파라미터를 추정하고, 그 결과를 시각화하는 방법에 대해서 기술하고 있다. 이 논문은 이산푸리에변환에서 직접 파라미터를 추정하는 고속 파라미터 추정 알고리즘을 적용하여 연속신호에서 파라미터를 추정하고, 추정된 중요 파라미터들을 효율적으로 시각화하는 방법에 대해서 기술하고 있다. 이 논문에서 제안한 연속신호에 대한 저주파 파라미터 추정방법을 3개의 모드를 가진 시험함수에 적용하여 제안한 알고리즘과 시각화의 효율성을 검증하였다.

Abstract

This paper describes a method of visualization and fast estimation of parameter in continuous time signal. The parameter estimation method of this paper directly estimate the parameters on the basis of the discrete Fourier transform. Also, this paper present to efficient visualization method of dominant parameters obtained in continuous time signal.

The proposed methods are applied to test functions with three dominant modes. The results show that the proposed methods are highly applicable to parameter estimation and visualization in continuous time signal.

Key Words : Continuous Signal, Low Frequency Parameter, Mode, Discrete Fourier Transform, Spectrum

1. 서 론

이산푸리에변환(discrete Fourier transform)은 신호 처리에서 가장 핵심적인 알고리즘이다. 이산푸리에변환에서 첨두치와 이에 대응하는 주파수를 추정함으로써 주파수 해석을 수행할 수 있다. 최근 컴퓨팅 및 네트워크기술의 급성장으로 다양한 산업분야에서 디지털 신호처리 기술이 적용되고 있고, 고속푸리에변환

* 주저자 : 한전 광주전남본부
** 교신저자 : 신경대학교 인터넷정보통신학과 교수
Tel : 031-369-9172, Fax : 031-369-9116
E-mail : eskim@sgu.ac.kr
접수일자 : 2010년 4월 14일
1차심사 : 2010년 4월 16일
심사완료 : 2010년 5월 3일

(fast Fourier transform) 알고리즘을 적용할 수 있는 이산푸리에변환도 다양한 신호 처리와 해석에 적용되고 있다[1-4].

신호에서 파라미터를 추정하는 것은 동적시스템 해석에 매우 중요하다. 파라미터를 추정하여 시스템의 동적특성을 파악하고 제어기설계를 위한 모델 개발이나 고장진단 및 시스템 동적해석 등에 적용할 수 있다. 이산신호에서 파라미터를 추정하기 위하여 다양한 파라미터 추정기법들이 제안되고 있는데, 크게 파라메트릭법(parametric method)과 비파라메트릭법(non-parametric method)으로 분류할 수 있다[5-6]. 비파라메트릭법은 이산푸리에변환에 기초를 두고 모델을 추정하므로 계산시간이 빠르고 알고리즘이 단순하다. 반면에 파라메트릭 법은 이산데이터를 자동회귀이동평균(auto regressive moving average) 모델로 변환하여 복소지수함수를 계산하는 방법으로 주파수해석에 기초한 비파라메트릭 법보다 비교적 정확한 반면 계산시간이 많이 소요된다.

주파수 해석에서 고주파수 대역은 주파수의 크기가 중요한 변수이므로 크기만 고려하면 된다. 그러나 1[Hz] 부근의 저주파수 대역에서는 동적특성을 포함하고 있는 파라미터들을 모두 고려해야 한다. 보통 지수감쇠코사인함수로 모의한 신호에서 주파수와 제동계수, 그리고 모드 크기와 위상을 중요 파라미터로 고려한다. 문헌 [7-10]에서는 전력시스템에서 측정한 신호에 파라메트릭 법을 적용한 결과들을 기술하고 있고, 문헌 [11-14]에서는 푸리에변환에 기초한 비파라메트릭 법에 대해서 기술하고 있다.

이 논문은 연속적으로 입력되는 신호에 이산푸리에변환을 적용하여 중요 파라미터를 추정하고 이를 시각화하는 방법에 관한 것으로 선행 연구인 문헌 [15-16]에서는 비주기신호가 연속스펙트럼으로 나타나는 특성을 이용하여 이산푸리에변환에서 직접 신호에 포함된 저주파수 파라미터를 추정하는 수학적 방법을 기술하고 있다.

이 논문에서는 이산푸리에변환 결과 계산된 저주파수 대역의 첨두치 근처 스펙트럼을 이용해서 주파수와 제동계수, 그리고 이에 대응하는 모드의 크기와 위상을 추정하는 방법과 시각화 방법을 기술하고 있다.

문헌[16]에서 기술한 파라미터 추정 알고리즘을 개선하고, 이를 연속신호에 대한 파라미터 추정에 적용하였다. 특히 스펙트럼 위상을 이용하여 모드의 수렴과 발산 특성을 판별할 수 있는 새로운 방법과 제동계수의 정확도를 향상하는 새로운 방법을 기술하고 있다. 또한 연속적인 신호에서 필요한 정보를 정확하게 나타낼 수 있는 연속신호에 대한 저주파수 파라미터의 효과적인 시각화 방법에 대해서 기술하고 있다.

이 논문에서 제안한 연속신호에 대한 저주파 파라미터 추정방법을 시험함수에 적용하여 알고리즘과 시각화의 효율성을 검증하였다. 이산푸리에변환은 속도가 매우 빠르므로 주어진 이동시간에 따라서 연속적으로 파라미터를 정확하게 추정함을 확인하였다.

2. 수학적 배경

이 논문은 연속적으로 입력된 이산데이터에서 중요 저주파수 파라미터를 추정하고, 파라미터들의 상호관계를 쉽게 파악할 수 있도록 시각화하는 방법에 관한 것이다. 먼저 파라미터 추정방법과 그 수학적 배경에 대해서 간단히 기술한다.

2.1 지수감쇠코사인함수의 푸리에변환

임의의 신호 $x(n)$ 이 구간 $0 \leq n \leq N-1$ 에서 정의될 때, $x(n)$ 의 이산푸리에변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, k=0, 1 \dots N-1 \quad (1)$$

취득한 이산신호의 샘플링 간격을 T 라 할 때, 신호를 N 개 샘플링하면, 시간구간 $T_0 = NT$ 초로 표시된다. 그러므로 푸리에 스펙트럼에서 주파수 간격은 $1/NT$ [Hz]로 나타난다[3].

연속함수 $x(t)$ 가 주파수 ω_1 과 위상 ϕ_1 인 코사인함수와 제동계수 α 와 크기 A 를 가진 지수함수의 곱으로 이루어진 지수감쇠코사인함수라 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

연속적인 신호에서 고속 파라미터 추정과 시각화 방법

$$x(n) = Ae^{-\alpha n} \cos(\omega_1 n + \phi_1) \quad (2)$$

이를 푸리에 변환하면(Appendix E), 푸리에스펙트럼 $X(\omega)$ 는 다음과 같은 복소함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2} Ae^{j\phi_1} [X_c(\omega + \omega_1) + X_c(\omega - \omega_1)] \\ &= X_\omega \angle \phi_\omega \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 X_c 는 지수함수의 푸리에 변환으로 $\omega = 2\omega_1$ 에서 $X_c \cong 0$ 이므로 첨두주파수 $\omega = \omega_1$ 에서 다음과 나타낼 수 있다(Appendix E).

$$X_c(0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha n} \quad (4)$$

주파수 ω_1 에 대응하는 위상을 ϕ_1 이라 하고, 제동계수가 주파수보다 훨씬 작아 $\omega_1 \gg \alpha$ 가 성립하면, 주파수 ω_1 에서 푸리에스펙트럼은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= \frac{1}{2} AX_c(0)(\cos\phi_1 + j\sin\phi_1) \\ &= X_{\omega_1} \angle \phi_{\omega_1} \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 저주파 파라미터 추정

지금까지 다양한 산업분야에 응용되고 있는 이산푸리에변환은 주로 시계열데이터에 포함된 정확한 주파수를 추정하는데 널리 이용되고 있다. 이산신호를 푸리에변환 하면 푸리에스펙트럼(Fourier spectrum)이나 전력스펙트럼(power spectrum)을 얻을 수 있고, 이로부터 중요 주파수를 추정하여 주파수 해석을 수행한다.

이 논문은 측정신호에서 중요 저주파수 파라미터를 추정하는데 이산푸리에변환을 이용한다. 그러므로 이산푸리에변환 결과인 푸리에스펙트럼과 스펙트럼위상을 이용해서 식 (2)에 포함된 중요파라미터인 주파수(ω_1)와 위상(ϕ_1), 그리고 제동계수(α) 크기(A)를 추정한다.

이산푸리에변환의 가장 큰 장점 중에 하나는 주파수

를 빠르게 추정하는 것이다. 이산푸리에변환 결과에서 첨두스펙트럼에 대응하는 주파수는 이산신호에 포함되어 있는 중요 주파수를 나타내므로 저주파수 대역의 첨두스펙트럼에 대응하는 주파수를 중요 주파수로 선택한다.

$$\omega_1 = \underset{\omega}{\operatorname{argmax}} X_\omega \quad (6)$$

문헌[15-16]에서는 제동계수를 추정하는 다양한 방법에 대해서 기술하고 있다. 주파수 $\omega_\alpha = \omega_1 + \alpha$ 에서 스펙트럼 크기는 첨두주파수 $\omega = \omega_1$ 에서 스펙트럼 크기의 70.7[%]에 대응한다. 이 사실로부터 제동계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha = (X_{\omega_1} - X_\alpha) / X'(\omega) \quad (7)$$

여기에서 X_{ω_1} 과 X_α 는 각각 주파수 ω_1 과 ω_α 에 대응하는 스펙트럼이고, $X'(\omega) = dX/d\omega$ 는 푸리에스펙트럼 기울기로 실제로는 첨두스펙트럼의 70.7[%]에 대응하는 점에서 기울기를 계산해야 한다. 한편 식 (A.25)에 나타낸 것과 같이 스펙트럼 위상의 변화율에서 제동계수를 계산할 수 있는데 이 논문에서는 기술하지 않는다.

만일 식 (7)에서 제동계수를 추정하면, 이를 이용해서 모드의 크기를 계산할 수 있다. 식 (5)로부터 모드의 크기 A 와 첨두스펙트럼은 다음 식과 같은 관계가 성립하므로 이로부터 모드 크기를 추정할 수 있다.

$$A = 2X_{\omega_1} / X_c(0) \quad (8)$$

주파수 ω_1 에 대응하는 위상 ϕ_1 을 가진 지수감쇠코사인함수에서 푸리에스펙트럼의 위상을 ϕ_{ω_1} 이라 할 때, 식 (3)에서 모드의 위상 ϕ_1 은 푸리에스펙트럼의 위상과 같으므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_1 = \phi_{\omega_1} \quad (9)$$

지금까지 이산푸리에변환 결과에서 얻어지는 푸리에스펙트럼과 스펙트럼 위상으로부터 중요 저주파수

파라미터를 추정하는 방법을 설명하였다.

2.3 모드의 수렴과 발산

이산푸리에변환에서 계산한 스펙트럼 위상을 $\theta(\omega)$ 라 하자. 만일 주파수가 제동계수보다 매우 큰 값을 가지고 있어 $\omega \gg \alpha$ 이 성립하면, 스펙트럼 위상은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega_1^2 + \omega^2)}\right) \quad (10)$$

그러므로 주파수에 대한 위상의 변화율은 다음과 같이 제동계수에 비례하는 함수가 된다(Appendix A.25).

$$\left.\frac{d\theta}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_1} = -\frac{1}{\alpha} \quad (11)$$

따라서 $\omega = \omega_1$ 에서 위상 부호는 제동계수 α 에 따라서 좌우된다. 즉,

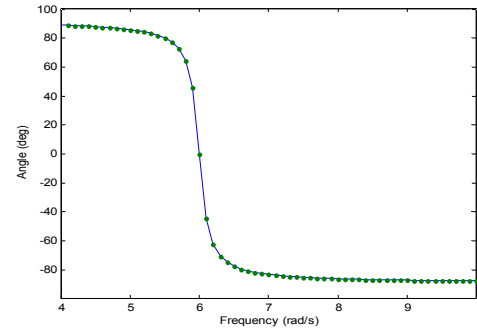
$$\alpha < 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\omega} > 0 \quad (12)$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\omega} < 0 \quad (13)$$

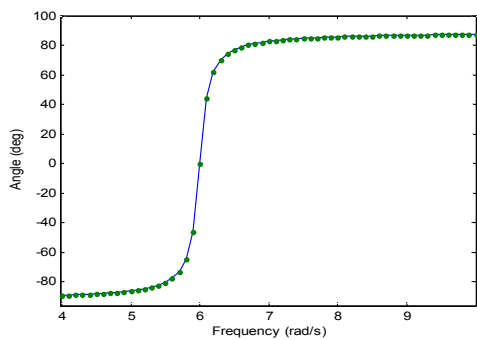
그러므로 푸리에변환에서 계산한 스펙트럼 위상으로부터 위상의 변화를 계산할 수 있으면 제동계수의 부호를 결정할 수 있다. 그림 1은 지수감쇠코사인함수의 푸리에변환에서 제동계수가 음수인 경우와 양수인 경우 스펙트럼 위상을 나타내고 있다. 이 경우는 지수감쇠함수가 $e^{-\alpha t}$ 으로 표현되어 있으므로 $\alpha > 0$ 일 때 지수적으로 감쇠하는 함수이고, 반대로 $\alpha < 0$ 인 경우는 지수증가함수를 의미한다.

3. 연속신호에서 파라미터 추정과 시각화

연속적으로 신호가 입력될 때, 시간구간과 이동시간은 그림 2에 나타나 있다. 연속신호에 대한 파라미터



(a) $\alpha > 0$



(b) $\alpha < 0$

그림 1. 연속신호와 시간 구간

Fig. 1. Continuous signal and Time Interval

추정은 시간구간 T_0 에 대해서 파라미터를 추정하고, 이동시간 ΔT 초 후 동일한 시간구간에 대해서 파라미터를 추정한다. 따라서 시간구간 T_0 에 대해서 파라미터를 추정하기 위해서 소요되는 최대 계산시간은 ΔT 초보다 작아야 한다. 해석하기 위한 목적에 따라서 시간구간과 이동시간은 변화될 수 있다.

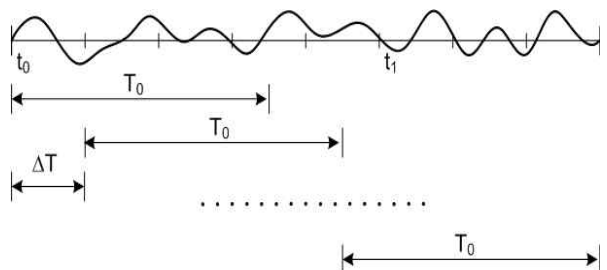


그림 2. 연속신호와 시간 구간

Fig. 2. Continuous signal and Time Interval

연속으로 추정한 파라미터들에서 필요한 정보를 얻기 위해서는 추정한 4개의 중요 파라미터들을 적절하게 시각화를 해야 한다. 가장 기본적인 정보는 모드를 복소평면에 나타내는 것이다. 신호에 포함된 중요 모드는 제동계수와 주파수를 각각 실수부와 허수부로 갖는 복소수이다. 따라서 복소평면의 실수축에 제동계수를 나타내고, 허수축에 주파수를 표현하여 모드를 시각화할 수 있다. 복소수 $z_i = -\alpha_i + j\omega_i$ 라 하면 복소평면에 제동계수와 주파수를 나타낼 수 있다.

$$f(z) = z_i \tag{14}$$

신호는 시간을 기준으로 계측하고 표현한다. 그러므로 파라미터 추정 결과들도 시간을 기준으로 나타내면 인지하기 쉽다. 시간에 대해서 제동계수 변화를 시각화함으로써 시스템의 제동정도를 알 수 있고, 시간에 대한 모드 크기에서 모드 크기 변화를 알 수 있다. 추정한 하나의 파라미터에서 시간에 대한 추이를 관찰함으로써 신호에서 필요한 정보를 얻을 수 있으나 두 개 이상의 파라미터를 조합하여 복합적인 정보를 얻을 수도 있다. 제동계수와 모드크기는 서로 상관관계가 큰 파라미터들이다. 따라서 이들을 아래와 같이 조합하면, 모드에 대한 제동계수 특성과 크기를 얻을 수 있다.

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \tag{15}$$

주파수는 신호해석에서 필요한 가장 기본적인 파라미터이다. 따라서 연속적으로 추정한 주파수에 대해서 다른 파라미터들을 나타내면, 각 중요 주파수에 대한 신호의 정보를 얻을 수 있다. 주파수에 대한 제동계수를 시각화하면 중요 주파수에서 제동계수를 알 수 있고, 주파수에 대해서 모드 크기를 나타내면 중요 주파수에 대한 모드 크기를 알 수 있다.

또한 모드크기와 위상의 조합은 아래와 같이 복소수로 표현될 수 있다. 따라서 복소평면에 모드와 위상을 나타낼 수 있다.

$$f(z) = Ae^{j\phi} \tag{16}$$

연속함수에 대한 파라미터 추정에서 다양한 시각화가 가능하다. 해석하기 위한 목적에 따라서 필요한 시각화를 선택해야 한다.

4. 하드웨어 구성

이 논문에서 개발한 프로그램을 연속적인 이산신호에서 검증하기 위하여 그림 3과 같이 하드웨어를 구성하였다. 시험 함수 발생장치를 제작하고, 그 신호를 연속적으로 입력받기 위하여 데이터 수집 장치를 사용하였다. 그리고 이 논문에서 제안한 방법을 이용하여 실시간으로 파라미터를 추정하고 시각화하는 프로그램을 제작하여 하드웨어와 연결하였다.

시험 함수 발생장치는 Atmel사의 ATmega-128과 D/A컨버터를 이용하여 제작하였고, 부착된 키패드와 LCD를 이용하여 파라미터를 설정할 수 있도록 하였으며, 원하는 정도의 잡음을 추가할 수 있도록 하였다. 데이터 수집 장치는 NI사의 DAQCard-6024E를 이용하였으며, A/D 컨버터의 분해능은 10비트이다. 시각화 프로그램은 Microsoft사의 Visual Studio.Net과 NI사의 Measurement Studio을 이용하여 작성하였다. 그리고 이 연구에서 개발한 파라미터 추정 프로그램을 시각화한 실행 화면을 그림 4에 나타냈다.

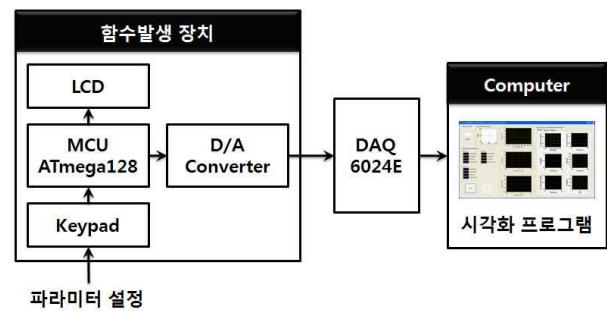


그림 3. 파라미터 추정을 위한 하드웨어
Fig. 3. Hardware for Parameter Estimation

시각화 프로그램의 좌측 상단에는 경과된 시간과 최근 1초에 측정된 파형을, 그리고 좌측 하단에 추정된 각종 파라미터들을 텍스트로 표시하였다. 중앙에는 최근 16초간의 입력된 신호 파형, 그 신호의 스펙트럼

과 위상을 나타냈고, 우측에는 추정된 각 모드들의 그래프를 각각의 탭에 나타냈다. 각각의 그래프들을 클릭하면 큰 화면으로 내용을 확인할 수 있도록 시각화 화면을 구성하였다.

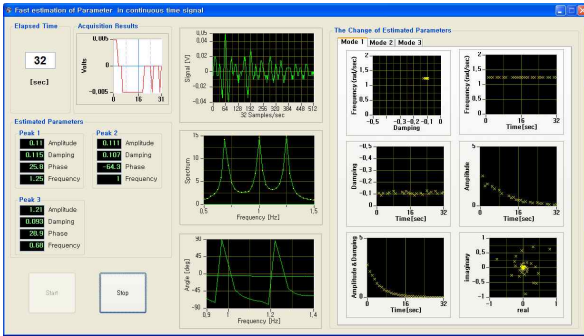


그림 4. 파라미터 추정 프로그램 시각화
Fig. 4. Visualization of Parameter Estimation Program

5. 시험함수에 검증

지금까지 기술한 연속신호에 대한 파라미터 추정과 시각화 방법을 시험함수에 적용하여 그 효율성을 검증하였다. 이 논문은 연속신호에 대한 파라미터 추정과 그 시각화 방법을 개발하는데 그 목적이 있으므로 알고리즘의 비교나 상세한 오차해석 보다는 제안한 방법의 효율성을 중심으로 기술한다.

이 논문에서 적용한 시험함수는 3개의 모드를 가진 지수감쇠코사인함수로 제안한 알고리즘의 정확성을 검증하기 위해서 잡음의 영향을 배제하였다. 시험함수는 아래와 같이 각 모드에 대한 크기가 3.0이고 제동계수는 각각 -0.1인 지수감쇠코사인함수들의 합이다.

$$y(t) = y_a + y_b + y_c \quad (17)$$

$$\text{mode 1 : } y_a = 3.0 e^{-0.1t} \cos(8.15t + 30^\circ)$$

$$\text{mode 2 : } y_b = 3.0 e^{-0.1t} \cos(6.28t + 30^\circ)$$

$$\text{mode 3 : } y_c = 3.0 e^{-0.1t} \cos(4.35t + 30^\circ)$$

이 함수에 대해서 샘플링 간격을 1/10초로 설정하고, 연속적으로 파라미터를 추정하기 위하여 10분 동안 취득한 데이터를 그림 5에 나타내었다.

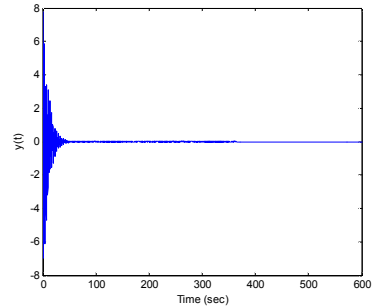


그림 5. 시험신호
Fig. 5. Test signal

연속함수에서 파라미터를 추정할 때, 시간구간 60초에 대해서 이동시간은 1초로 설정하고, 연속적으로 파라미터를 추정하여 그 결과를 그림 6에 나타내었다.

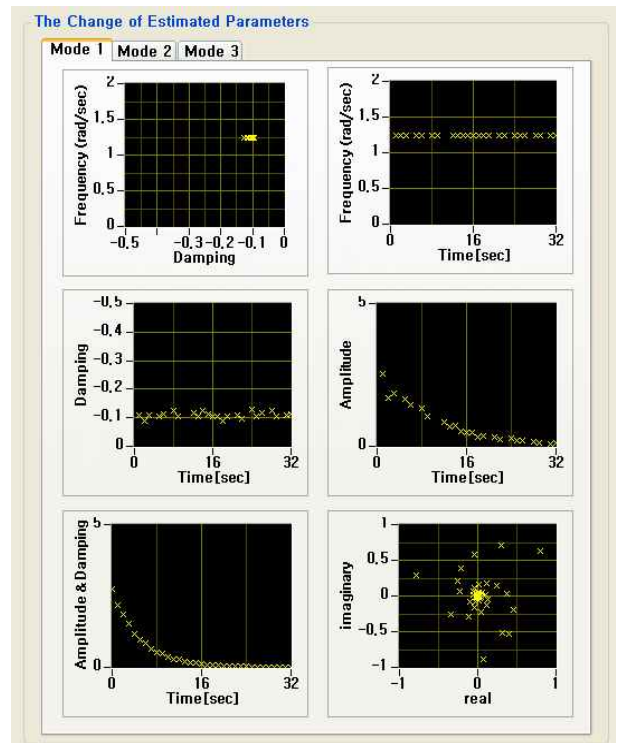


그림 6. 파라미터 추정 결과
Fig. 6. Parameter estimation results

그림 6에서 damping-frequency는 제동계수에 대한 주파수를 나타낸 것으로 복소평면에 모드를 나타낸 것이다. 식 (17)에 나타나 있는 3개의 모드에서 모드 1에 대한 그림으로 모드 1의 주파수 8.15[rad/sec]부

근에 제동계수 -0.1을 추정하고 있어 연속적인 신호에 대해서 신호에 포함된 복소 모드를 정확하게 추정하고 있음을 알 수 있다.

그림 6에서 두 번째 그림인 time-frequency는 시간에 따른 모드 1의 주파수인 8.15([rad/sec])의 변화를 나타낸 것으로 크기가 매우 작은 100초 이후에도 정확하게 주파수를 추정하고 있다.

그리고 그림 6에서 time-damping은 시간에 따른 모드 1의 제동계수(-0.1)의 변화를 나타낸 것으로 이 경우에도 신호의 크기가 매우 작은 100초 이후에도 정확하게 제동계수를 추정하고 있다.

그리고 그림 6에서 time-amplitude는 시간에 따른 모드 1의 모드의 크기 변화를 나타낸 것이다. 모드의 크기는 제동계수의 감쇠율에 따라서 변화하므로 지속적으로 감쇠함을 알 수 있다. 50초 이후 신호는 제동계수가 작아서 시스템이 진동하고 있어도 모드 크기가 작기 때문에 시스템에 큰 영향을 주지 않는다. 따라서 연속 신호에서 파라미터를 추정할 때는 이와 같이 파라미터들 사이에 상호관계를 파악하기 쉽도록 시각화해야 한다.

그림 6에서 time-amplitude&damping은 모드 1의 크기와 제동계수를 식 (15)와 같이 조합하여 시간에 대해서 나타낸 것이다. 연속신호에 대해서 지속적으로 감쇠하고 있어 제동계수가 0보다 작음을 알 수 있고, 빠르게 그 크기가 감소함으로써 시스템의 안정성에 크게 영향을 주지 않음을 알 수 있다. 이 그림은 time-amplitude와 유사하지만 제동계수에 대한 정보가 포함되어 있어 실시간 해석에 더 유용한 정보를 제공한다.

그림 6에서 마지막에 있는 real-imaginary는 식 (16)에 나타낸 함수와 같이 모드의 크기와 위상을 나타낸 것이다. 이 함수는 위상에 따른 모드 크기의 변화를 나타낸 것으로 시스템이 안정하면 0으로 수렴한다. 전 시간구간에 대해서 이동시간을 1초로 설정하였기 때문에 8.15([rad/sec]) 모드는 나선 형태로 원점으로 수렴함을 알 수 있다.

그림 7 (a)~(c)는 제동계수가 작고, 모드 크기가 가장 큰 경우에 대한 진동을 시각화 한 것이다. 즉 추정된 파라미터가 가장 취약한 제동특성을 가지고 있을

때, 식 (17)에 나타나있는 y_a, y_b, y_c 를 계산하고, 이를 나타낸 것이다. 이와 같은 각 모드에 대한 진동 형태를 시각화하면 중요 모드에 대한 진동의 형태를 쉽게 파악할 수 있어 시스템의 동특성을 이해하기 쉽다.

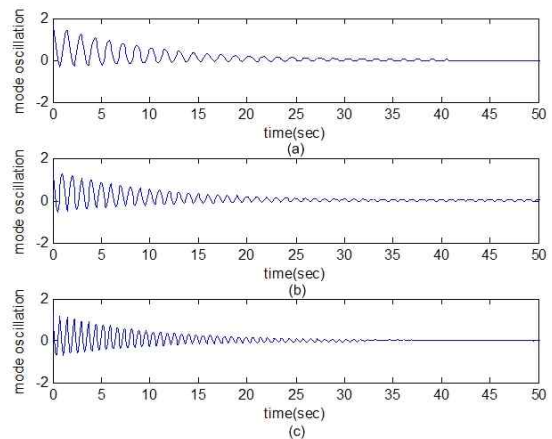


그림 7. 파라미터 추정 결과
Fig. 7. Parameter estimation results

6. 결 론

파라미터 추정 알고리즘에서 중요 모드의 수렴과 발산을 푸리에 스펙트럼 위상을 이용하여 판별할 수 있는 방법을 기술하고 있으며, 제동계수의 정확도를 향상하는 방법을 기술하고 있다. 또한 연속적인 신호에서 필요한 정보를 정확하게 나타낼 수 있는 연속신호에 대한 저주파수 파라미터의 시각화 방법에 대해서 기술하고 있다.

이 논문에서 제안한 연속신호에 대한 저주파 파라미터 추정방법을 세 개의 모드를 가진 시험함수에 적용하여 알고리즘과 시각화의 효율성을 검증하였다.

References

- [1] P. A. Lynn, W. Fuerst, Introductory Digital Signal Processing, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [2] K. B. Howell, Principles of Fourier Analysis, Chapman & Hall/CRC, New York, 2001.
- [3] W. L. Briggs, V. E. Henson, The DFT, An Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform, SIAM, Philadelphia, 1995.

[4] L. L. Scharf, Statistical Signal Processing : Detection, Estimation, and Time Series Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1991.

[5] C. E. Grund, J. J. Paserba, J. F. Hauer, S. Nilsson, "Comparison of Prony and Eigenanalysis for Power System Control Design," IEEE Trans. on Power Systems, vol. 8, Aug. 1993.

[6] L. Ljung, System Identification, Theory for The User, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1999.

[7] J. F. Hauer, C. J. Demeure, L. L. Scharf, "Initial Results in Prony Analysis of Power System Response Signals", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 5, pp.80-89, Aug. 1990.

[8] Ning Zhou, J. W. Pierre, J. F. Hauer, "Initial Results in Power System Identification from Injected Probing Signals using a Subspace Method", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 21, No. 3, pp. 1296-1302, Aug. 2006.

[9] D. J. Trudnowski, J. M. Johnson, J. F. Hauer, "Making Prony Analysis More Accurate using Multiple Signals," IEEE Trans. on Power Systems, vol. 14, pp.226-231, Feb. 1999.

[10] J. F. Hauer, W. A. Mittelstadt, K. E. Martin, J. W. Burns, H. Lee, J. W. Pierre, D. J. Trudnowski, "Use of the WECC WAMS in Wide-Area Probing Tests for Validation of System Performance and Modeling", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 24, No. 1, pp.250-257, Feb. 2009.

[11] Peter O'Shea, "The Use of Sliding Spectral Windows for Parameter Estimation in Power System Disturbance Monitoring", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 15, No. 4, pp.1261-1266, 2000.

[12] K. P. Poon, K. C. Lee, "Analysis of Transient Stability Swings in Large Interconnected Power Systems by Fourier Transformation," IEEE Trans. on Power Systems," vol. 3, pp.1573-1579, Nov. 1988.

[13] D. R. Ostojic, "Spectral Monitoring of Power System Dynamic Performances," IEEE Trans. on Power Systems," vol. 8, pp.445-451, May. 1993.

[14] Peter O'Shea, "A high-resolution spectral analysis algorithm for power-system disturbance monitoring", IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 17, No. 3, pp.676-680, 2002.

[15] 심관식, 남해곤, "이산푸리에변환과 시계열데이터의 고속 파라미터 추정", 대한전기학회논문지, Vol.55, No.7, pp.265-272, 2006.

[16] 김은주, 심관식, 김용구, 김의선, 남해곤, 임영철, "광역 계통의 실시간 해석을 위한 고속 저주파수 파라미터 추정", 대한전기학회논문지, Vol.58, No.6, pp.1078-1086, 2009.

[17] K. E. Bollinger, W. E. Norum, "Time Series Identification of Interarea and Local Generator Resonant Modes," IEEE Trans. on Power Systems, vol. 10, pp.273-279, Feb. 1995.

Appendix

A. 지수감쇠함수의 푸리에 변환

연속함수 $x(t)$ 가 다음과 같이 제동계수 α 로 이루어진 지수함수라 하자.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \tag{A.1}$$

이 함수의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] = X_c(\omega) &= \int_0^{\infty} A e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{\alpha + j\omega} \end{aligned} \tag{A.2}$$

B. 코사인함수의 푸리에 변환

연속함수 $x(t)$ 가 주파수 ω_1 과 위상 ϕ_1 으로 이루어진 코사인함수라 하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{A.3}$$

이 함수의 푸리에 변환은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}[x(t)] = X_c(\omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega_1 t + \phi_1) e^{-j\omega t} dt \tag{A.4}$$

여기에서 $\omega_1 t + \phi_1 = \omega_1 \tau$ 로 치환하면

$$X_c(\omega) = \int_0^{\infty} \cos(\omega_1 \tau) e^{-j\frac{\omega}{\omega_1}(\omega_1 \tau - \phi_1)} d\tau \tag{A.5}$$

$$= e^{j\frac{\omega}{\omega_1}\phi_1} \int_0^{\infty} \cos(\omega_1 \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \tag{A.6}$$

$$= e^{j\frac{\omega}{\omega_1}\phi_1} \mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] \tag{A.7}$$

만일 $\omega = \omega_1$ 이면 코사인함수의 위상과 푸리에변환 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\mathcal{F}[\cos(\omega_1 t + \phi_1)] = e^{j\phi_1} \mathcal{F}[\cos(\omega_1 t)] \tag{A.8}$$

시간영역에서 코사인함수의 위상을 ϕ_1 만큼 이동하였을 때의 푸리에변환은 원래 코사인함수의 푸리에변환에 $e^{j\phi_1}$ 를

좁은 것과 같다. 이것은 시간영역에서 코사인함수 위상 변화는 푸리에 변환에서 푸리에스펙트럼은 변화하지 않고 단지 스펙트럼 위상만 변화함을 의미한다.

C. 지수감쇠코사인 함수의 푸리에 변환

연속함수 $x(t)$ 가 주파수 ω_1 을 가진 코사인 함수와 제동 계수 α 로 이루어진 지수함수의 곱으로 이루어진 함수라 하자.

$$x(t) = A e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \phi_1), \quad (\alpha > 0) \quad (A.9)$$

위상 $\phi_1 = 0$ 일 때, 지수감쇠코사인함수의 푸리에변환은 다음과 같다.

$$X(\omega) = \frac{A(\alpha + j\omega)}{\alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega} \quad (A.10)$$

지수감쇠코사인 함수의 스펙트럼 $X(\omega)$ 는 복소함수로 나타난다. 유리화를 하기 위하여 변수들을 다음과 같이 정의한다.

$$a = \alpha^2 + \omega_1^2 - \omega^2, \quad b = 2\alpha\omega, \quad c = A\alpha, \quad d = A\omega \quad (A.11)$$

이들을 대입하여 정리하면 푸리에 스펙트럼은 다음과 같다.

$$X(\omega) = \frac{(ac + bd) + j(ad - bc)}{a^2 + b^2} = X_r + jX_i \quad (A.12)$$

그러므로 크기와 위상은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_\omega = \sqrt{(X_r^2 + X_i^2)} \quad (A.13)$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X_i}{X_r}\right) \quad (A.14)$$

만일 주파수가 제동계수보다 매우 큰 값을 가지고 있으면, 스펙트럼 위상은 다음과 같다.

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega_1^2 + \omega^2)}\right) \quad (A.15)$$

주파수 $\omega = \omega_1$ 에서 $\omega \gg \alpha$ 이 성립하면, 푸리에스펙트럼은 다음과 같다.

$$X_{\omega_1} = \frac{A}{2\alpha} \quad (A.16)$$

D. 푸리에스펙트럼 위상의 미분

푸리에 스펙트럼 위상은 제동계수가 0이거나 주파수 $\omega = j\omega_1$ 에서 급변하게 된다. 식 (A.15)에서 주파수 $\omega = \omega_1$ 근처에서 위상변화를 계산하여 모드의 수렴과 발산 특성을 결정할 수 있다.

먼저 위상이 arctangent 함수이므로 이에 대한 미분을 계산해야 한다. 변수 x 에 대한 arctangent 미분은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (A.17)$$

그러므로 주파수에 대한 식 (A.15)에서 정의된 위상의 미분은 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{d\omega} \quad (A.18)$$

여기에서

$$x = \frac{\omega(\omega_1^2 - \omega^2)}{\alpha(\omega_1^2 + \omega^2)} \quad (A.19)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad (A.20)$$

이 식에서 $d\theta/dx$ 는 항상 0보다 큰 값을 가지고 있다. 그러므로 위상 부호는 $dx/d\omega$ 가 좌우한다. 주파수에 대한 함수 x 의 미분은 다음과 같다.

$$\frac{dx}{d\omega} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\omega^4 + 4\omega_1^2\omega^2 - \omega_1^4}{(\omega^2 + \omega_1^2)^2} \quad (A.21)$$

$$\left. \frac{dx}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = -\frac{1}{\alpha} \quad (A.22)$$

이 식에서 분모는 주파수 ω_1 근처에서 항상 0보다 큰 값을 가지고 있으며, 주파수 ω_1 에서는 제동계수의 역수로 계산된다. 따라서 주파수 ω_1 근처에서 위상 변화는 제동계수 α 에 따라서 좌우된다. 즉,

$$\alpha < 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\omega} > 0 \quad (A.23)$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\omega} < 0 \quad (\text{A.24})$$

그러므로 푸리에변환에서 계산한 스펙트럼 위상으로부터 위상의 변화를 계산할 수 있으면 계동계수를 알 수 있다. 주파수 $\omega = \omega_1$ 에서 $d\theta/dx = 1$ 이므로 식 (A.18)에서 나타난 스펙트럼 위상의 미분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \frac{d\theta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_1} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{d\omega} = -\frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.25})$$

E. 지수감쇠코사인 함수의 이산푸리에변환

식 (A.9)에서 나타난 지수감쇠코사인 함수는 지수함수와 코사인 함수의 곱으로 이루어져 있다. 그러므로 지수감쇠코사인 함수의 푸리에변환은 다음과 같이 컨벌루션으로 나타낼 수 있다.

$$X(\omega) = X_e(\omega) * X_c(\omega) \quad (\text{A.26})$$

$$= A e^{j\frac{\omega}{\omega_1}\phi_1} \mathcal{F} [e^{-\alpha n}] * \mathcal{F} [\cos(\omega_1 n)] \quad (\text{A.27})$$

$$= \frac{1}{2} A e^{j\frac{\omega}{\omega_1}\phi_1} [X_c(\omega - \omega_1) + X_c(\omega + \omega_1)] \quad (\text{A.28})$$

만일 $\omega = \omega_1$ 이면 지수감쇠코사인 함수의 푸리에변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X(\omega_1) = \frac{1}{2} A e^{j\phi_1} X_c(0) = \frac{A}{2\alpha} e^{j\phi_1} \quad (\text{A.29})$$

여기에서 $X_c(0)$ 는 $\omega = \omega_1$ 에서 지수함수의 푸리에 변환이므로 이산푸리에변환에서는 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_c(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha n} e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2 \dots N-1 \quad (\text{A.30})$$

이 식에서 $k=0$ 이므로

$$X_c(0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha n} \quad (\text{A.31})$$

또한 $N \rightarrow \infty$ 이면, $X_c(0)$ 는 계동계수의 역수로 수렴한다.

$$X_c(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\alpha n} = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{A.32})$$

이산푸리에변환은 데이터수가 N개로 고정되어 있기 때문에 정확하게 $1/\alpha$ 로 수렴하지 않을 수 있다. 따라서 계동계수를 알면 N개의 지수함수를 누적하여 $X_c(0)$ 를 계산한다.

◇ 저자소개 ◇



김헌태(金憲泰)

1961년 6월 16일생. 1985년 전남대학교 전기공학과 졸업. 2002년 연세대학교 전기공학과 졸업(석사). 현재 한전 광주 전남본부 재직.



심관식(沈冠植)

1965년 8월 24일생. 1991년 전남대학교 전기공학과 졸업. 1994년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1997~2004년 서남대학교 전기전자공학과 조교수.



남해곤(南海鯤)

1950년 10월 16일생. 1975년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1980년 Univ. of Houston 졸업(석사). 1986년 Univ. of Texas at Austin 졸업(박사). 1975~1978년 한국전력 원자력건설부 근무. 1986~1988년 한국전기연구소 근무. 1988년~현재 전남대 전기공학과 교수.



최준호(崔竣豪)

1970년 7월 30일생. 1996년 숭실대학교 전기공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 2002년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 현재 전남대학교 전기공학과 부교수.



임영철(任永徹)

1953년 4월 23일생. 1975년 전남대학교 전기공학과 졸업. 1977년 고려대학교 전기공학과 졸업(석사). 1990년 고려대학교 전기공학과 졸업(박사). 1983년~현재 전남대학교 전기공학과 교수.



김의선(金義善)

1959년 9월 2일생. 1981년 전남대학교 계측공학과 졸업. 1987년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1999년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 현재 신경대학교 인터넷정보통신학과 교수.