

# 복소극점을 갖는 선형시불변 단일입출력 시스템의 영점과 계단응답 특성

## Zeros and Step Response Characteristics in LTI SISO Systems with Complex Poles

이상용\*

(Sang-Yong Lee)

**Abstract:** This paper deals with the relationship between zeros and step response of the second and third order LTI (Linear Time Invariant) SISO (Single-Input and Single-Output) systems with complex poles. Although it has been known that the maximum number of local extrema is less than the number of zeros in the system with only real poles[8], some cases with complex poles are shown in this paper to have many local extrema. This paper proposes monotone nondecreasing conditions and describes the relationship between the transient response and the number of local extrema in step response with each region of zeros.

**Keywords:** SISO system, complex zero, extrema, monotone nondecreasing

### I. 서론

선형시불변 시스템의 응답은 극점과 관계된 시정수를 갖는 지수합수들의 선형조합으로 나타나기 때문에 극점의 위치를 결정하는 것은 제어시스템 설계자에게 매우 중요한 문제이다. 반면에 시스템의 영점은 우반면에 있으면 하향초과(undershoot)를 유발하고 좌반면에 존재하되 주극점보다 우측에 있으면 상향초과(overshoot)를 유발하는 등 과도응답(transient response)에 큰 영향을 주지만 어떤 형태의 되먹임을 통해서도 위치를 변화시킬 수 없기 때문에 제어성능이 개선되지 않거나 제한되는 등의 어려움이 따른다[1-3]. 따라서 제어시스템 설계과정에서 영점에 의한 시스템 성능과 응답특성을 사전에 파악하는 것은 매우 중요하며, 이 특성이 만족스럽지 못한 경우에는 시스템을 재설계하거나 교체해야 한다.

1980년대 이후 견실제어기법이 발전하면서 영점에 의한 주파수영역에서의 제약조건을 다른 연구결과들은 있으나 시간영역에서의 과도응답성능 제약조건을 상세히 다른 문헌은 많지 않은 실정이다. [1]에서 Kwon 등은 2차형 시스템의 응답특성을 모두 정리하였다. 그리고 [4]에서 El-khoury 등은 실극·영점을 갖는 시스템에 존재하는 국소극대·극소점(local extrema)[4,6] 개수의 상·하한을 정리하였다. [5]에서 Iinoya 등은 하향초과가 발생하는 시스템의 특성을 정리하고 있는데 이 특성의 공통적인 특징은 이득 방향이 다른 두 가지 동특성의 합으로 표현된 것이다. 이에 착안하여 [6]에서는 시스템을 1차 시스템들의 덧셈형으로 정리하여 3차 시스템에 존재하는 영점의 과도응답특성을 복소영점을 갖는 경우를 포함하여 정리했으나 극점을 실수로 한정시키는 제약이 있다.

주어진 영점에 대해 극점의 위치를 설계하는 문제에서 복소극점을 갖는 시스템의 경우에 [6]의 결과를 적용하려면 되먹임에 의해 복소극점을 실극점으로 보내야만 한다. 그러나 이것은 감쇠비를 1보다 크게 만드는 것으로서 대부분의 경우 제어비용의 과도한 증가를 의미한다. 따라서 제어기설계시 감쇠비를 1보다 작은 값으로 제한하는, 즉 복소극점을 사용할 경우에는 [6]의 결과를 활용할 수 없다. 그러므로 이 논문에서는 실극점에 한정된 [6]의 결과를 확장하여 복소극점의 경우 영점과 계단응답특성의 관계를 정리하여 제시하고자 한다. 다만, 일반 고차시스템을 대상으로 하기는 어렵기 때문에 3차 시스템으로 한정할 것이다. 고차시스템의 경우에는 공식으로 표현되는 명시적 결과를 얻지는 못하지만 이 논문의 결과를 활용하여 수치적 해법으로 풀어낼 수 있다.

이 논문에서는 복소극점을 갖는 3차 시스템을 다루기에 앞서 II 장에서 복소극점을 갖는 2차 시스템의 계단응답에 존재하는 국소극대·극소점에 대해 다룬다. 그리고 이를 포함하는 3차 시스템의 국소극대·극소점들에 대한 특성은 III 장에서 다룬다. IV 장에서는 계단응답에 유한한 개수의 국소극대·극소점을 갖는 경우와 단조증가계단응답(monotone nondecreasing step response) 조건에 대해 다루고 V 장에서 결론을 정리한다.

### II. 복소극점을 갖는 2차 시스템의 계단응답

기존의 2차 시스템 표현법은 식 (1)과 같이 고유진동수 ( $\omega_n$ )와 감쇠율( $\zeta$ )을 사용하는 것이 일반적이다.

$$G(s) = \frac{-\frac{\omega_n^2}{b}(s-b)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

이때  $\zeta < 1$ 인 경우 시스템의 극점은 허수성분을 갖는다. 이

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2009. 10. 26., 수정: 2009. 11. 27., 채택확정: 2009. 1. 19.

이상용: 인하대학교 전기공학과(imugi13@naver.com)

논문에서는 극 · 영점으로부터 결과를 도출하기 위해 2차 시스템의 전달함수를 식 (2)와 같이 두 개의 1차 시스템의 합으로 표현하기로 한다.

$$G(s) = \frac{a}{-\frac{1}{p}s + 1} + \frac{\bar{a}}{-\frac{1}{\bar{p}}s + 1} \quad (2)$$

여기에서  $a = \alpha_a + j\beta_a$ ,  $\bar{a} = \alpha_a - j\beta_a$ ,  $p = \alpha_p + j\beta_p$ ,  $\bar{p} = \alpha_p - j\beta_p$  이며  $\beta_p$ 는 일관성을 위해 항상 0보다 크다고 가정하면 다음의 보조정리를 이끌어낼 수 있다.

보조정리 1: 공액복소극점을 갖는 안정한 2차 시스템은 무수히 많은 국소극대 · 극소점을 갖는다.

해당 시스템의 시간응답에 나타나는 지수감쇠 정현파 성분에 의한 것임을 직관적으로 알 수 있으므로 증명은 생략한다. 만약 첫 번째 및 두 번째로 나타나는 극대·극소점의 시점을  $t_1$ ,  $t_2$ 라고 하면, 최소위상 시스템의 경우  $y(t_1)$ 이 상향초파이고, 비최소위상 시스템의 경우  $y(t_1)$ 은 하향초파,  $y(t_2)$ 는 상향초파이다. 그러므로 복소극점을 갖는 2차 시스템은 항상 상향초파를 갖는다.

### III. 복소극점을 갖는 3차 시스템의 계단응답

안정한 영역에  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\bar{p}_2$ 의 극점을 갖는 3차 시스템의 전달함수를 덧셈형 등가모델로 나타내면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s) + G_2(s) \\ &= \frac{a_1}{-\frac{1}{p_1}s + 1} + \frac{a_2}{-\frac{1}{p_2}s + 1} + \frac{\bar{a}_2}{-\frac{1}{\bar{p}_2}s + 1} \quad (3) \\ &= \frac{a_1}{-\frac{1}{p_1}s + 1} + \frac{-2(\alpha_a\alpha_p - \beta_a\beta_p)s + 2\alpha_a(\alpha_p^2 + \beta_p^2)}{(s - \alpha_p)^2 + \beta_p^2} \end{aligned}$$

여기서,  $a_2 = \alpha_a + j\beta_a$ ,  $\bar{a}_2 = \alpha_a - j\beta_a$ ,  $p_2 = \alpha_p + j\beta_p$ ,  $\bar{p}_2 = \alpha_p - j\beta_p$ 이고,  $a_1$ ,  $2\alpha_a$ 는 각각  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ 의 직류이득이다. 이것을 상대차수가 1인 3차 전달함수 모델로 표현하면 다음과 같이 구해진다.

$$G(s) = \frac{as^2 + bs + c}{\Delta} \quad (4)$$

여기서,

$$a = \frac{a_1 p_1 + 2(\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p)}{p_1 (\alpha_p^2 + \beta_p^2)} \quad (5a)$$

$$b = -\frac{2\alpha_a a_1 p_1 + 2p_1(\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p) + 2\alpha_a(\alpha_p^2 + \beta_p^2)}{p_1(\alpha_p^2 + \beta_p^2)} \quad (5b)$$

$$c = a_1 + 2\alpha_a \quad (5c)$$

$$\Delta = -\frac{1}{p_1(\alpha_p^2 + \beta_p^2)} s^3 + \frac{p_1 + 2\alpha_p}{p_1(\alpha_p^2 + \beta_p^2)} s^2 \quad (6)$$

$$-\frac{2\alpha_p p_1 + (\alpha_p^2 + \beta_p^2)}{p_1(\alpha_p^2 + \beta_p^2)} s + 1$$

이고 편의상 전체 시스템의 직류이득은 1이라고 가정하기 위해  $c=1$ 로 놓는다.

보조정리 2: 식 (3)과 같은 안정한 3차 시스템에 대해서 아래 부등식을 만족하는 경우 A형 하향초파(A-type under-shoot)[4,6]가 존재한다.

$$a_1 p_1 + 2(\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p) > 0$$

증명: [7]의 결과에 식 (5a)를 대입함으로써 증명되며 우반면에 홀수개의 영점을 갖는 조건과 동일하다. ■

정리 1: 복소극점을 포함하는 식 (3)과 같은 3차 시스템에 대해서 다음을 만족한다.

1) 복소극점이 실극점보다 우측에 존재하면 계단응답에 무수히 많은 국소극대 · 극소점이 존재한다.

2) 복소극점이 실극점보다 좌측에 존재하면 계단응답에 유한개수의 국소극대 · 극소점이 존재한다.

증명: 식 (3)으로 표시되는 3차 시스템은 보조정리 1의 공액복소극점을 갖는 2차 시스템과 실극점을 갖는 1차 시스템의 덧셈형 시스템으로 분해되어 계단응답은 다음과 같다.

$$y_s(t) = (a_1 + 2\alpha_a)u(t) - a_1 e^{p_1 t} - 2\alpha_a \sqrt{1 + \frac{\beta_a^2}{\alpha_a^2}} e^{\alpha_a t} \cos \left( \beta_p t + \tan^{-1} \frac{\beta_a}{\alpha_a} \right) \quad (7)$$

응답에 국소극대극소점의 존재유무를 판별하기 위해 식 (7)을 미분하여

$$\dot{y}_s(t) = -a_1 p_1 e^{p_1 t} + 2\text{sign}(-\alpha_a \alpha_p + \beta_a \beta_p) e^{\alpha_a t} \sqrt{(\alpha_a^2 + \beta_a^2)(\alpha_p^2 + \beta_p^2)} \cos \left( \beta_p t + \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} \right) \quad (8)$$

$\dot{y}_s(t) = 0$ 으로 놓고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{sign}(-\alpha_a \alpha_p + \beta_a \beta_p) \sqrt{(\alpha_a^2 + \beta_a^2)(\alpha_p^2 + \beta_p^2)} \\ \cdot \cos \left( \beta_p t + \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} \right) = \frac{a_1 p_1}{2} e^{(p_1 - \alpha_p)t} \end{aligned} \quad (9)$$

이 식의 좌변은 진폭이  $\sqrt{(\alpha_a^2 + \beta_a^2)(\alpha_p^2 + \beta_p^2)}$ 인 정현파 함수이고, 우변은 시정수가  $(p_1 - \alpha_p)^{-1}$ 인 지수함수이다. 그런데 시정수가 음수이면 우변의 함수는 0으로 수렴하면서 무수히 많은 교차점이 발생하고, 이 교차점마다 국소극대 · 극소점들이 발생하므로 1이 증명된다.

2)의 경우는 식 (9)의 우항이 발산하는 지수함수이다. 그러므로 계단응답의 국소극대 · 극소점은 지수함수항이 정현파함수항의 진폭보다 작은 동안에만 발생하며 그 시점 이후의 응답은 단조증가 또는 감소한다. ■

다음 예제를 통해 정리 1의 1)에 해당하는 무한히 많은 국소극대·극소점을 유발하는 예를 살펴보기로 한다.

예제 1:  $a_1 = 4$ ,  $p_1 = -4$ ,  $\alpha_a = 1$ ,  $\beta_a = 1$ ,  $\alpha_p = -1$ ,  $\beta_p = 4$ 인 시스템의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{4}{-0.25s + 1} + \frac{10s + 34}{(s - 1)^2 + 4^2}$$

이 시스템의 계단응답과 단조증가판별그림은 그림 1과

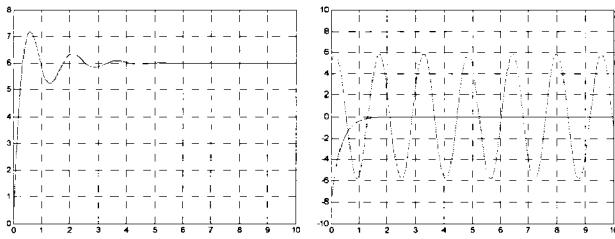


그림 1. 계단응답과 단조증가 판별 그래프.

Fig. 1. Step response and discriminant graph of extrema.

같으며 단조증가 판별그림에서 지수함수와 삼각함수의 교차점마다 계단응답에 국소극대·극소점들이 나타난다.  $\square$

이와 같이  $p_1 < \alpha_p$ 인 경우는 무수히 많은 국소극대·극소점을 갖는다. 반대로  $\alpha_p < p_1$ 인 경우 유한한 국소극대·극소점을 가지며 단조증가응답여부를 판별하는 것은 이 경우에 의미를 갖는다.

#### IV. 국소극대 · 극소점(local extrema)

이 장에서는 3차 시스템에서 실영점을 갖는 경우와 공액복소영점을 갖는 경우를 나누어 단조증가응답을 갖기 위한 필요충분조건에 대해 정리한다.

##### 1. 실영점의 경우

식 (3)으로 표현되는 시스템이 실영점을 갖는 경우는 그림 2와 같이 크게 여섯 가지 경우로 나누어 생각해볼 수 있다.

그림 2는 실영점을 갖는 식 (3)의 시스템에 대해 존재할 수 있는 영점배치의 모든 경우를 나타낸다. 그림 2(b)~(f)의 경우 단조증가계단응답을 가질 수 없으므로, 여기서는 (a)의 경우 부등식 (10)을 만족할 때에만 가능함을 보일 것이다.

정리 2: 식 (3)으로 표현되고 실극점이 복소극점보다 우측에 존재하는 3차 시스템이 단조증가계단응답을 갖기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2} \cdot \frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}} < \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_1 - \bar{p}_2) + \angle(z_2 - \bar{p}_2)\} \quad (10)$$

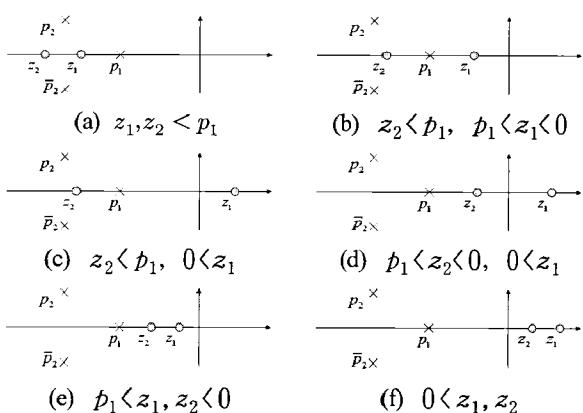


그림 2. 실영점을 갖는 경우.

Fig. 2. Cases of the position of real zeros.

증명: 시스템이 단조증가응답을 갖기 위해서는 식 (9)의 해가 존재하지 않아야 하는데 이를 위해서는 아래 함수가 0을 지나지 않아야 한다.

$$\tilde{y}(t) = \ln \sqrt{\frac{4(\alpha_a^2 + \beta_a^2)(\alpha_p^2 + \beta_p^2)}{a_1^2 p_1^2}} + \ln \cos \left( \beta_p t + \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} - k_\pi \right) - (p_1 - \alpha_p)t$$

이때  $k_\pi$ 는  $\text{sign}(-\alpha_a \alpha_p + \beta_a \beta_p)$ 가 1일 때 0이고 -1일 때  $\pi$ 이다. 이것을 미분하면

$$\frac{d}{dt} \tilde{y}(t) = -\beta_p \tan \left( \beta_p t + \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} - k_\pi \right) - (p_1 - \alpha_p)$$

이고 이 값이 0이 되는 시간은

$$t_c = \frac{k_\pi - \tan^{-1} \frac{p_1 - \alpha_p}{\beta_p} - \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p}}{\beta_p}$$

이다. 이것을 식 (9)에 대입하면 다음의 부등식을 얻는다.

$$\ln \sqrt{\frac{4(\alpha_a^2 + \beta_a^2)(\alpha_p^2 + \beta_p^2) \beta_p^2}{a_1^2 p_1^2 \{(p_1 - \alpha_p)^2 + \beta_p^2\}}} < \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \quad (11)$$

$$\left\{ k_\pi - \tan^{-1} \frac{p_1 - \alpha_p}{\beta_p} - \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} \right\}$$

식 (3)의 분자계수와 영점의 관계는 다음과 같다.

$$a_1 = \frac{p_2 \bar{p}_2 (p_1 - z_1)(p_1 - z_2)}{z_1 z_2 (p_1 - p_2)(p_1 - \bar{p}_2)} \quad (12a)$$

$$a_2 = \frac{p_1 \bar{p}_2 (p_2 - z_1)(p_2 - z_2)}{z_1 z_2 (p_2 - p_1)(p_2 - \bar{p}_2)} \quad (12b)$$

$$\bar{a}_2 = \frac{p_1 p_2 (\bar{p}_2 - z_1)(\bar{p}_2 - z_2)}{z_1 z_2 (\bar{p}_2 - p_1)(\bar{p}_2 - p_2)} \quad (12c)$$

그리고 정의에 의해

$$\alpha_a = \frac{a_2 + \bar{a}_2}{2}, \beta_a = \frac{a_2 - \bar{a}_2}{2j}, \alpha_p = \frac{p_2 + \bar{p}_2}{2}, \beta_p = \frac{p_2 - \bar{p}_2}{2j}$$

이고 이로부터

$$\alpha_a^2 + \beta_a^2 = \frac{a_2^2 + 2a_2 \bar{a}_2 + \bar{a}_2^2}{4} + \frac{a_2^2 - 2a_2 \bar{a}_2 + \bar{a}_2^2}{4j^2} = a_2 \bar{a}_2$$

의 관계를 얻을 수 있고, 같은 방법으로  $\alpha_p^2 + \beta_p^2 = p_2 \bar{p}_2$ 이다. 이 관계를 식 (11)에 대입하고 정리하면 부등식 (10)을 얻는다. 우선 식 (11) 좌변의 근호 안을 정리하면

$$\frac{4a_2 \bar{a}_2 p_2 \bar{p}_2 \beta_p^2}{a_1^2 p_1^2 \{(p_1 - \alpha_p)^2 + \beta_p^2\}} = \frac{a_2 \bar{a}_2 p_2 \bar{p}_2 (p_2 - \bar{p}_2)(\bar{p}_2 - p_2)}{a_1^2 p_1^2 (p_1 - p_2)(p_1 - \bar{p}_2)}$$

$$= \frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2} \cdot \frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}$$

$$= \frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2} \cdot \frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}$$

이므로 식 (10)과 식 (11)의 좌변은 동일하다. 이제 식 (11)의 우변의 정리를 위해 식 (11)의 마지막 항을 살펴보면

$$\tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} = -\tan^{-1} \frac{\operatorname{Re} Q}{\operatorname{Im} Q}$$

이때

$$Q = (p_2 - z_1)(p_2 - z_2)(\bar{p}_2 - p_1) \\ = (\alpha_p + z_1 + j\beta_p)(\alpha_p - z_2 + j\beta_p)(\alpha_p - p_1 - j\beta_p)$$

이다. 이 관계를 대입하면

$$\tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} = \\ \tan^{-1} \frac{\alpha_p - z_1}{\beta_p} + \tan^{-1} \frac{\alpha_p - z_2}{\beta_p} - \tan^{-1} \frac{\alpha_p - p_1}{\beta_p}$$

이것을 다시 식 (11) 우변의 우항에 대입하고 정리하면

$$k_\pi - \tan^{-1} \frac{p_1 - \alpha_p}{\beta_p} - \tan^{-1} \frac{\alpha_a \beta_p + \alpha_p \beta_a}{\alpha_a \alpha_p - \beta_a \beta_p} = \\ = k_\pi + \tan^{-1} \frac{\alpha_p - z_1}{\beta_p} + \tan^{-1} \frac{\alpha_p - z_2}{\beta_p} \\ = \angle(z_1 - \alpha_p + j\beta_p) + \angle(z_2 - \alpha_p + j\beta_p)$$

이다. 위의 전개에서  $\tan^{-1}$  함수의 치역은  $-\pi/2$ 에서부터  $\pi/2$  까지이고  $\angle$  함수의 치역은  $-\pi$ 에서부터  $\pi$ 까지인데 이 관계와  $k_\pi$ 의 정의를 감안하면 윗 식의 마지막 등식이 성립함을 확인할 수 있으며, 이로 인해 식 (11)의 우변과 식 (10)의 우변이 동일함을 확인할 수 있다. 이로써 시간의 함수로 표현한 필요충분조건 수식을 극 · 영점의 함수로 표현한 필요충분조건 수식으로 변환하는 증명이 완료된다. ■

정리 2에 의하면, 3차 시스템에서 복소극점을 갖는 경우 극점의 허수부에 의한 진동성분이 나타나지만 단조증가계 단응답을 갖는 극·영점 배치가 존재하는데, 이는 기준의 연구에서 파악하지 못한 결과로서 학술적 의미를 지니고 있다. 여기서 정리 2로부터 좀더 실제 응용에 용이한 식을 아래와 같이 이끌어낼 수 있다.

따름정리 1: 정리 2에서 두 영점이 실수이고,  $z_2 < z_1$ 이라면 다음을 만족한다.

1) 단조증가계단응답을 갖기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2}} \leq \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_1 - \bar{p}_2)\} \quad (13)$$

2) 극소극대 · 극소점을 갖기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}} \geq \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_2 - \bar{p}_2)\} \quad (14)$$

증명:  $z_1$ 과  $z_2$ 에 대한 항을 분리하여 식 (10)을 표현하면 다음과 같다.

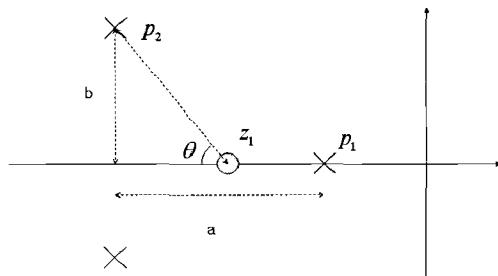


그림 3. 단조증가판별 극영점도.

Fig. 3. Nondecreasing discriminant pole-zero map.

$$\ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2}} + \ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}} < \\ \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_1 - \bar{p}_2)\} + \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_2 - \bar{p}_2)\} \quad (15)$$

그런데  $z_2 < z_1$  이므로 식 (13)을 만족하면 (15)도 만족하므로 단조증가응답을 갖는다. 마찬가지로 (14)를 만족하면 (15)를 만족할 수 없으므로 단조증가응답을 갖지 못한다. ■

식 (13)을 그림으로 간략히 표현하면 다음과 같다.

이 그림에서  $a = p_1 - \alpha_p$ ,  $b = \beta_p$ ,  $\theta = \angle(z_1 - \bar{p}_2)$  이고 간략화한 계수들을 활용해 식 (13)을 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{a}{b} \sin(\theta) - \cos(\theta) \geq \exp\left(-\frac{a}{b}\theta\right) \quad (16)$$

이 조건을 만족하는 영점은 실극점( $p_1$ )보다 좌측에 존재함을 뒤에 나오는 따름정리 2의 증명을 통해 확인할 수 있다. 따름정리 1의 1)은 충분조건으로서 이를 만족하지 못하더라도 정리 2를 만족함으로써 단조증가응답을 갖는 경우도 있지만, 식 (16)의 조건을 통해 단조증가 계단응답을 갖는 극·영점 위치의 기준을 잡을 수 있다. 이에 대한 활용을 예제를 통해 살펴보기로 한다.

예제 2:  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -4 + j4$ ,  $\bar{p}_2 = -4 - j4$ ,  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = -3$ 인 시스템의 계단응답은 그림 4(a)와 같다. 이 시스템은 정리 2의 부등식 (10)을 만족하지 못하며 계단응답에 두 개의 극소극대 · 극소점을 갖는다. 영점과 복소극점이 고정된 조건 하에서 식 (16)을 통해 단조증가응답을 갖기 위한 실극점 조건을 구하면  $-0.8009 < p_1 < 0$ 이다. 예를 들어  $p_1 = -0.8$ 인 경우 그림 4(b)와 같이 시스템은 단조증가응답을 갖는다. □

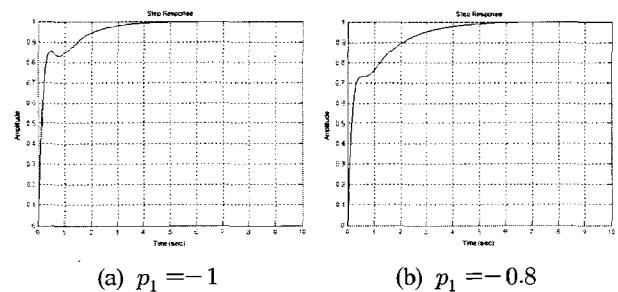


그림 4.  $p_1$ 에 따른 계단응답.

Fig. 4. Step response with  $p_1$ .

그림 2(b)~(f)는 명백하게 단조증가응답을 갖지 못하는 경우들이다. 이러한 경우에는 대신에 아래의 따름정리 2를 통해 각각 최소한 몇 개의 국소극대·극소점을 갖는지를 확인할 수 있다. 또한 상향초과 또는 하향초과를 갖는지에 대해서도 알아볼 수 있다.

따름정리 2: 정리 2에서  $p_1$ 보다 우측에 실영점이 존재하는 경우 다음을 만족한다.

1)  $p_1$ 보다 우측에 한 개의 실영점이 있을 경우 최소한 한 개의 국소극대·극소점이 존재하며 한 개만의 국소극대·극소점을 갖기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2} \cdot \frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}} < \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_1 - \bar{p}_2) + \angle(z_2 - \bar{p}_2) + \pi\} \quad (17)$$

2)  $p_1$ 보다 우측에 두 개의 실영점이 있을 경우 최소한 두 개의 국소극대·극소점이 존재하며 두 개만의 국소극대·극소점을 갖기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\ln \sqrt{\frac{(\alpha_p - z_1)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_1)^2} \cdot \frac{(\alpha_p - z_2)^2 + \beta_p^2}{(p_1 - z_2)^2}} < \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_1 - \bar{p}_2) + \angle(z_2 - \bar{p}_2) + 2\pi\} \quad (18)$$

증명: 1)에 해당하는 경우는 그림 2(b)와 (c)이다. 우선 (b)의 경우를 보이기 위해 식 (3)의 시스템을 살펴보자.  $G_2(s)$ 는 보조정리 1에 의해 무수히 많은 국소극대·극소점을 갖는데 이중 첫 번째 값의 시간을  $t_1$ 이라고 하자. 그러면  $t_1$ 에서의 임펄스응답은 다음과 같다.

$$g(t_1) = g_1(t_1) + g_2(t_1) = g_1(t_1) = a_1 e^{p_1 t_1}$$

$g_1(t)$ 은 식 (12)의 관계로부터  $a_1 < 0$ 이기 때문에 항상 0보다 작다. 그러므로  $g(t_x) = 0$ 을 만족하는 시간은 항상  $0 < t_x < t_1$ 임이 보여진다. 또한 보조정리 2에 의해 이 값은 하향초과일 수 없으므로 이 시스템은 최소한 한 개의 국소극대점을 갖는다. 더 이상의 국소극대·극소점을 갖는지 판별을 위한 시간은 진동성분의 반주기 후가 되며 이것을 수식으로 표현한 것이 식 (17)이다. 이제 그림 2(c)를 보이기 위해 모든 극점과 영점이  $z_1 + \epsilon$  만큼 원쪽으로 편향된  $\tilde{G}(s)$ 를 고려하자. 이 시스템은 (b)의 경우에 해당되므로 적어도 한 개의 국소극대·극소점을 갖는다. 그런데  $g(t_x) = e^{z_1 + \epsilon} \tilde{g}(t_x)$ 이다. 지수함수항은 항상 0이 아니므로  $\tilde{g}(t_x)$ 가 0이면  $g(t_x)$ 도 0이므로 이 시스템은 적어도 한 개의 국소극대·극소점을 갖는데, 우반면에 한 개의 영점을 가지므로 보조정리 2에 의해 하향초과를 갖는다.

2)는 그림 2에서 (d), (e), (f)에 해당한다. (d)를 먼저 증명하기 위해 편의상 아래의 등가시스템을 구성한다.

$$G(s) = \tilde{G}(s)(s-a) = k \frac{s+z_2}{(s+p_1)\{(s-\alpha_p)^2 + \beta_p^2\}} (s-a)$$

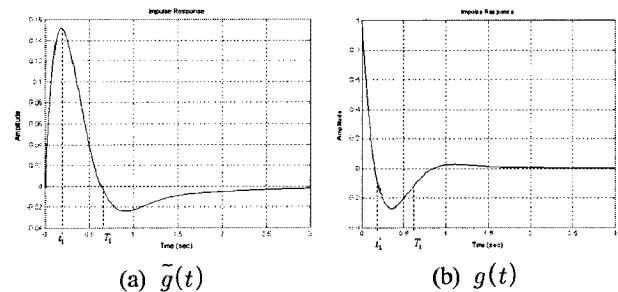


그림 5. 임펄스 응답.

Fig. 5. Impulse responses.

여기서  $k = -az_2/p_1(\alpha_p^2 + \beta_p^2)$ ,  $a = -z_1$ 이며, 이 식을 시간 영역 표현으로 바꾸면 다음과 같다.

$$g(t) = \dot{\tilde{g}}(t) - a\tilde{g}(t)$$

$\tilde{G}(s)$ 는 1)에 의해 적어도 한 개의 국소극대점을 갖는다. 이 국소극대점을 갖는 시간을  $T_1$ 이라고 하면 Rolle의 정리 [9, p. 168]에 의해  $\dot{\tilde{g}}(T_1) = 0$ 을 만족하는 점이 그림 5에서 와 같이  $0 < t_1' < T_1$ 에 존재한다. 즉,  $g(t_1') = -a\tilde{g}(t_1') < 0$ 이고 시작점정리에 의해  $g(\epsilon) > 0$ 이므로  $g(t)$ 는 0과  $t_1'$  사이에서 국소극대·극소점을 한 개 갖는다. 그리고  $g(T_1) < 0$ 이고 최종값정리에 의해  $g(t)$ 는 충분히 긴 시간 후에 양의 값을 가지므로  $t > T_1$ 에서 국소극대·극소점을 한 개 더 갖는다. 그러므로 그림 (d)의 시스템은 적어도 두 개의 국소극대·극소점을 가지며 보조정리 2에 의해 첫 번째 것은 A형 하향초과이고 두 번째 것은 상향초과이다. (e)와 (f)는 1)에서와 마찬가지로 (d)의 극영점을 각각  $\epsilon - z_1$  만큼 오른쪽으로,  $z_2 + \epsilon$  만큼 원쪽으로 편향시켜 (d)의 풀이에 적용하면 국소극대·극소점을 최소한 2개 존재함이 보여진다. 추가적인 국소극대·극소점의 판별여부는 그림 4(b)와 같은 그림을 통해 판별하는데 이것은 식 (10)의 방법으로 한 주기 후를 관찰하는 것으로써 판별식은 식 (18)과 같다. ■

그림 2(a)는 정리 2를 만족할 경우 단조증가하고 그렇지 않을 경우 2개 이상의 국소극대·극소점이 존재한다. (b)는 적어도 한 개의 상향초과를 갖고 따름정리 2의 1)을 만족하지 못하면 3개 이상의 국소극대·극소점을 갖는다. (c)는 적어도 한 개의 하향초과를 갖고 따름정리 2의 1)을 만족하지 못하면 3개 이상의 국소극대·극소점을 갖는다. (d)는 적어도 두 개의 국소극대·극소점을 갖고 각각 A형 하향초과, 상향초과이며 식 (18)을 만족하지 못하면 4개 이상의 국소극대·극소점을 갖는다. (e)는 두 개의 국소극대·극소점을 가지며 식 (18)을 만족하지 못하면 4개 이상의 국소극대·극소점을 갖는다. (f)는 B형 하향초과 형태의 국소극대·극소점을 가지며 식 (18)을 만족하지 못할 경우 4개 이상의 국소극대·극소점을 갖는다.

## 2. 복소영점의 경우

시스템이 공액복소영점을 갖는 경우는 실영점을 갖는 경우처럼 다양하게 세분되지 않는다. 단, 식 (3)의 시스템에서  $a_1 < 0$ 인 경우 두 영점은 모두 실수이며, 한 개의 영점은

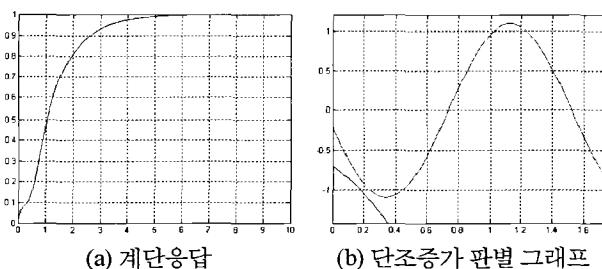


그림 6. 계단응답과 단조증가 판별 그래프.

Fig. 6. Step response and discriminant graph of extrema.

주극점과 원점 사이에 존재하게 된다. 이것은 식 (12)를 식 (3)에 대입함으로써 확인할 수 있다. 즉 공액복소영점을 갖는 경우  $a_1$ 은 항상 0보다 크다. 또한 공액복소영점을 갖는 시스템의 단조증가조건은 정리 2와 동일하며 식 (10)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\ln \sqrt{\frac{\{(\alpha_p - \alpha_z)^2 + (\beta_p - \beta_z)^2\}\{(\alpha_p - \alpha_z)^2 + (\beta_p + \beta_z)^2\}}{\{(\alpha_z - p_1)^2 + \beta_z^2\}^2}} < \frac{(p_1 - \alpha_p)}{\beta_p} \cdot \{\angle(z_1 - \bar{p}_2) + \angle(z_2 - \bar{p}_2)\} \quad (19)$$

[6]에서와 마찬가지로 영점이 우반면에 존재해도 영점의 허수부가 실수부에 비해 충분히 크다면 하향초과를 갖지 않는다.

예제 3:  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3+j4$ ,  $\bar{p}_2 = -3-j4$ ,  $z_1 = 1+j5$ ,  $z_2 = 1-j5$ 인 시스템의 계단응답과 단조증가 판별그래프는 그림 6과 같다. 이 시스템은 우반영점을 갖는 시스템이지만 하향초과를 갖지 않을 뿐만 아니라 부등식 (19)를 만족하며 단조증가응답을 갖는다. □

시스템이 복소영점을 갖는 경우, A형 하향초과를 갖지 않고 짹수개의 국소극대 · 극소점을 가지며 단조증가 판별은 식 (19)를 통해 이루어진다. 만약 영점의 허수부보다 복소극점의 허수부가 충분히 작다면, [6]의 결과를 근사적으로 활용해도 충분히 완만한 계단응답을 얻을 수 있다.

#### IV. 결론

제어시스템의 성능지표로써 계단응답이 어떤 특성을 갖는지에 대한 고찰은 매우 중요하며 극 · 영점의 배치와 매우 밀접한 관계를 갖고 있다. 극점이 모두 실수인 경우 국소극대 · 극소점은 아무리 많아도 영점의 개수보다는 적다. 반면에 시스템이 복소극점을 포함하면 정리 1에서 보인 바와 같이 무한히 많은 국소극대 · 극소점을 갖는 경우도 존재하기 때문에 기존의 방법과는 다른 접근이 필요하다.

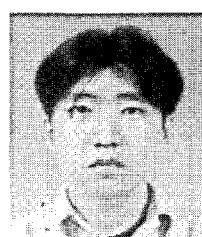
이 논문에서는 복소극점을 갖는 2차 시스템과 이를 포함하는 3차 합성 시스템으로 표현하여 각 계수의 관계에 따른 계단응답 특성을 정리하였다. 정리 1과 따름정리 1 및 2를 적용하면 그림 2에 해당하는 모든 경우에 계단응답특성을 예측할 수 있는데, 이는 기존의 연구결과로는 명확한 해석이 어려웠던 부분이다. 특히 기존 연구결과들은 실극점을 갖는 시스템을 대상으로 존재 가능한 국소극대 · 극소점의 최소개수와 최대개수를 다루는데 한정함으로써 영점의 개수

보다 작은 국소극대·극소점들만 다루었으나, 이 논문에서는 복소극점으로 인한 진동성분을 포함하여 계단응답에 존재하는 국소극대 · 극소점의 개수를 명시할 방법을 제시하였다.

이 논문의 결과는 복소극점을 포함하는 2차와 3차 시스템에 한정하여 전개하고 있지만, 4차 이상의 고차시스템에 대해서는 주극점(dominant poles) 근사화 과정을 거치거나 2차, 3차 부시스템들로 분할한 다음 이 논문의 결과를 확장하여 적용할 수 있다. 따라서 이 논문의 결과는 일반 선형 시불변 시스템의 극 · 영점과 응답특성에 대한 관계를 보다 직관적으로 이해하는데 도움이 될 것으로 기대된다.

#### 참고문헌

- [1] B. M. Kwon, M. E. Lee, and O. K. Kwon, "On nonovershooting or Monotone nondecreasing step response of second-order systems," *Transaction on Control, Automation, and Systems Engineering*, vol. 4, no. 4, pp. 283-288, Dec. 2002.
- [2] B. Kouvaritakis and A. G. J. Macfarlane, "Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros: Part 1. Square systems," *International Journal of Control*, vol. 23, no. 2, pp. 149-166, 1976.
- [3] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, 2001.
- [4] M. El-khoury, O. D. Crisalle, and R. Longchamp, "Influence of zero locations on the number of step-response extrema," *Automatica*, vol. 29, no. 6, pp. 1571-1574, 1993.
- [5] K. Iinoaya and R. J. Altpeter, "Inverse response in process control," *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 54, no. 7, pp. 39-43, July 1962.
- [6] 이상용, "선형시불변 단일입출력 시스템의 영점과 계단응답 특성," 제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지, 제15호 제8권 pp. 804-811, 2009.
- [7] M. Vidyasagar, "On undershooting and nonminimum phase zeros," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-31, no. 5, p. 440, May 1986.
- [8] J. D. Brule, "Time-Response Characteristics of a System as Determined by its Transfer Function," *IRE Trans. on Circuit Theory*, vol. 6, no. 2, pp. 163-170, 1959.
- [9] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(3rd. ed.), John Wiley & Sons, 2000.



#### 이상용

1998년 인하대학교 전기공학과 졸업.  
2000년 동 대학원 졸업(공학석사). 2000년~2003년 동 대학원 박사과정 수료.  
2004년~2007년 퓨얼셀파워 부설연구소 선임연구원. 2007년~현재 인하대학교 전기공학과 대학원 박사과정 재학중.  
관심분야는 공정제어, 선형제어시스템.