대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.1, 79-95. Mar. 2010

영재아들은 모호성에 어떻게 대처하는가?

이 동 환* · 이 경 화**

영재아들을 대상으로 한 수업에서 모호성을 적극적으로 강조하였을 때, 영재아들이 모호성에 어떻게 대처하는지, 모호성을 해소하기 위해 어떠한 방식을 선택하는지, 구체적으로 모호성이 이들의 수학적 정당화와 관점전환 활동에 어떠한 영향을 미치는지 알아보았다. 모호성은 당연한 것을 의문시하고 수학적 정당화의 필요성을 의식하는데 도움이 되었으며, 특히 서로 경쟁하는 관점을 비교하면서 학생들은 유연한 관점전환을 경험하고 이 통해 자신의 수학적 지식을 검증하고 강화하는 기회를 가질 수 있었다. 자신의 관점에서 깨닫지 못했던 새로운 기회와 가능성을 다른 관점과의 소통을 통해 발견하였다. 영재아들은 모호성을 해소하는 과정에서 두 관점 사이의 관계를 형성하면서 유연한 관점 전환이 가능해지고 결국 일반적이고 통합된 수학적 지식을 구성하였다.

Ⅰ. 서론

영재아들은 일반적으로 문제해결능력이 탁월하다. 따라서 심화문제를 창의적으로 해결하는 능력은 일반학생들 중에서 영재아를 선발하는 가장 효과적인 기준이다. 그러나 문제해결이 수학적 활동의 전부가 아니며 영재아들은 이미 문제해결능력이 상당한 수준에 올라와있기 때문에, 영재아들에게 문제해결 이외의 다양한 수학적 경험의 기회를 제공할 필요가 있다. 일반 학생들에게 적용하기는 쉽지 않지만 수학적으로 의미 있는 경험을 영재아들에게 제공할 필요가 있다.

명확한 개념조차 이해하기가 쉽지 않은 일반학생들에게 수학적으로 모호한 상황을 제시했을 때, 그들이 느끼는 혼란과 당혹감은 엄청날 것이다. 그러나 수학의 발달은 모순, 역설 등의 모호성에 도전하고 극복하면서 이루어져 왔듯이, 수학에서 모호성은 피할 수 없는 현상이다 (Grosholz, 2005; Byers, 2007). 수학자들은 수학적 활동 속에서 접하는 모호성을 창의적으로 활용하면서 수학을 발전시켜 왔다. 이처럼 학교수학에서는 다루기 쉽지 않지만 수학적으로 의미 있는 모호성 상황은 영재교육의 중요한 소재가 될 수 있다.

수학자들은 해답이 알려져 있는 문제보다는 답이 불분명한 문제에 도전한다. 따라서 수학자들은 불확실한 상황 속에 있을 경우가 많고, 이러한 상황에서 자신이 내세우는 주장은 언제나 상대방의 비판에서 자유로울 수 없다. 물론 수학자들은 자신의 주장이 참임을 증명하는 것이 목표이다. 그러나 그 주장이 거짓으로 판명되더라도, 이러한 주장을 증명하려 했던 활동은 시간낭비가 아니다. 이러한 활동은 그동안 자신이 잘못 이해한 점을 밝혀주고 새로운 수

* 서울대학교 대학원 (2donghwan@paran.com)
** 서울대학교 (khmath@snu.ac.kr)

학을 발전시키는 계기가 될 수 있다. 다시 말해, 수학자들은 불확실한 상황에 대처하면서 수학에 대한 이해를 발전시켜 나간다고 볼 수 있다. 예를 들어, Bombelli(1526-1573)는 역설적인 상황에 마주하였다. 삼차방정식 $x^3 = 15x + 4$의 세 근이 모두 실수이지만, 이러한 실근을 구하는 근의 공식은 음수의 제곱근을 포함하고 있다. 방정식은 분명히 실근을 가지지만, 그 방정식의 근을 구하는 공식은 의미 없는 수식을 포함하는 즉, 근이 존재하지만 존재해서는 안 되는 모호한 상황이 벌어진 것이다. 이러한 상황을 해소하기 위해 Bombelli는 허수 i의 의미에 대해 확신하지 못한 상태로 과감하게 허수 계산을 수행하였다. Bombelli는 음수의 제곱근이라는 이해할 수 없는 점을 잠시 제쳐두고, 문자식 계산의 측면에 주목하여 과감한 연산을 시도하였다. 물론 음수의 제곱근이라는 측면에서 보면 자신의 연산은 아무런 의미가 없는 행위에 불과했다. 이러한 두 가지 관점의 차이가 불확실한 상황 즉, 모호성을 일으켰다. 각각의 관점이 상대를 배제하지만 각각의 관점은 나름의 합리성이 있는 상황이다. 복소수가 지닌 풍부한 의미가 모호한 상황을 연출한 것이다. 이러한 모호성에 도전하면서 수학자들은 수학을 발전시켜 온 것이다.

본 연구는 이러한 모호성을 영재아들에게 새로운 수학적 경험으로 제공하려고 한다. 수학자들이 모호한 상황에 맞서 자신의 모든 지식과 통찰을 동원해 새로운 수학을 창조해 가듯이, 영재아들도 자신의 수준에서 모호성에 도전하면서 자신의 잠재능력을 키워나갈 수 있을 것이다. 따라서 영재아들을 대상으로 한 수업에서 모호성을 적극적으로 강조하였을 때, 영재아들이 모호성에 어떻게 대처하는지, 모호성을 해소하기 위해 어떠한 방식을 선택하는지에 초점을 두고 연구를 진행하였다. 즉, 다음과 같이 연구문제를 설정하였다. 영재아들은 모호성에 대처하기 위해 어떠한 방식을 선택하는가? 모호성이 이들의 수학적 정당화와 관점전환 활동에 어떠한 영향을 미치는가?

II. 이론적 배경

1. 수학에서 모호성

엄밀한 논리로 전개되는 수학에서 모호성은 결점을 뜻하며 따라서 모호성은 제거의 대상이 된다. 그러나 Byers(2007)는 모호성이 수학에서 널리 퍼져있는 현상일 뿐만 아니라 수학의 본질에 해당하므로 적극적으로 활용해야 한다고 보았다. Gray & Tall(1994) 역시 수학적 활동에서 모호성의 중요한 역할에 주목하였다. 수학자는 과정과 결과를 상징하는 기호를 모호하게 다룰 수 있고, 이러한 표현의 모호성을 적극 활용하여 수학자는 과정과 대상을 동시에 생각하는 사고의 유연성을 얻게 된다. 수학적 기호 사용에서 드러나는 모호성을 생산적으로 활용하는 것이 수학적 사고의 핵심이라는 관점에서 Gray & Tall(1994)은 'procept'에 주목한 것이다.[1] 중요한 수학적 개념일수록 다양한 방식으로 해석되고 적용되듯이, 다양한 관점의 존재를 함의하는 모호성은 수학적 아이디어의 가치를 평가하는 척도가 될 수 있다(Thurston, 1994).[2]

1) procept는 과정과 개념을 혼합한 신조어로 하나의 기호가 과정과 결과를 모두 나타내는 수학적 개념의 특징을 뜻한다. 예컨대 procept 2+3은 (덧셈)과정이며 개념(합)이다. Gray & Tall(1994)은 학생들이 수학학습에 실패하는 원인이 procept를 맥락에 맞추어 과정 및 결과로 유연하게 사용하지 못하는 데 있다고 지적하였다. 따라서 수학학습 성공의 열쇠는 procept가 지닌 모호성을 적극적으로 활용하는 데 있다고 볼 수 있다.

2) Thurston(1994)은 미분계수에 대한 7가지 정의를 예시하면서, 비록 모두가 서로 동치인지만 각각의 정의는

Byers(2007)는 모호성을 다음과 같이 정의하였다. 서로 대립하지만 각각이 일관된 합리성을 지닌 둘 이상의 관점으로 하나의 상황이나 아이디어를 인식할 때 모호성이 발생한다. 서로 대립하는 다양한 관점의 존재를 뜻하는 모호성은 새로운 수학적 아이디어를 생성하는 환경인 것이다. 각각의 관점이 일관성 있게 동일한 현상을 설명하지만, 두 관점이 양립할 수 없는 상황이 벌어질 때 즉, 모호성이 발생할 때, 수학은 위기를 겪게 된다. 이를 해결하기 수학자들은 창의력을 발휘하기 시작한다. 일반적으로 모호성에 대한 반응을 두 가지로 구분할 수 있다. 한편으로, 서로 모순되어 보이는 관점 가운데 하나를 포기할 수 있다. 다른 한편으로, 두 관점이 일으키는 갈등을 조화시킬 수 있는 새로운 관점을 창조한다. 실제로 두 가지 반응 모두 수학사에서 찾아볼 수 있고 두 방식 모두 새로운 수학의 창조에 기여하였다.

2. 음수의 로그에서 모호성

1712/1713년 Leibniz와 Johann Bernoulli는 음수의 로그에 대해 논쟁을 벌였다. Bernoulli는 $\log a = \log - a$을 주장한 반면, Leibniz는 $\log - a$가 허수라고 확신하여, $\log a \neq \log - a$ 을 주장하였다. 1727년에서 1731년 동안 Bernoulli와 Euler는 다시 한 번 이 문제를 논의하였으나 끝내 해결되지 않았다. 1749년 Euler는 음수의 로그에 대한 논쟁을 해결하는 논문[3]을 발표한다. 이 논문에서 Euler는 Leibniz와 Bernoulli가 자신의 입장을 옹호하기 위해 제시한 논증과 반증을 체계적이면서 극적이게 서술하였다. Euler의 논문은 대립하는 두 입장을 충실히 설명하고, 그러한 대립의 원인을 지적하여 해소하는 과정을 상세하게 제시하고 있다. 즉, 두 가지 입장이 혼재하는 모호한 상황을 정확하게 지적하였고, 또한 이러한 모호성이 해소되는 과정을 구체적으로 보여주고 있다. 이러한 측면에서, Jahnke(2003)는 수학적 아이디어의 발생과정에 관심 있는 연구자라면 이 논문을 읽어볼 필요가 있다고 평가하였다.

음수의 로그가 야기한 로그의 성질 및 정의에 대한 모호성은 수학자들의 지적인 도전을 자극하였고 결국 Euler에 의해 로그의 본질적인 의미가 밝혀지게 되었다.

Bernoulli는 로그의 성질을 근거로 자신의 입장을 주장하였다. 로그의 성질 즉, $\ln p^n = n \ln p$을 이용하면, $\ln(-a)^n = n\ln(-a)$. $n=2$ 이면, $\ln(-a)^2 = 2\ln(-a)$. 그런데 $(-a)^2 = a^2$이므로, $\ln(-a)^2 = \ln a^2 = 2\ln(a)$. 따라서 $2\ln(-a) = 2\ln(a)$이고 $\ln(-a) = \ln(a)$가 성립한다.

Euler는 Bernoulli가 제시한 여러 가지 증명 가운데 위 논증이 가장 설득력 있다고 평가했으나 다음과 같이 반박하였다. 해석학과 로그의 확고한 제반 원리들을 부정하지 않는 한, 이 증명을 뒷받침하는 성질에 대해 의심할 여지는 없다. 우리가 $(-a)^2 = a^2$을 부정할 수는 없다. 따라서 $\ln(-a)^2 = \ln(a)^2$은 당연하다. 게다가 일반적으로 $\ln p2 = 2\ln p$도 확실하다. 따라서 $\ln(-a)^2 = 2\ln(-a)$이고, $\ln(+a)^2 = 2\ln(a)$이다. 그러므로 $2lan(-a) = 2\ln(a)$이고, 각 값을 2로 나누면, 베르누이의 주장대로 $\ln(-a) = \ln(a)$이다.

그러나 이 추론이 옳다면, 우리는 베르누이를 비롯해서 어느 누구도 수용할 수 없는 결과를 연역

미분계수를 이해하는 서로 다른 방식을 보여준다고 설명한다. 따라서 각각의 정의는 미분계수에 대한 새로운 의미와 통찰을 제공하고, 이러한 정의들을 서로 조화시키는 과정에서 미분계수에 대한 이해가 깊어진다고 하였다. 이처럼 서로 동치이기 때문에 수학적으로는 차이가 없지만, 각각을 이해하면서 발생하는 미묘한 차이가 모호성을 야기하는데 이는 그 개념의 결함이기보다는 심오함을 나타내는 증거이다.

3) Euler (1749). On the controversy between Leibniz and John Bernoulli concerning logarithms of negative and imaginary numbers.

할 수 있다. 우리는 동일한 방식으로 허수의 로그가 실수임을 증명할 수 있다. $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$이고 따라서 $\ln(a\sqrt{-1})^4 = \ln(a)^4$. 그러면 $4\ln(a\sqrt{-1}) = 4\ln(a)$이고 따라서 $\ln(a\sqrt{-1}) = \ln a$이다. 게다가 $(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a)^3 = a^3$이므로 $\ln(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a)^3 = \ln a^3$, $3\ln(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a) = 3\ln a$, $\ln(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a) = \ln a$이다. 로그의 이론을 송두리째 뒤집는 결론들이다. 따라서 베르누이의 체계를 따르면, 우리는 $\ln(-1) = \ln(1) = 0$뿐만 아니라, $\ln(\sqrt{-1}) = 0$ $\ln(-\sqrt{-1}) = 0$, $\ln(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) = 0$도 받아들여야 한다.

Leibniz가 log-a 가 허수라고 주장한 이유는 다음과 같다. y=log$x$라 하자. loge=-1,e=2.71828...이다. x의 로그는 e의 지수 y이다($x=a^y$). e의 지수가 실수라면 e^y는 음수가 될 수 없다. e^y=-1을 만족하는 실수 y는 존재하지 않는다. 일반적으로 x값을 음수인 -a라고 할 때, 이 값의 로그를 y라고 하면, e^y=-a를 만족해야 하는데 이러한 y는 존재하지 않는다. 따라서 y는 허수이다.

Euler는 Leibniz의 증명방식을 그대로 적용하여 Bernoulli 주장을 증명할 수 있다고 하였다. x=e^y에서 $y = \frac{m}{2n}$ (분모가 짝수)이라면, $x^2 = e^{\frac{m}{n}}$이라고 할 수 있다. 그러면, $e^{\frac{m}{2n}}$ 은 x^2의 제곱근이다. 따라서 $+x, -x$ 모두 $e^{\frac{m}{2n}}$에 해당한다. 따라서 x와 -x 의 로그는 $\frac{m}{2n}$으로 서로 동일하다.

이처럼 $\ln(x) = \ln(-x)$ 와 $\ln(x) \neq \ln(-x)$ 가운데 어느 하나를 택하더라도 모순을 피할 수 없었다. 둘 중 하나가 참이면 다른 것은 거짓이어야 하는데 이것이 성립하지 않으니까 수학자들은 당혹감을 느낀 것이다. Leibniz와 Bernoulli는 서로의 주장을 인정할 수 없었지만 상대의 주장을 반박해도 자신의 주장이 증명되지 않는 상황이었다.

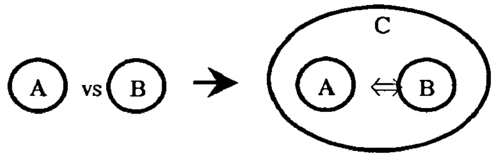
Leibniz와 Bernoulli(및 모든 수학자)가 '로그'라는 용어에 부여한 아이디어가 완벽하게 옳다면, 로그이론을 모순에서 구해내는 것은 불가능할 것이다. 우리가 완벽하게 이해하고 있는 것에서부터 로그 아이디어가 발생했다면, 그러한 결점이 어떻게 일어날 수 있을까? 주어진 수의 로그란, 임의로 선택한 수를 거듭제곱하여 그 주어진 수와 같게 되는 지수를 뜻한다. 이러한 생각은 완벽하게 옳지만, 일반적으로 우리는 그 아이디어에 적절하지 않은 조건을 덧붙이고 있다. 즉, 우리는 거의 무의식적으로, 각각의 수에 오직 하나의 로그만이 대응한다고 가정하고 있다. 로그를 둘러싼 이 모든 어려움과 모순이 오직 하나의 로그만 존재한다는 가정에서 비롯됨을 알 수 있을 것이다. 로그의 정의를 다시 살펴보면서, 나는 각각의 수에 무한히 많은 로그가 대응한다고 주장하겠다. (Euler, 8)

Euler는 Leibniz와 Bernoulli 가 로그 정의를 사용하면서 적절하지 않은 가정을 하고 있음을 지적하였다. Leibniz와 Bernoulli가 서로의 주장을 반박하지만 모두 동일한 가정에서 벗어나지 못하고 있음을 지적하고 있다. Euler는 숨겨진 가정을 드러냄으로서 두 사람의 논쟁을 해소할 수 있었다.

주어진 수의 로그는 무한히 많다는 것이 로그의 본질적인 성격이다. 원의 호의 길이(및 각도)와 로그는 그 성격이 동일하다. 사인이나 코사인에 무한히 서로 다른 호의 길이가 대응하듯이, 로그에 무한히 많은 수가 대응한다. 그러나 중요한 차이가 있다. 동일한 사인이나 코사인에 대응하는 모든 호의 길이는 실수이지만, 하나의 수에 대응하는 모든 로그는 (양수에 대응하는 로그의 경우엔 실수 하나를 제외하고)허수이다. 음수와 허수의 로그는 예외 없이 모두 허수이다. 주어진 호의 길이에 오직 하나의 사인이나 코사인만이 속하듯이, 주어진 로그에 대응하는 수는 오직 하나이다. (Euler, 1749, 19-20)

+1의 로그는 0뿐만 아니라 무한히 많다. 물론 그 수는 모두 허수이다. -1의 로그가 무한한데 그 각각을 2배한 값이 +1의 로그 하나에 해당한다면, 2log(-1)=log(+1)을 만족한다고 볼 수

있다. 따라서 한편으로 Bernoulli의 주장 가운데 In(-1)=0은 인정하지 않으면서, 2log(-1)=log(+1)을 설명하고 있으며, 다른 한편으로 In(-1)이 허수라는 Leibniz의 주장도 설명하고 있다. Euler의 입장은 두 사람의 주장을 모두 받아들이며 동시에 모두 반박한다고 볼 수 있다. 갈등을 일으키던 '2log(-1)=log(+1)'과 'In(-1)은 허수이다'라는 두 관점 가운데 어느 하나를 제거함으로서 로그를 둘러싼 모호성을 해소한 것이 아니다. Euler는 '주어진 수의 로그는 무한히 많다'는 새로운 관점을 제시함으로서 기존의 두 관점을 모두 포괄하여 모호성을 해소한 것이다. 갈등의 원인이 되었던 두 관점이 이제는 로그 개념의 본질을 설명하는데 활용되는 것이다. 즉, 과거의 갈등요소가 유연한 관점의 전환을 뒷받침하는 요소가 된 것이다. Euler는 기존의 두 관점을 자유롭게 옮겨 다닐 수 있게 된 것이다. 로그에 대한 이해가 한 단계 심화된 것이다.



[그림 Ⅱ-1] 두 관점을 통합하는 새로운 관점의 등장으로 모호성 해소

3. 무리수의 모호성

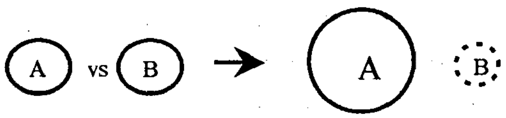
$\sqrt{2}$를 둘러싼 모호성이 그리스 수학을 위기에 몰아넣었다. 기하학적 맥락에서 $\sqrt{2}$는 크기로서 명확한 의미를 가진다. 그러나 산술맥락에서 $\sqrt{2}$는 유리수로 표현될 수 없었다. 유리수는 기하맥락과 산술맥락 모두에서 의미가 분명했지만 $\sqrt{2}$는 그렇지 않았다. 그리스 수학은 기하학을 위해 대수학을 포기하였다. 그렇다 해도, $\sqrt{2}$의 통약불가능성(irrationality)은 통약가능성에 기반한 세계관을 가진 그리스 수학에 커다란 충격을 주었다. 사실, 유클리드 기하학의 상당 부분은 임의의 길이가 통약가능하다는 가정에 기반하고 있다. 두 선분의 비가 항상 유리수라고 생각하였다. 따라서 이러한 가정에 기반한 모든 증명은 다른 방식으로 증명되어야 했다. 모호성이 일으킨 갈등을 해결하려는 노력이 시작된 것이다. 사실 이 과제는 성공적으로 달성되었다. 수학적 활동의 생성자로서 모호성의 역할을 볼 수 있다.

x/y라는 비에 어떠한 의미를 주는가의 문제가 있다. 유리수와의 관계를 통해 무리수를 표현할 수 있다는 아이디어가 등장하였다. 유리수와 무리수의 관계를 현대수학과 유사하게 통찰하였다. 유리수가 실수를 결정한다는 데데킨트 절단의 아이디어와 동일하다. 이러한 아이디어가 그리스 수학에 존재한다는 것도 놀랍지만, $\sqrt{2}$가 촉발한 위기를 다루기 위해 이러한 아이디어가 등장했다는 사실도 놀라운 일이다.

그리스 수학이 $\sqrt{2}$의 모호성을 완전하게 해결한 것은 아니다. 19세기에 실수체계가 엄밀하게 확정되기까지 모호성은 완벽하게 해소되지 않았다. $\sqrt{2}$의 기하학적 성질과 대수적 성질이 조화를 이루고 이해될 수 있는 맥락을 제공한 것은 실수이다. 실직선 위에서 $\sqrt{2}$는 다른 유리수와 동등한 수이며 위치를 차지한다. 새로운 맥락은 원래의 두 가지 참조틀 모두를 포함하며 그 자체가 상위 수준의 맥락이다.

비록 그리스 수학이 기하맥락과 산술맥락을 통합하는 관점을 형성하지 못했지만, 기하학적 관점을 채택한 뒤 대립하던 산술적인 문제를 해소하기 위해 새로운 수단을 강구하기 시작한 것이다. 대수적인 관점을 포기한 대신, 기하학적 관점에서 $\sqrt{2}$가 일으킨 위기를 해소하기 위해 기존의 관점을 더욱 발전시켜 나가서 결국 일반적인 비례론을 확립하게 되었다. 대립하던

두 가지 관점 가운데 하나를 포기하더라도 제거된 관점이 일으킨 갈등은 여전히 채택한 관점이 해결해야 한다. 이러한 상황에서 채택된 관점은 자신의 약점을 반성하고 새로운 해결책을 찾아내는 것이다. 이 역시 모호성을 해소하는 한 가지 방식인 것이다.



[그림 Ⅱ-2] 두 관점 가운데 하나를 제거하여 모호성 해소

4. 모호성과 수학영재교육

Movshovitz-Hadar, & Kleiner(2009)는 수학사를 분석하여, 지적인 용기가 수학적 창의성에서 중요한 역할을 하였음을 통찰하고, 영재교육이 지적인 용기를 발휘하는 기회가 되어야 한다고 제언하였다. 지적인 용기는 어떤 주제에 대한 자신의 이해를 넓히려는 열망 및 새로운 관점에서 그 주제를 이해하려는 도전을 뜻한다. 이러한 활동이 원하는 결과를 가져다주지 못할 수 있음을 알면서도 자신의 직관을 믿고 탐구한다는 점에서 용기 있는 행동인 것이다. 자신의 직관을 신뢰하며 쉽게 좌절하지 않고 끊임없이 도전한다는 지적인 용기는 영재아들의 특성 가운데 하나이다. 따라서 영재교육은 지적인 용기를 발휘할 수 있는 상황을 영재아들에게 제시할 필요가 있다.

> 모든 위대한 탐구에는 용기가 필요하다. 이는 마치 아무런 보장도 없이 미지의 세계를 향해 떠나는 항해와도 같다. 이러한 용기의 본질은 무엇인가? 이것은 특정 상황이 처한 모호성에 자신을 내던지는 용기이다. (Byers, 2007, 57)

이처럼 모호성은 영재아들이 자신의 지적인 용기를 발휘하기에 적절한 상황이다. 게다가 모호성에 접하여 비록 그것을 해소하지 못하더라도 모호성을 유발한 상황에 대한 이해는 더욱 깊어질 수 있다. 앞서 살펴보았듯이, 모호성에 접하여 어느 한 쪽을 선택하거나 둘 모두를 통합하는 방식으로 모호성에 대처하는 방법 모두 수학적으로 의미 있는 결과를 산출할 수 있다.

훌륭한 수학자일수록 대담한 수학적 추측과 새로운 문제를 활발하게 제기한다. 구체적인 증명이나 증거는 부족하지만 자신의 직관이나 통찰에 의거하여 모종의 수학적 주장을 제기하고 판단하는 능력은 수학자의 천재성을 보여주는 자질이다. 이러한 능력을 일반학생들에게 기대하는 것은 무리이지만, 대개의 수학수업은 학생들에게서 그러한 기회조차 제공하지 않고 있다. 수학수업에서 학생들은 풀이방법을 선택할 기회도 없고 증명의 여부를 선택할 기회도 없다. 이러한 방식으로 획득한 지식은 '학교에서 살아남기' 지식에 가까울 뿐 과학적인 지식이 아니다.(Sierpinska, 2000, p.245) 모호성은 학생들에게 선택의 기회를 제공한다. 학생들은 자신의 접근이 올바른지 확신하지 못하고, 대립하는 관점의 존재는 학생들에게서 안정감을 빼앗는다. 그러나 의사결정 활동에 대처하는 경험 속에서 학습이 일어난다. 학생들은 의사결정을 위해 대립하는 관점을 충분히 조사하고 자신의 모든 지식을 동원해야 한다. 서로 팽팽한 대립 가운데 어느 하나를 선택하기 위해 통찰력이 개입되고 이는 곧 창의성의 발현과 관련이 있다. 모호성 상황은 영재아들의 창의성 계발의 좋은 기회가 될 수 있다.

III. 연구방법

1. 과제개발

영재아들이 모호성을 경험할 수 있도록 과제를 개발했다. 과제를 해결하는 방법이 두 가지 이상일 뿐만 아니라 각각의 풀이가 서로 대립하게 되는 과제를 개발하였다. 개발한 확률과제는 학생들이 학교수학에서 이미 익숙해진 상황을 소재로 하였다. 익숙하여 쉽게 해결할 수 있는 과제에 서로 대립하는 풀이가 존재할 수 있다는 사실에 학생들은 흥미를 가질 뿐 아니라 더욱 활발한 논쟁이 가능해 질 수 있다.

문항1은 영재아들이 평소 확률문제를 해결하는 일반적인 방식을 확인하기 위한 문제이다. 앞으로 제시될 문항2의 풀이와 대립하는 관점을 상기시키기 위한 목적이다. 문항2는 영재아들이 새로운 풀이를 찾을 수 있도록 구성하였다. 문항2의 해답은 문항1과 다르게 나오는데, 이 순간부터 학생들은 모호성을 경험하게 된다. 문항3은 학생들이 이러한 모호성에 어떻게 대처하는가를 알아보기 위한 것이다.[4]

한편, 과제개발과 관련하여 확률은 모호성과 밀접한 관계가 있다고 볼 수 있다. 이경화(1996)는 확률 개념을 역사-발생적으로 분석하여 다음의 두 가지 특성을 제기하였다. 하나는 확률 개념을 수학화하는데 매우 오랜 시간이 걸렸다는 것이고, 다른 하나는 확률 개념에서는 수학의 어느 분야보다도 패러독스와 오류가 많았다는 것이다. 이러한 확률의 모호성과 패러독스로 인한 혼란을 피하기 위해 우리나라의 확률 교육과정은 초등학교부터 고등학교까지 공통적으로 경우의 수에 대한 논의에서 시작해서 주로 고전적 관점의 확률만을 다루고 있다. 경우의 수를 헤아리는 조합론적 방법과 덧셈정리와 곱셈정리를 중심적인 원리로 하는 확률 계산 학습이 주를 이루고 있다. 확률 문제를 해결하는 데에 확률의 수학적 정의와 공식이 강조되고, 형식적인 계산 기능에 초점을 맞추고 있다(이정연, 2005). 그러나 확률은 본래 우연 현상을 조직하고 정리하는 수단으로, 우연 현상에 대해 우리가 가진 주관적인 신념을 객관적인 지식 형태인 수로 표현함에 따라 확률 개념에는 모호성이 내포될 수밖에 없다. 따라서 아무리 조합론적 논의와 확률 계산에 초점을 맞추어 애매성을 피하려하더라도 확률개념의 모호성이 사라질 수는 없으며, 이는 확률의 본질을 왜곡하는 일이다. 본 연구에서 제시한 과제는 우연 현상을 어떻게 파악하는가에 따라 확률이 달라질 수 있음을 보여준다. 확률 개념의 모호성을 야기하는 우연 현상을 확률 교육에서 피하려만 하지 말고 적극적으로 접근해야 할 것이다. 본 연구는 이러한 모호성을 영재교육에 적극적으로 도입하려는 시도라고 볼 수 있다.

2. 연구대상 및 절차

서울 소재 대학부설 영재센터의 중학교 3학년 학생 6명[5]을 대상으로 수업을 진행하였다. 중학교 1학년 때 영재센터 선발시험을 거친 후, 3년간의 영재교육 과정에서 다시 한 번 선발을 거친 학생들로 실험당시 과학고 및 영재학교로의 진학이 확정된 상태였다. 따라서 이들의 수학적 능력은 객관적으로 검증되었다고 볼 수 있다. 덧붙여 이들은 동일기관에서 3년에 걸쳐 영재교육을 받으면서 서로 친해졌기에 자신의 의견을 밝히는 데 주저하지 않았고, 그

4) 실험에 사용한 과제를 부록에 제시하였습니다.
5) 본 논문에 등장한 학생의 이름은 가명임을 밝혀둡니다.

동안의 다양한 영재수업을 통해 새로운 내용의 수학수업에 거부감이 없었고, 자신의 의견을 밝히고 논쟁하는 수업에 익숙해있었다. 겨울방학 동안 하루에 하나의 주제로 4시간씩 수업을 진행하였고 확률과 통계 영역의 서로 다른 4가지 주제로 4일간 계속되었다. 본 연구는 둘째날 수업을 대상으로 하였다.[6] 연구자가 직접 수업을 진행하였고 모호성에 대처하는 방식을 알아보기 위해 학생들의 논쟁을 적극적으로 장려하였다. 의견이 대립하는 과정에서 연구자는 자신의 의견을 밝히지 않았으며 어느 한 편을 지지하지도 않았다. 연구자는 필요에 따라 각각의 의견을 정리하여 논점을 부각시키는 역할을 하였다.

3. 자료 수집 및 분석

2명씩 짝을 지어 총 3개조로 나누어 수업을 진행했는데, 전반적인 수업진행은 비디오 녹화를 하였고, 각 조에서 논의한 내용을 녹음하였고, 각 조에 보조연구자를 1명씩 배치하여 학생들의 행동을 관찰하였다. 보조연구자는 학생들의 질문에 답하거나 자신의 의견을 내지 않았고 단지 학생들이 모호성에 대처하는 방식을 이해하기 위해 관찰하는 역할을 하였다. 소수의 학생들을 대상으로 수업이 진행되었으므로, 수업 후 따로 면담할 필요 없이 논쟁이 지속되는 순간마다 학생들의 의견을 청취하였다. 수업 후 활동지와 녹화자료, 녹음자료를 1차 분석하고 보조연구원과 연구자의 토론을 통해 상세하게 수업을 다시 분석하였다.

Ⅳ. 결과

1. 모호성 인식

예상대로 문항1에 대해 대부분의 학생들은 2/3를 정답이라고 생각했고 자신의 답에 확신을 가지고 있었다. 이 때 강석이는 자신의 풀이가 대다수의 풀이와 일치하지 않아서 고민하고 있었고 따라서 교사는 강석이에 주목하였다. 원래 문항2를 푸는 과정에서 1/2이라는 새로운 풀이를 제시하려고 했으나 강석이는 미리 새로운 관점의 존재를 인식하기 시작했다. 교사는 문항2를 제시하기 전에 강석이에게 자신의 고민을 다른 학생들에게 소개할 기회를 제공하였다. 아직 강석이는 자신의 관점에 확신을 가지지 못했는데, 오히려 이렇게 불확실한 상태가 다른 학생들에게 활발한 논쟁의 기회를 제공하였다.

강석: E지점을 통과하게 될 확률에서 그 아래 부분이 어떻게 생겼던지 E지점을 통과하면 그 아래 부분 상황은 전혀 상관없으니까 확률이 1/2씩 나오는데... 문제가 생겼는데.. 이게 지금 맞는지 모르겠어요..

논쟁의 핵심은 E 이후의 경로가 문제를 해결하는데 상관이 있는지의 여부이다. 강석이는 A에서 D,E,F 까지 가는 경로만을 생각하면 된다는 입장이고, 다른 학생들은 I까지 가야하는 문제 상황을 반영하려면 그 이후의 경로도 고려해야 한다는 입장이다.

범영: 아랫부분이 상관있는 것 같은데요.
강석: 어차피 D,E,F에서 E를 지나든 D를 지나든 F를 지나든 그 확률만 구하면 아랫부분이 어떻게 생겼는지 간에 도착하는 조건은 아니까 상관없잖아요.
동준: 최단거리를 이동하여 I지점에 꼭 도달해

6) 1일째 수업은 평균 개념의 모호성을 다루었고, 3,4일째 수업은 확률의 패러독스를 주제로 하였다.

야 하는데 그러면 I지점에 도달하는 경우 중에서 세는 거니까 밑에 부분이 상관있잖아요.

범영: B를 지났으면 D,E로 갈 확률이 모두 1/2이라고 말하는 거잖아요? 맞죠?

강석: 네

범영: 근데 D,E로 갈 확률이 모두 1/2이라고 말할 수 없는게, D는 G만 지나고, E는 G,H 모두 지날 수 있는데 그러니까 D입장에서는 H를 지나가는 것 까지 포함에서 1/2이라고 하는거 아닌가요?

강석: G,H는 상관없는게 B에서 사람이 서서 봤을 때, 앞의 길은 2개 밖에 없으니까, 다음 상황이 어떻게 될 지 모르잖아요. 그러니까 뒷 상황을 모르니까 1/2이죠.

강석: B에서만 봤을 때는 뒷 상황을 모르잖아요. 그 다음은 더 이상 몰라요. 그 다음 B에서 D,E 하나에 도착했을 때, 그 다음 상황을 알게 되죠.

처음엔 자신의 주장에 확신을 가지지 못했던 강석이는 자신의 관점과 타인의 관점 사이의 차이가 분명해지면서 점점 자신의 주장에 확신을 가지게 되었다. 강석이는 E지점 이후의 경로를 고려할 필요가 없다는 것만을 정당화하면 자신의 주장이 옳다는 확신을 가진 것이다. 범영, 동준이는 관점의 차이를 부각시키면서 경쟁관점을 반박하고 있다. E지점 이후의 경로를 고려해야 하는가의 여부에 따라 각자가 얻은 해답을 정당화할 수 있다고 생각하고 있다. 각각의 풀이가 나름의 합리성을 지녔으나 가정의 차이로 인해 결과가 모순되는 모호성을 야기한 것이다. 모호성을 자극하여 두 관점의 차이를 부각시키려는 수업의 의도가 분명히 전달되었다고 볼 수 있다. 학생들 모두 두 관점의 차이를 의식하였으나 이 '차이'를 해석하고 활용하는 활동 즉, 모호성에 대처하는 방식에는 차이가 있었다. 두 관점 가운데 하나를 제거하여 모호성을 해소하려는 방식과 두 관점을 모두 설명할 수 있는 통합된 관점을 찾아서 모호성을 해소하려는 방식이 나타났다.

2. 두 관점 가운데 하나를 제거하여 모호성 해소

가. 대립관점의 등장으로 인해 당연한 것을 의문시 한다.

1) 승현이의 관점전환

대립하는 관점이 제기되자 승현이는 그 관점에 의문을 던지고 정당화를 요구하였다. 그러나 논쟁과정에서 의문의 방향은 자신을 향하기 시작했다. 대립하는 관점(강석)이 자신의 반박을 이겨내자 그 관점의 일관성을 인식하기 시작했다. 이는 동시에 자신의 기존 생각을 반성하는 계기가 되었다.

승현: <u>둘 다 맞는 것 같아요.</u> 왜냐하면 저희가 구한 4/6란 답은 결국 경로를 생각한 거잖아요. 전체 경로가 6개고 E를 거치는 경우가 4개니까 4/6이구요. 만약에 그냥 자전거타고 A부터 I까지 갈 경우에는, 강석이 말이 맞아요. 강석이가 말한 것은 일반적으로 자전거타고 A에서 I로 갈 때, 우리가 말하는 것은 전체 경로를 따져봤을 때, E로 지나가는 것을 뜻해요.

자신이 2/3라고 판단한 과정을 생각해보고 대립관점과의 차이를 파악하였다. 자신의 관점과 대립관점 모두 일관성을 지니고 있다고 판단한 것이다. 승현이는 자신의 관점을 명확하게 드러내는 순간 비로소 강석이의 관점도 수용할 수 있게 된 것이다. 이렇게 자신의 관점이 명확해 지자 대립하는 관점보다는 자신의 관점 즉, 당연하게 생각하던 것을 의문시하게 되었다. 승현이는 자신의 관점이 새로운 의문을 이겨내지 못하자 둘 다 맞는다는 생각을 버리고 대립관점을 채택하게 된다.

승현 : 이 경로가 1/6로 동일하다는 이유가 없잖아.

지현 : 그냥 찍어.. 눈감고 하나 찍듯이.

승현 : 아니 여기 봐봐. A에서 B, E를 거쳐 I로 가는 경우에는 B, E 두 군데에서 선택을 하잖아. 근데 A에서서 B,D를 거쳐서 I로 가는 길에는 B 한 군데에서만 선택하잖아. 얘는 한 번 선택하고 얘는 두 번 선택하는데 확률이 같다고 말할 수 없잖아.

지현 : 근데, 여기서 보는 것은 경로잖아.

승현 : 그러니까 그 경로 하나하나가 나올 확률이 다르잖아.

지현 : 아니 근데, ABD 경로도 1/4이고, ABE 경로도 1/4이고, ACE, ACF도 모두 1/4로 똑같잖아.

승현 : 그래 맞아. 잠깐 기다려봐. (자신의 활동지에 계산을 한다.)

승현 : 여기 봐봐. E를 지나면서 I로 지나는 게 경로가 4개잖아. 그 각 경로를 지나는 확률은 1/8이야. 그리고 D를 지나는 경로는 하나밖에 없잖아 그래서 1/4이야. 그러니까 각 경로의 확률이 다르잖아.

지현 : 그러네 ... 잠깐 다 더하면 1이야?

승현 : 다 더하면 1이야?

지현 : 어 그러네.

승현 : 그러니까 아까 강석이가 말한 것이 맞아. <u>2/3가 틀린 이유가</u>... 2/3가 맞다는 가정은 무슨 가정이냐면, 각 경로로 갈 확률이 다 같다는 가정이잖아. 그런데 각 경로가 다르잖아. 그래서 틀린 거잖아.

지현 : 나 이거 이해했어. 인정할 수 있을 것 같아. 이 얘기 맞는 것 같아.

승현이 생각의 흐름을 살펴보면, 강석이의 주장을 반박하면서 자신의 주장을 반성하고 그 결과 두 관점의 차이를 발견하게 되었다. 하나의 문제 상황에 서로 다른 답이 존재하지만 둘 다 인정할 수 있다는 점에서 모호성을 인식했다고 볼 수 있다. 동시에 자신의 가정을 향한 의문이 시작되었다. 자신의 가정이 틀린 이유를 지적하고 상대의 관점을 채택한 것이다. 일단 승현이가 처음에 느꼈던 모호성은 해소되었다고 볼 수 있다. 모호성은 인지적으로 불안정하고 역동적인 경험을 학생에게 제공한다. 처음에 상대를 향하던 검증의 칼날이 자신이 당연하게 생각했던 것을 향하게 된다.

2) 범영이의 관점전환

범영이는 가장 적극적으로 강석이의 관점을 반박하였다. 둘 다 맞을 수 있다는 생각은 하지 않고 일관되게 2/3가 옳다는 주장을 펼치고 있었다. 그러나 자신의 반박에도 불구하고 1/2을 뒷받침하는 근거가 흔들리지 않았고, 문항2를 푸는 과정에서 1/2를 뒷받침하는 근거가 명확해지자 범영이 역시 자신의 기존 관점에 의문을 제기하기 시작했다.

범영: 그럼 궁금한게요. 아까 구한 2/3는 뭐에요? 모든 경우를 다 세서 구한 것인데 왜 아니라는거야? 여섯 가지 경우를 다 생각해서 2/3가 나왔잖아.

범영: 2/3가 뭐지 그럼? 어째서 2/3가 아닌지 말해봐

강석: 어째서 2/3인지 말해봐.

범영: 경우 다 셌으니까. 전체 경우 중에 E를 지나가는 경우. 그게 확률을 구하는 방법이잖아.

강석: 우리는 갈 수 있는 확률을 계산했잖아.

범영: 우리도 확률을 계산했잖아.

강석: 너희는 경우를 계산했지.

범영: 그게 확률의 정의잖아.

강석: 정의가 아니지.

범영: 확률의 정의지. 전체 사건 중에 만족하는 사건이잖아.

승현: 확률을 구할 때, 확률로 계산하지 않고 가짓수로 계산하려면, 제일 중요한 게 그 경우 모두가 일어날 확률이 모두 동일해야 하잖아. 너희는 같다는 보장 있어?

범영: 나도 내가 틀린 건 알고 있는데.. 안 그러면 수업이 너무 일찍 끝나.

두 관점의 차이에 대한 여러 가지 설명 가운데 범영이는 경우의 수로 확률을 구할 때 모든 경우의 수가 일어날 확률이 동일해야 한다는 기준에 비추어 자신의 관점을 반성하게 되었다. 각 갈림길에서 선택하는 경우는 이 기준을 만족하지만, 자신이 주장하는 6가지 각각의 경로는 만족하지 않는다고 생각한 것이다. 범영이 역시 자신의 관점을 명확하게 드러내고 뒷받침하던 가정을 살펴보면서 자신의 관점을 바꾼 것이다.

승현이와 범영이 모두 대립관점이 없었다면, 자신이 당연하게 생각했던 가정을 명시적으로 드러내어 반성할 기회를 가지지 못했을 것이다. 대립관점이 기존관점과 동일한 결과를 도출한다면, 기존관점을 심각하게 의심할 필요를 못 느꼈을 것이지만, 모호성 상황은 두 관점이 상대를 배제하기 때문에 지속적으로 두 관점을 반성하는 기회를 제공한다. 승현이와 범영이가 가지고 있던 기존의 관점도 일관성을 지니고 있었으나 대립관점이 반박을 이겨낸 상황이 던진 충격이 워낙 커서 기존의 관점을 폐기하기에 이르게 되었다. 이들은 수학적 과제가 반드시 하나의 정답을 가져야 하고, 그러기 위해선 가정이 명확해야 한다고 생각했다. 이러한 상황에서 2/3관점에 맞게 문제 상황을 재정의한 것이다. 대립하는 두 관점 가운데 하나를 선택하기 위해 기존의 암묵적인 가정들을 명시적으로 밝히고 정련함으로서 자신을 괴롭히던 모호성을 해소한 것이다.

나. 대립관점의 등장에 맞서 자신의 관점을 강화한다.

강석이 역시 상대의 관점에 비추어 자신의 관점을 좀 더 분명하게 파악하였다. 그러나 강석이는 자신의 관점을 바꾸기 보다는 두 관점의 차이가 분명해질수록 문제 상황을 자신의 관점에 맞추어 해석하였다. 강석이는 초기에 자신의 답에 확신을 하지 못했지만, D,E,F 이후의 상황을 고려해야 한다는 대립관점에 맞서 그 이후의 상황은 고려할 필요가 없다는 자신의 관점을 더욱 확고히 다져나갔다. A로부터 거리가 2인 지점인 D,E,F 까지만 생각하면 문제될 것이 전혀 없다고 생각한 것이다. 그 이후를 생각함으로서 문제가 복잡해져서 이러한 논란이 생긴 것으로 파악하였다. 그러나 대립관점은 D,E,F 이후의 경로를 고려해야 한다는 점을 집요하게 주장하였고, 그 결과 강석이도 이후의 경로를 고려해야 하는 주장의 의미를 이해하게 된다.

강석 : 난 거기(뒷부분)를 생각할 필요가 없어. 그 뒤를 아예 지워도 돼.
범영 : 네 말은 여기(I) 다 도착한다는 거잖아. 내가 이걸 모를 줄 알아? 내가 그래서 그려봤지. 근데 여기서 보장된 것이 뭐냐면, 여기 통과한 입자는 모두 I에 도착한다는 거잖아. D,E,F 중 E를 결정하면 무조건 I로 간다는 것이잖아. 근데 아까 그 상황을 보면..
강석 : 아 무조건 안 갈 수 있다고.

강석이가 D,E,F 이후의 경로를 고려할 필요가 없다고 주장한 암묵적인 이유는 그곳을 지나면 반드시 I에 도달하기 때문이었는데, 대립관점과의 소통을 통해 그 점을 확인하게 되었다. 강석이는 이후의 경로를 고려해야 하는지의 여부에서 벗어나 새로운 설명방식을 채택하게 된다. 대립관점과의 논쟁과정에서 발견한 것이다.

동준 : A에서 I까지 간다는 것을 알면, B에서 D를 택할 확률과 E를 택할 확률이 과연 같아질까?
강석 : 그러니까 달라지면 어떻게 그걸 구분할 수 있지? 고를 확률을?
동준 : 경로를 아니까 E에서는 2가지가 있다 D

에서는 1가지가 있다. 그럼 E로 갈 확률이 2/3가 되지.

강석 : 왜요?

동준 : 경로를 안다고 치면 그렇죠.

강석 : 경로를 안다고 해서 도착했을 때의 확률이지 선택할 확률은 아니지.

동준 : A에서 I까지 만약 도착을 했고, 경로를 안다고 치면,

강석 : 경로를 알면 그렇겠죠. 그런데 난 경로를 몰라요.

여기서 논쟁의 핵심은 미리 경로를 알고 있는지의 여부이다. 강석이 역시 경로를 안다고 하면 2/3가 될 수 있음을 인정하지만, 자신의 입장은 경로를 모른다는 것임을 분명히 했다. 즉, 자신의 관점을 지키기 위해 가정을 점점 정교하게 만들어 가고 있다.

강석 : A에서 I로 간 것 중에서 E를 거친 것을 물어보는 것이 아니라 A에서 E를 거쳐서 I로 가는 것을 물어 본 거잖아.

지현 : 전체 경우가 분모인거야? 아니면 A가 I까지 간 것이 분모인거야?

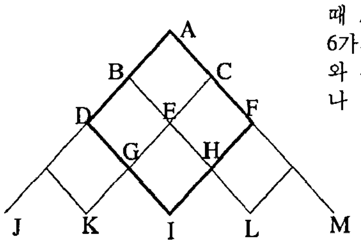
강석 : 도달하려고 할 때지, 도달 했다는 것이 아니야.

또 한 번, 강석이는 자신의 관점을 지키기 위해 문제 상황을 자신의 관점에 맞게 해석하였다. 강석이는 A에서 I로 도달하려는 과정에서 각 갈림길에서 선택이 무작위로 이루어지는 상황을 문제의 조건으로 해석하였다. 즉, 강석이는 문제가 모호성을 띠지 않도록 문제의 조건을 점점 추가해나가는 것이다. 이러한 방식으로 기존의 2/3 관점과의 차이를 명시적으로 밝혀나가는 것이다. 자신의 관점에 맞게 문제의 조건을 지속적으로 수정시켜 나가고 있다. 다시 말해, 각 경로를 '전혀 모르는 상태'에서 각 갈림길마다 두 길을 선택할 '확률이 동일'할 때, A에서 최단거리로 I까지 '도달하려고' 할 때, A에서 E를 거쳐 I에 도착할 확률은 1/2라는 것이 논쟁을 거치면서 강화된 강석이의 관점이다.

3. 두 관점을 통합하는 새로운 관점의 등장으로 모호성 해소

지현과 동준은 대립관점을 인정하지만 앞서의 학생들과 다르게 어느 한 관점을 선택하지 않았다. 대립관점의 수용이 곧 기존관점의 폐기를 뜻하지 않는다는 점에서 모호성이 다시 한 번 강조될 필요가 있다. 지현이는 두 관점 모두 합리적이라고 판단하고 두 관점을 모두 포괄하려고 노력하였다.

지현 : 전 싸우자는 것이 아니라 타협점을 찾으려구요. 아까는 경로가 한정되어 있었잖아요. 그런데 만약에 길이 무한하게 펼쳐져 있다고 생각하면요. 모든 갈림길에서 선택할 확률이 1/2이 되잖아요. 경로 개수를 세어보면 이렇게 되잖아요. 제가 물어보고 싶은 건 이 상태에서 E를 지나는 확률을 물어보면 분모가 16이어야 해요? 6이 되어야 해요? [...] 안 빼면 1/2이고 빼면 2/3 잖아요.[7] 그 차이에요. 제가 생각



7) 지현이는 왼쪽 그림처럼 D, F 지점 및 G ,H 지점에 경로를 추가하였다. 이때 A에서 최단경로를 거쳐 J,K,I,L,M 에 도착하는 경우의 수는 1가지, 4가지, 6가지, 4가지, 1가지 이다. 원래의 문제상황은 최단경로를 이미 알고 있을 때와 각 갈림길마다 선택할 때에 따라 각 경로를 선택할 확률이 다르다. 그러나 이렇게 확장된 상황에서 모든 경우의 수는 16가지이고 각 경로를 선택할 확률은 모두 동일하다. 이러한 상황에서 A에서 I에 도착할 경우는 6가지이고 이 중에서 E를 거치는 경우는 4가지 이므로 확률은 2/3이다. 지현이는 이 경우를 가리켜 ''(전체 경우의 수에서 J,K,L,M에 도착하는 것을) 빼면 2/3" 라고 말한 것이다. 그리고 전체 경우의 수 16가지 가운데 E를 거치는 경우가 8가지인데 이 경우를 가리켜 "안 빼면 1/2"이라고 하였다.

> 한 차이가 뭐냐하면, 이게 주어진 길이 한정되어 있었잖아요. 처음에 주어진 문제 자체에서는. 그러니까 D점을 선택했을 경우에는 길이 하나밖에 없어요. 그런데 문제를 조금 다르게 생각하면 I로 가는데 선택할 수 있는 경로가 모두 1/2이라면 2/3이구요. 그런데 그 길 하나에 대해 선택할 수 있는 확률이 다르잖아요. D에서는 선택할 수 있는 경우가 하나잖아요. 여기서는 D에서도 갈 수 있는 길을 하나 더 열어준 것이잖아요. 이게 그 차이인 것 같아요. 한 지점에서 다른 경로를 선택할 수 있는 확률이 모든 지점에서 동일하지 않으니까 지금 답에서 차이가 생긴 것 같아요. 그러니까 그것만 좀 확실하게 집고 넘어가면..

지현이는 어느 하나를 선택하기 보다는 두 관점의 차이를 설명하는 데에 중점을 두었다. 문제 상황의 어떠한 특징으로 인해 두 관점이 서로 대립하게 되었는지를 설명하려고 했다. ABDGI 경로는 2번의 선택을 포함하고 ABEGI는 3번의 선택을 포함한다. 모든 경로가 동일한 선택 조건을 가지지 않는다는 점에 초점을 두고 경로를 일반화시켰다. 모든 경로가 동일한 선택조건을 가지도록 즉, 경우의 수를 구하는 방식이나 갈림길에서 선택하는 방식 모두가 동일한 답을 산출하는 상황을 제시하였다. 지현이는 두 관점의 차이를 설명하기 위해 상황을 확장시켰고 동준이 역시 지현이의 아이디어를 이용하여 두 관점을 설명하는 모습을 보였으며, 계속해서 두 관점을 모두 설명할 수 있는 기준이나 상황을 찾으려고 노력하였다.

> 동준 : 내 생각엔 만약에 I에 도달하지 않을 수도 있어. 그러면 강석이가 맞아. 그런데 만약에 I에 도달했다고 하면 범영이가 맞지. 만약에 옆으로도 경로가 더 있다고 하면 I에 도달했을 때 그 확률은 범영이가 맞지.

앞서 음수의 로그에 대한 논쟁에서 Euler가 새로운 관점에서 Leibniz와 Bernoulli의 주장 일부를 인정하였듯이, 동준이와 지현이는 대립하는 주장 모두를 설명할 수 있는 새로운 관점이나 맥락을 도입하고 있다. 지현이는 경로를 확장시켜서 갈등을 해소하려고 했고, 동준이는 최단거리로 도달한다는 조건을 구분하여 갈등을 해소하려고 했다. 두 관점을 모두 설명할 수 있도록 문제를 재구성하거나 확장하였다.

Ⅴ. 결론 및 제언

영재아들을 대상으로 한 수업에서 모호성을 적극적으로 강조하였을 때, 영재아들이 모호성에 어떻게 대처하는지, 모호성을 해소하기 위해 어떠한 방식을 선택하는지, 구체적으로 모호성이 이들의 수학적 정당화와 관점전환 활동에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보았다. 본 연구결과로부터 다음과 같은 교육적 시사점을 확인하였다.

모호성은 영재아들의 호기심을 자극했으며, 활발한 논쟁을 불러일으켰다. 일상적인 수업에서 학생들은 교사가 참이라고 주장하는 정의, 정리, 증명을 수동적으로 듣는 입장이다. 이러한 상황에서 수학적 논쟁을 경험하기는 쉽지 않다. 수학적 논쟁은 학생들이 수학적 추측, 명제, 증명과 같은 수학적 활동의 주체가 될 수 있는 기회가 된다. 수업과정에서 학생들은 '이게 왜 틀린지 말해봐', '내 가정이 맞을 수도 있잖아' '그건 내가 가정한 것과 맞지 않아'라고 말하면서 능동적으로 수학적 논쟁에 참여하고 있었다. Legrand(2001)에 따르면, 이러한 수학적 논쟁에서 자신이 옳다는 것을 증명한 학생만 지식을 얻는 것이 아니다. 다른 사람의 확신을 명확히 밝히는 과정을 통해 학급 전체가 상황을 깊이 있게 이해하게 된다. 실제로 학생들은 논쟁을 통

해 대립하는 관점이 일으킨 모호성을 깊이 있게 이해하고 이를 해소하기 위해 수학적인 정당화를 시도하였다. 이러한 학생들의 수학적 활동이 수학사에 확인한 수학자들의 모호성 해소방식과 비슷하다는 점에 주목할 필요가 있다.

우선 영재아들이 모호성에 대처하는 방식의 공통점은 다음과 같다. 영재아들은 대립관점의 등장으로 인해 모호성을 인식하면서 두 관점 가운데 어느 하나를 선택하기 위해 문제의 가정에 주목하고 이를 수학적 활동의 대상으로 삼았다. 학생들은 계속해서 상대방에게 수학적 정당화를 요구하였으며, 특히 결과는 2/3와 1/2로 분명하게 드러난 상황에서 정당화의 결과보다는 시작 즉, 어떠한 가정에서 정당화를 시작하는지에 초점을 두었다. 따라서 상대방을 설득하고 자신의 논거를 정당화하기 위해 계속해서 가정을 정련하고 가정을 뒷받침할 수 있는 여러 가지 유추를 동원하였다. 두 결과가 대립하는 상황에서 학생들은 한 가지 정당화 방식에 만족하지 못했다. 상대방을 설득하고 상대의 반박에 맞서기 위해 계속해서 더 설득력 있고 강력한 정당화를 모색하였다. 이러한 활동은 학생들이 유연한 관점전환에 익숙해지는 계기가 되었다.

둘째, 위와 같은 공통점 속에서 영재아들은 서로 다른 차이를 보여주었다. 여러 가지 수학적 정당화가 이루어지면서 자신의 관점을 바꾸거나 일관되게 고수한 학생이 있었다. 또한 새로운 관점을 도입하여 두 관점의 차이를 설명하고 통합하려는 시도도 보였다. 두 가지 유형의 대처방식 모두 당연한 것을 의문시하고 수학적 정당화를 강력하게 요구하였다. 모호성이 야기하는 서로 대립하는 관점을 비교하면서 학생들은 유연한 관점전환을 경험하고 이들 통해 자신의 수학적 지식을 검증하고 강화하는 기회를 가질 수 있었다. 따라서 모호성을 활용하는 수업은 어느 한 관점으로 논쟁을 몰아가기 보다는 두 관점이 최대한 대립하도록 자극할 필요가 있다. 모호성에 의한 대립하는 관점의 존재가 학생들의 시야를 넓혀주는 기회가 되어야 한다.

본 연구에 참여한 영재아들은 소속 영재센터에서 다시 한 번 검증을 통과한 학생들로 이미 3년간의 영재교육을 받으면서 새로운 형식의 수업에 많이 노출이 되었고 따라서 그 만큼 수학적 사고가 유연하고 새로운 내용에 거부감이 없는 학생들이다. 이번 연구에 참여한 영재아들은 모호성이 야기한 정신적인 불균형을 해소하기 위해 의미 있는 수학적 활동을 수행하는 모습을 보여주었으나 일반학생들도 이러한 모습을 보여줄 것인지는 후속연구가 필요하다. 후속연구로부터 본 연구가 제시한 영재아들의 방식과 다른 일반학생의 독특한 대처방식이 밝혀진다면, 이는 영재아들과 일반학생의 차이를 설명하고 나아가 영재아를 판단하는 또 다른 기준이 될 수도 있다. 본 연구의 목표가 그러한 차이를 밝히는 데 있지는 않지만, 영재아들의 대처방식을 분석한 결과 다음과 같은 예상은 할 수 있다. 영재아와 일반학생의 선행지식 및 수학적 능력의 차이가 그들의 대처방식에 영향을 미치겠지만 본 연구는 이에 덧붙여 수학적 논쟁 경험의 중요성을 지적하고자 한다. 모호성을 경험하기 위해선 논쟁이 활발하게 일어나고 그 과정에서 상대의 관점을 수용하고 자신의 관점으로 재해석하는 활동이 필요하므로, 일반학생을 대상으로 이러한 모호성을 강조한 수업을 하기 위해선 사전에 수학적 논쟁에 익숙해질 필요가 있다. 실제로 동일한 주제에 대해 중학교 1학년 영재아들을 대상으로 한 수업에서 본 연구결과와 같은 활발한 논의가 이루어지지는 않았다. 이들과 본 연구결과에 제시한 학생들의 가장 큰 차이는 아직 수학적

논쟁 즉, 자신의 의견을 주장하고 상대의견을 반박하는 데 익숙하지 않다는 점이었다. 물론, 본 연구결과에 의하면, 모호성을 적극적으로 활용한 수업이 학생들을 수학적 논쟁에 익숙해지도록 장려하는 역할을 한다고 볼 수 있다.

참고문헌

이경화(1996) **확률개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위 논문.

이정연(2004) **조건부확률 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위 논문.

Grosholz, E. (2005) Constructive Ambiguity in Mathematical Reasoning. In C. Cellucci & D. Gillies (Eds.), *Mathematical Reasoning and Heuristics* (pp. 1-23). London: King's College Publications.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Legrand, M. (2001). Scientific Debate in Mathematics Courses. In Derek Holton (Eds.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study* (pp. 127-135). Springer.

Movshovitz-Hadar, & Kleiner (2009). Intellectual Courage and Mathematical Creativity. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp.31-50). Rotterdam: Sense Publishers.

Euler (1749). *On the controversy between Messrs Leibniz and John Bernoulli concerning logarithms of negative and imaginary numbers.* Translated by Stacy Langton. (http://home.sandiego.edu/~langton/elog.pdf).

Thurston, W. (1994) On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*, 161-177.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think: Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Gray, E. & Tall, D. (1994) Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Jahnke, H. N. (2003). A *History of Analysis*. Providence, RI: American Mathematical Society.

How the Mathematically Gifted Cope with Ambiguity

Lee, Dong Hwan (Graduate School of Seoul National University)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

The purpose of this study is to examine into how the mathematically gifted cope with ambiguity when they are encountered to learn via resolving ambiguity. In this study 6 gifted students are asked to resolve the ambiguity. Participant in this study appeared to experience the need of mathematical justification and the flexible change of perspective. The gifted have constructed unified mathematical knowledge by making a relation between two incompatible perspective in the process of resolving the ambiguity. We suggest that dealing with ambiguity in mathematics class can be a good opportunity for enhancing the gifted student mathematics education.

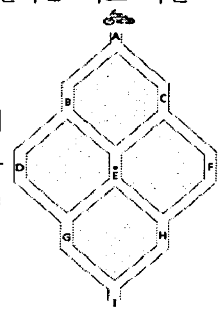
* key words : The mathematically gifted(영재아), ambiguity(모호성), probability(확률)

논문접수 : 2010. 2. 14
논문수정 : 2010. 3. 8
심사완료 : 2010. 3. 16

<부록> 실험에 사용한 과제

문항 1. 오른쪽 그림은 육각형 모양의 주거 단지와 그 사이에 만들어진 도로망을 나타낸 것이다. 자전거를 타고 A 지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 한다.

(1) 자전거를 타고 A 지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하는 서로 다른 방법은 모두 몇 가지인가?



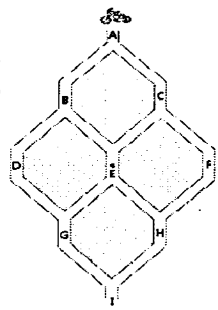
(2) 최단 거리로 이동하여 A 지점를 출발하여 E지점을 거쳐 I지점에 도달하는 방법은 모두 몇 가지인가?

(3) (1)과 (2)의 결과를 바탕으로 A 지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 할 때, E지점을 지나게 될 확률을 구하고, 그 이유를 설명하여라.

문항 2. 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A 지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 할 때, 다음 물음에 대하여 생각해보자.

(1) A 지점에서 B지점으로 이동할 확률과 A 지점에서 C지점으로 이동할 확률이 서로 같다고 말할 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

(2) 처음 갈림길에서 A에서 B지점으로 이동하였다고 할 때, B지점에서 D지점으로 이동할 확률과, B지점에서 E 지점으로 이동할 확률이 서로 같다고 말할 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.



(3) (1)과 (2)의 결과를 바탕으로 A 지점을 출발하여 최단 거리로 이동하여 I지점에 도달하려고 할 때, E지점을 지나게 될 확률을 구하고, 그 이유를 설명하여라.

문항 3. 문항1에서 구한 E지점을 지날 확률과 문항2에서 구한 E지점을 지날 확률은 서로 같은가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해 보자. 만약 서로 다른 값이 나타났다면, 어느 방법으로 구한 것이 더 타당할지 판단하고, 그 이유를 설명하여라.